

# Изучение свойств телепараллельной гравитации

ГАИШ МГУ

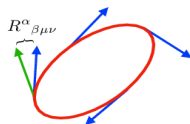
2022

## План

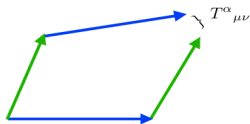
- Ведение в телепараллельную гравитацию
- Ковариантные сохраняющиеся величины в TEGR, проблемы
- Метод Нетер
- Свободно падающий наблюдатель в метриках Фридмана и (анти-)де Ситтера
- Неоднозначности определения сохраняющихся величин на примере метрики Шварцшильда
- Масса и момент движущейся ЧД
- Свободно падающие тетрады в  $f(T)$ -гравитации
- Выводы

# Ведение в телепараллельную гравитацию

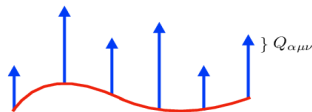
3 эквивалентных представления ОТО с различными типами связности:



The rotation of a vector transported along a closed curve is given by the curvature: General Relativity.



The non-closure of parallelograms formed when two vectors are transported along each other is given by the torsion: Teleparallel Equivalent of General Relativity.



The variation of the length of a vector as it is transported is given by the non-metricity: Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity.

Рис.: Параллельный перенос вектора (Jose Beltran Jimenez, Lavinia Heisenberg, Tomi S. Koivisto 2019 The Geometrical Trinity of Gravity; arXiv:1903.06830)

## Ведение в телепараллельную гравитацию

○ ОТО:

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} : \overset{\circ}{R}(h^a{}_{\mu}, \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}) \neq 0, \overset{\circ}{T}(h^a{}_{\mu}, \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}) = 0, \overset{\circ}{Q}(h^a{}_{\mu}, \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu}) = 0,$$

● Телепараллельный Эквивалент ОТО (TEGR):

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} : \overset{\bullet}{R}(h^a{}_{\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) = 0, \overset{\bullet}{T}(h^a{}_{\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) \neq 0, \overset{\bullet}{Q}(h^a{}_{\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) = 0,$$

^ Симметричный Телепараллельный Эквивалент ОТО (STEGR):

$$\hat{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} : \hat{R}(h^a{}_{\mu}, \hat{A}{}^a{}_{b\mu}) = 0, \hat{T}(h^a{}_{\mu}, \hat{A}{}^a{}_{b\mu}) = 0, \hat{Q}(h^a{}_{\mu}, \hat{A}{}^a{}_{b\mu}) \neq 0,$$

Общие определения:

Лоренцева связность (спиновая связность):

$$A^a{}_{b\mu} = h^a{}_{\nu} \partial_{\mu} h_b{}^{\nu} + h^a{}_{\nu} \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu} h_b{}^{\rho} \equiv h^a{}_{\nu} \nabla h_b{}^{\nu},$$

$$\text{Тензор кривизны Римана: } R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_{\nu} A^a{}_{b\mu} - \partial_{\mu} A^a{}_{b\nu} + A^a{}_{e\nu} A^e{}_{b\mu} - A^a{}_{e\mu} A^e{}_{b\nu}$$

$$\text{Тензор кручения: } T^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_a{}^{\rho} (\partial_{\mu} h^a{}_{\nu} - \partial_{\nu} h^a{}_{\mu} + A^a{}_{c\mu} h^c{}_{\nu} - A^a{}_{c\nu} h^c{}_{\mu})$$

$$\text{Тензор неметричности: } Q_{\lambda\mu\nu} = \nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}$$

## Ведение в телепараллельную гравитацию

Гравитационный лагранжиан телепараллельного эквивалента ОТО (TEGR):

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{2\kappa} \left( \dot{K}^\rho{}_{\mu\nu} \dot{K}^\nu{}_{\rho\mu} - \dot{K}^\nu{}_{\rho\nu} \dot{K}^{\mu\rho}{}_{\mu} \right), \quad (1)$$

где искривление (contortion):

$$\dot{K}^\nu{}_{\rho\nu} = \dot{\Gamma}^\nu{}_{\rho\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}^\nu{}_{\rho\nu}; \quad \dot{K}^k{}_{j\nu} = \dot{A}^k{}_{j\nu} - \overset{\circ}{A}^k{}_{j\nu}. \quad (2)$$

Лагранжиан определяется полем тетрад  $h^a{}_\rho$  (динамические переменные  $\dot{\mathcal{L}}$ );  $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu$  и уравнения поля для  $h^a{}_\mu$  в TEGR эквивалентны уравнениям поля для  $g_{\mu\nu}$  в ОТО. Инерциальная спиновая связность  $\dot{A}^a{}_{c\mu}$  - не динамическая. Она представляет инерциальные эффекты тетрады и может быть записана в виде:

$$\dot{A}^a{}_{c\mu} = \Lambda^b{}_d(x) \partial_\mu \Lambda_c{}^d(x) \quad (3)$$

$\Lambda^b{}_d(x)$  - локальное преобразование Лоренца от собственной тетрады к данной. ISC можно занулить, совершив преобразование к собственной тетраде. Все тензоры и лагранжиан (1) пространственно- и лоренц- ковариантны. Лор. ков. - при одновременном преобр.:  $h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b h^b{}_\mu$  и  $\dot{A}'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c \dot{A}^c{}_{d\mu} \Lambda_b{}^d + \Lambda^a{}_c \partial_\mu \Lambda_b{}^c$

## Уравнения поля

Варьирование по тетраде  $h^a{}_\rho$  дает уравнения движения:

$$\frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\rho} \equiv \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \left( \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\sigma}} \right) = 0.$$

Обозначая

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_\rho} \equiv -h \star J_a{}^\rho, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\sigma}} \equiv -\frac{h}{\kappa} \dot{S}_a{}^{\rho\sigma}, \quad (5)$$

и проводя прямые вычисления получаем:

$$\star J_a{}^\rho = -\frac{h_a{}^\rho}{h} \dot{\mathcal{L}} + \frac{1}{\kappa} h_a{}^\pi \dot{S}_c{}^{\beta\rho} \dot{T}^c{}_{\beta\pi} + \frac{1}{\kappa} \dot{A}^c{}_{a\beta} \dot{S}_c{}^{\rho\beta}, \quad (6)$$

$$\dot{S}_a{}^{\rho\sigma} = \left( \frac{1}{2} \dot{T}_\beta{}^{\rho\sigma} - \dot{T}^{[\rho\sigma]}{}_\beta - 2 \dot{T}^{\alpha[\rho}{}_\alpha \delta^{\sigma]}{}_\beta \right) h_a{}^\beta. \quad (7)$$

$\star J_a{}^\rho$  - вектор в пространстве времени, но не лоренц-ковариантен.

$\dot{S}_a{}^{\rho\sigma}$  - антисимметричный тензор в пространстве-времени и лоренц-ковариантен.

## Интегрирование уравнений поля

Итак, уравнения поля записанные в виде

$$\kappa h \overset{\star}{J}_a{}^\rho = \partial_\sigma \left( h \dot{\overset{\star}{S}}_a{}^{\rho\sigma} \right). \quad (8)$$

представляет одновременно законы сохранения, потому что дивергенция дает

$$\partial_\rho \left( h \overset{\star}{J}_a{}^\rho \right) = 0. \quad (9)$$

Интегрирование (8) и (9) стандартными методами дает интегральные сохраняющиеся величины на гиперповерхностях  $x^0 = \text{const} := \Sigma$ :

$$\mathcal{P}_a = \int_\Sigma dx^3 \left( h \overset{\star}{J}_a{}^0 \right) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \left( h \dot{\overset{\star}{S}}_a{}^{0i} \right). \quad (10)$$

Эта конструкция возможна благодаря пространственно-временной ковариантности уравнений (8), хотя величина  $\overset{\star}{J}_a{}^\rho$  нековариантна по лоренцевым вращениям.

## Интегрирование уравнений поля

Лоренц-нековариантность возникает из-за частного дифференцирования величины с несвернутым тетрадным индексом. Переместив  $\frac{1}{\kappa} \dot{A}^c{}_{a\beta} \dot{S}_c{}^{\rho\beta}$  в левую часть и обозначив

$$J_a{}^\rho = J_a{}^\rho + \frac{1}{\kappa} \dot{A}^c{}_{a\beta} \dot{S}_c{}^{\rho\beta}, \quad (11)$$

$$J_a{}^\rho \equiv \frac{1}{\kappa} h_a{}^\pi \dot{S}_c{}^{\beta\rho} \dot{T}^c{}_{\beta\pi} - \frac{h_a{}^\rho}{h} \dot{\mathcal{L}}, \quad (12)$$

можно переписать (8) в Лоренц-нековариантной форме

$$\kappa h \dot{J}_a{}^\rho = \dot{\mathcal{D}}_\sigma (h \dot{S}_a{}^{\rho\sigma}), \quad (13)$$

где  $\dot{\mathcal{D}}_\sigma$  — производная Флока-Иваненко  $\dot{\mathcal{D}}_\sigma V_a = \partial_\sigma V_a - \dot{A}^c{}_{a\sigma} V_c$ . Поскольку  $(\dot{\mathcal{D}}_\rho \dot{\mathcal{D}}_\sigma - \dot{\mathcal{D}}_\sigma \dot{\mathcal{D}}_\rho) V_a = 0$ , соотношение (13) приводит к закону сохранения:

$$\dot{\mathcal{D}}_\rho (h \dot{J}_a{}^\rho) = 0. \quad (14)$$

Но мы теперь не можем проинтегрировать (13) и (14), чтобы получить какую-то сохраняющуюся величину.



## Проблемы

1. Двойственность: интегрировать уравнения поля в пространственных индексах  $P_\mu$  или в лоренцевых  $P_a$ ?

2.  $P_a$  и  $P_\mu$  не является полностью инвариантными величинами.

3. Нельзя построить такие ковариантные токи, которые можно было бы проинтегрировать. Krssak [2] (Krššák M 2018 Gravitational energy-momentum in teleparallel gravity: A critical assessment Presentation in Salamanca, November 26, 2018),

Мы используем другой подход: выводим сохраняющиеся заряды  $P(\xi)$ , построенные по теореме Нётер. Они являются истинными инвариантными величинами, но зависят от дополнительного векторного поля  $\xi$ , характеризующего наблюдателя, которого необходимо ввести.

## Метод Нетер

- Y. N. Obukhov and G. F. Rubilar, Invariant conserved currents in gravity theories with local Lorentz and diffeomorphism symmetry, Phys. Rev. D 74 (2006) 064002, [gr-qc/0608064].
- Y. N. Obukhov, G. F. Rubilar, and J. G. Pereira, Conserved currents in gravitational models with quasi-invariant Lagrangians: Application to teleparallel gravity, Phys. Rev. D 74 (2006) 104007, [gr-qc/0610092].
- Y. N. Obukhov and G. F. Rubilar, Covariance properties and regularization of conserved currents in tetrad gravity, Phys. Rev. D 73 (2006) 124017, [gr-qc/0605045].
- Emtsova E.D., Petrov A.N., Toporensky A.V. On conservation laws in teleparallel gravity в сборнике Abstracts XXI International Scientific Conference "Physical Interpretations of Relativity Theory место издания Bauman Moscow State Technical University Москва, тезисы, с. 36-37 (2019)
- E. D. Emtsova, A. N. Petrov, and A. V. Toporensky, On conservation laws in teleparallel gravity, J. Phys. Conf. Ser. 1557 (2020), no. 1 012017.
- E. D. Emtsova, A. N. Petrov, and A. V. Toporensky, Conserved currents and superpotentials in teleparallel equivalent of GR, Class. Quant. Grav. 37 (2020), no. 9 095006, [arXiv:1910.08960].

## Метод Нетер

Рассматривая инвариантность относительно диффеоморфизмов, индуцированных произвольным векторным полем  $\xi$ , для теории в общем случае можно вывести:

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = \partial_\beta \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi), \quad (15)$$

где  $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$  - ток Нетер;  $\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi)$  - суперпотенциал Нетер. ВTEGR:

$$\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) = \frac{h}{\kappa} \xi^\sigma \dot{S}_\sigma^{\alpha\beta}; \quad \dot{S}_a^{\rho\sigma} \equiv -\frac{\kappa}{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a_{\rho,\sigma}} = \dot{K}^{\rho\sigma}_a + h_a^\sigma \dot{K}^{\theta\rho}_\theta - h_a^\rho \dot{K}^{\theta\sigma}_\theta \quad (16)$$

По построению, ток  $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$  - векторная плотность, суперпотенциал  $\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi)$  - антисимметричная тензорная плотность, и как  $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$ , так и  $\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi)$  локально лоренц-инвариантны. Ток Нетер сохраняется как в обычном, так и в ковариантном:

$$\partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0, \quad (17)$$

$\overset{\circ}{\nabla}_\alpha$  - ковариантная производная Леви-Чивиты. Сохраняющийся заряд Нетер:

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_\Sigma d^3x \dot{\mathcal{J}}^0(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} d^2x \dot{\mathcal{J}}^{01}(\xi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\Sigma} d^2x h \xi^\sigma \dot{S}_\sigma^{01} \quad (18)$$

## Метод Нетер

Когда  $\xi$  является времениподобным, соответствующий сохраняющийся заряд представляет собой энергию, измеренную множеством наблюдателей на пространственной бесконечности, имеющих их собственные 4-вектора  $\xi$ :

$$E(\xi) = \mathcal{P}(\xi), \quad \xi: \text{time-like.} \quad (19)$$

Заряды Нётер являются истинно инвариантными величинами как по отношению к диффеоморфизмам, так и по отношению к локальным преобразованиям Лоренца. Но теперь токи зависят от векторного поля  $\xi$ , которое не фиксировано *априори* и нуждается в определении. Существует множество способов определения  $\xi$ , но какие из них имеют физический смысл?

- а) В стандартной метрической формулировке ОТО - используются поля Киллинга геометрии.
- б) Собственный вектор наблюдателя (4-скорость наблюдателя), который локально измеряет некую величину.

## Инерциальная спиновая связность

В TEGR ISC  $\dot{A}^a_{\mu}$  не является динамической величиной, ее невозможно определить из уравнений поля ни в каком виде.

Возможные предположения о ISC:

- 1) Всегда ноль - тогда не будет Лоренц-инвариантных величин.
- 2) Ноль в некоторых собственных тетрадах, которые нам нужно найти, используя некоторые предположения о конечных энергетических характеристиках и т. д.

Способы найти ISC:

- а) Регуляризация энергии на бесконечности.
- б) Метод «Выключения» гравитации.

## Инерциальная спиновая связность

Наш способ «выключить» гравитацию:

Заметим, что  $\dot{J}^\alpha$  пропорционально искривлению  $\dot{K}^a{}_{c\mu} = \dot{A}^a{}_{c\mu} - \overset{\circ}{A}^a{}_{c\mu}$ ; а в отсутствие гравитации  $\dot{K}^a{}_{c\mu}$ ,  $\dot{J}^\alpha$  должны обращаться в нуль.

При «Выключении» гравитации  $\dot{K}^a{}_{c\mu} = \dot{A}^a{}_{c\mu} - \overset{\circ}{A}^a{}_{c\mu} \rightarrow 0$ , таким образом,  $\overset{\circ}{A}^a{}_{c\mu} \rightarrow \dot{A}^a{}_{c\mu}$ .

Т.о., для определения  $\dot{A}^a{}_{c\mu}$  мы предлагаем:

1) для известного решения ОТО выбрать удобную тетраду и определить

$$\overset{\circ}{A}^a{}_{c\mu} = -h_b{}^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\mu h^a{}_\nu;$$

2) По  $\overset{\circ}{A}^a{}_{c\mu} = -h_b{}^\nu \overset{\circ}{\nabla}_\mu h^a{}_\nu$  построить  $\overset{\circ}{R}^a{}_{b\gamma\delta}$ ;

3) «выключить» гравитацию, решив уравнение  $\overset{\circ}{R}^a{}_{b\gamma\delta} = 0$  относительно параметров выбранного решения ОТО;

4) Когда параметры, удовлетворяющие  $\overset{\circ}{R}^a{}_{b\gamma\delta} = 0$ , найдены, при найденных значениях параметров приравнять  $\dot{A}^a{}_{c\mu} = \overset{\circ}{A}^a{}_{c\mu}$ .

Метод выключения гравитации неоднозначен, что мы подробно рассмотрим на примере решения Шварцшильда.

## Плотность энергии во вселенной Фридмана для свободнопадающего наблюдения

Считаем ток  $\dot{j}^0(\xi)$

$$\dot{j}^\alpha(\xi) = \partial_\beta \dot{j}^{\alpha\beta}(\xi), \quad (20)$$

Ток в явном виде через ТЭИ:

$$\dot{j}^\alpha(\xi) = h \left[ \dot{\theta}_{\sigma}^{\alpha} + \dot{\Theta}_{\sigma}^{\alpha} \right] \xi^\sigma + \frac{1}{\kappa} h \dot{S}_a^{\alpha\rho} h^a_{\sigma} \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma = \frac{1}{\kappa} \partial_\beta (h \dot{S}_a^{\alpha\beta} h^a_{\sigma} \xi^\sigma) \quad (21)$$

Где  $\xi^\sigma = (-1, 0, 0, 0)$  - собственный вектор свободно падающего наблюдателя

## Метрика и тетрада во вселенной Фридмана

Возьмем метрику FLRW в виде:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (22)$$

где  $k = +1$  для пространства положительной кривизны,  $k = 0$  для плоского пространства и  $k = -1$  для пространства отрицательной кривизны.

Удобная диагональная тетрада

$$h^a{}_{\mu} = \text{diag} (1, a/\chi, ar, ar \sin \theta) . \quad (23)$$

Здесь и далее мы обозначаем  $\chi = \sqrt{1 - kr^2}$ . Для определенности мы выбрали только положительный знак  $\chi$ . Поскольку мы изучаем только локальные характеристики, мы требуем, чтобы  $\chi$  имел только действительные значения.



## Инерциальная спиновая связность во вселенной Фридмана

Чтобы найти ISC, надо решить ур-е  $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\gamma\delta} = 0$ , или эквивалентное ур-е  $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{bcd}$ .

Т.о., для всех неравных нулю тождественно компонентом тензора Римана  $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{bcd}$  получились следующие уравнения "выключения гравитации":

$$R^0{}_{i0i} = -R^0{}_{iio} = R^i{}_{00i} = -R^i{}_{0i0} = \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R^i{}_{jjj} = -R^i{}_{jji} = \frac{k + \dot{a}^2}{a^2} \quad (24)$$

где  $i, j = 1, 2, 3$ . То есть оказалось всего два уравнения:  $\dot{a}^2 + k = 0$  и  $\ddot{a} = 0$ .

По-скольку все решения первого уравнения удовлетворяют второму уравнению, то только

$$\dot{a}^2 + k = 0 \quad (25)$$

является здесь важным. Интересно отметить, что преобразуя "вакуумное" уравнение Фридмана

$$H^2 = \rho_{curv} \quad \text{or} \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}, \quad (26)$$

также получается (25). Выключение гравитации приводит к вакуумному решению. При  $k = 0$  это пространство Минковского  $a(t) = \text{const}$ ; при  $k = -1$  это будет решение Милна  $a(t) = \pm t$ ; а при  $k = +1$  действительных вакуумных решений нет,

## Инерциальная спиновая связность во вселенной Фридмана

Получем ненулевые компоненты инерциальной спиновой связности:

$$\begin{aligned}\dot{A}^0_{11} = \dot{A}^1_{01} = \sqrt{-k}/\chi, \quad \dot{A}^0_{22} = \dot{A}^2_{02} = \sqrt{-kr}, \quad \dot{A}^0_{33} = \dot{A}^3_{03} = \sqrt{-kr} \sin \theta, \\ \dot{A}^1_{22} = -\dot{A}^2_{12} = -\chi, \quad \dot{A}^1_{33} = -\dot{A}^3_{13} = -\chi \sin \theta, \\ \dot{A}^2_{33} = -\dot{A}^3_{23} = -\cos \theta.\end{aligned}\tag{27}$$

Для каждого из знаков кривизны можно положить  $\sqrt{-k} = 0; \pm 1; \pm i$ . Таким образом, компоненты (27) становятся комплексными величинами при  $k = +1$ ;

## Вычисления во вселенной Фридмана

Удобно представить компоненты тензора искривления contortion в тетрадных индексах  $\dot{K}^a{}_{bc}$ :

$$\dot{K}^0{}_{11} = \dot{K}^1{}_{01} = \dot{K}^0{}_{22} = \dot{K}^2{}_{02} = \dot{K}^0{}_{33} = \dot{K}^3{}_{03} = -H + \sqrt{-k}/a. \quad (28)$$

Пространственно-временные компоненты тензоров кручения  $\dot{T}^{\alpha}{}_{\beta\mu}$  и суперпотенциала  $\dot{S}_{\alpha}{}^{\beta\mu}$  соответственно равны:

$$\dot{T}^1{}_{10} = -\dot{T}^1{}_{01} = \dot{T}^2{}_{20} = -\dot{T}^2{}_{02} = \dot{T}^3{}_{30} = -\dot{T}^3{}_{03} = -H + \sqrt{-k}/a, \quad (29)$$

$$\dot{S}_1{}^{10} = -\dot{S}_1{}^{01} = \dot{S}_2{}^{20} = -\dot{S}_2{}^{02} = \dot{S}_3{}^{30} = -\dot{S}_3{}^{03} = -2(H - \sqrt{-k}/a). \quad (30)$$

Наконец, рассмотрим наблюдателя, покоящегося относительно его сопутствующих координат -  $(t, r, \theta, \phi)$  в (22). Тогда компоненты его собственного вектора равны

$$\xi^\sigma = (-1, 0, 0, 0). \quad (31)$$

Теперь мы можем рассчитать компоненты тока:

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = h \left( \dot{\theta}_\sigma^\alpha + \Theta_\sigma^\alpha \right) \xi^\sigma + h\kappa^{-1} \dot{S}_a^{\alpha\rho} h^a_\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma. \quad (32)$$

С вектором (31) нам нужно посчитать только компоненты ТЭИ  $\dot{\theta}_0^\alpha$  и  $\Theta_0^\alpha$ . Среди них только 00-компоненты ненулевые. Таким образом, по (??) имеем

$\dot{\theta}_0^0 = -3\kappa^{-1}(H - \sqrt{-k}/a)^2$ . Принимая 00-компоненту уравнений Фридмана как в [?], имеем  $\Theta_0^0 = -3\kappa^{-1}(H^2 + k/a^2)$ . Кроме того, только 0-компонента последнего члена в (32) не равна нулю. Учитывая (22), (30) и (31), получаем:

$$\dot{S}_a^{0\rho} h^a_\sigma \overset{\circ}{\nabla}_\rho \xi^\sigma = -6H(H - \sqrt{-k}/a), \quad (33)$$

и наконец мы получили

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = (0, 0, 0, 0). \quad (34)$$

Результат (34) означает, что свободно падающий наблюдатель с собственным вектором (31) не измеряет плотности энергии и импульса.

## .. во вселенной Фридмана

Чтобы перейти к калибровке Вайценбока, нужно применить Лоренцево вращение

$$\Lambda^a_b = \begin{pmatrix} \chi & -\sqrt{-kr} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-kr} \sin \theta \cos \varphi & \chi \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sqrt{-kr} \sin \theta \sin \varphi & \chi \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sqrt{-kr} \cos \theta & \chi \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

одновременно к тетраде и инерциальной спиновой связности. Оно полностью зануляет спиновую связность (27). А тетрада (23) преобразуется в собственную тетраду

## Пространство (анти-) де Ситтера

Теперь рассмотрим решение (анти-)де Ситтера (A)dS с метрикой:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (36)$$

Связанная с этой метрикой диагональная тетрада:

$$h^a{}_{\mu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Выключая гравитацию с помощью  $\Lambda = 0$ , получаем:

$$\dot{A}^1{}_{22} = -\dot{A}^2{}_{12} = -1; \quad \dot{A}^1{}_{33} = -\dot{A}^3{}_{13} = -\sin \theta; \quad \dot{A}^2{}_{33} = -\dot{A}^3{}_{23} = -\cos \theta \quad (38)$$

## Пространство (анти-) де Ситтера

Компоненты тензоров  $\dot{K}^a{}_{bc}$ ,  $\dot{T}^a{}_{bc}$  и  $\dot{S}^a{}_{bc}$  экономично запишем в тетрадных индексах:

$$\dot{K}^0{}_{10} = \dot{K}^1{}_{00} = \frac{\frac{1}{3}\Lambda r}{(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2}}; \quad \dot{K}^1{}_{22} = -\dot{K}^2{}_{12} = \dot{K}^1{}_{33} = -\dot{K}^3{}_{13} = \frac{(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2} - 1}{r},$$

(39)

$$\dot{T}^0{}_{01} = -\dot{T}^0{}_{10} = \frac{\frac{1}{3}\Lambda r}{(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2}}; \quad \dot{T}^2{}_{12} = \dot{T}^3{}_{13} = -\dot{T}^3{}_{31} = -\dot{T}^2{}_{21} = \frac{(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2} - 1}{r}$$

(40)

$$\dot{S}^0{}_{01} = -\dot{S}^0{}_{10} = -\frac{2}{r} + \frac{2}{r}(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2};$$

$$\dot{S}^2{}_{12} = -\dot{S}^2{}_{21} = \dot{S}^3{}_{13} = -\dot{S}^3{}_{31} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{-1/2} - \frac{2}{r}(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{1/2}$$

(41)

## Пространство (анти-) де Ситтера

Теперь запишем компоненты собственного вектора свободно падающего наблюдателя для (36) в самом общем виде:

$$\xi^\alpha = \left[ -C \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1}, -\left(C^2 - 1 + \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{1/2}, 0, 0 \right] \quad (42)$$

где  $C$  — константа интегрирования системы уравнений геодезических, которая может быть произвольной действительной величиной. Вычисляя компоненты тока  $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$  и повторяя все шаги как в случае FLRW, получаем, что 0-компонента тока (32) равна

$$\dot{\mathcal{J}}^0(\xi) = \frac{2}{\kappa} \frac{h}{r^2} C \left( \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-3/2} - 1 \right), \quad (43)$$

тогда как другие компоненты нулевые,  $\dot{\mathcal{J}}^i(\xi) = 0$ . Среди всех свободно падающих наблюдателей, определяемых (42), можно выделить одного, покоящегося относительно хаббловского потока, связанного с максимально симметричным (A)dS-пространством. Хаббловский поток имеет нулевую скорость в  $r = 0$ . Поместив наблюдателя в  $r = 0$  и выбрав  $C = 1$  в (42), получим для его собственного вектора  $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$  нулевой ток. Переход к калибровке Вайценбока: лор. вр. FRLW с  $k = 0$  и к тетраде, и к ISC одновременно.



## Mass of the Schwarzschild black hole - Schwarzschild static gauge

The standard metric for the Schwarzschild black hole is

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (44)$$

where

$$f = f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (45)$$

The tetrad is not defined by the field equations, so, we can choose the most convenient diagonal tetrad as

$$h^a{}_{\mu} \equiv \text{diag}\left(f^{\frac{1}{2}}, f^{-\frac{1}{2}}, r, r \sin \theta\right). \quad (46)$$

$\overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\gamma\delta}$  proportional to  $M$ . Thus  $M \rightarrow 0$  gives  $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\gamma\delta} \rightarrow 0$ . Thus we get ISC non-zero components of which are

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}2} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}2} = -1, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}3} = -\sin \theta, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}3} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}3} = -\cos \theta.$$

## Mass of the Schwarzschild black hole - Schwarzschild static gauge

Applying the Lorentz rotation

$$(\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

to diagonal tetrad (46) one finds that the tetrad components become

$$h^a{}_\mu \equiv \begin{bmatrix} f^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ 0 & f^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ 0 & f^{-\frac{1}{2}} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

and the inertial spin connection vanish. Such a tetrad is called as a *proper* tetrad. The static diagonal tetrad (46) corresponding to the Schwarzschild metric (44)  $\equiv$  *Schwarzschild static gauge*. Performing covariant Lorentz or coordinate transformations we stay at the Schwarzschild static gauge.

## Mass of the Schwarzschild black hole - Schwarzschild static gauge

The non-vanishing components of the superpotential are

$$\begin{aligned}\dot{S}_0^{01} &= -\dot{S}_0^{10} = \frac{2}{r} \left( f - f^{\frac{1}{2}} \right), \\ \dot{S}_2^{12} = \dot{S}_3^{13} &= -\dot{S}_2^{21} = -\dot{S}_3^{31} = -\frac{1}{r} \left( (1+f)/2 - f^{\frac{1}{2}} \right) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} h \dot{S}_0^{01} &= -\lim_{r \rightarrow \infty} h \dot{S}_0^{10} = -2M \sin \theta.\end{aligned}$$

Then, choosing  $\xi$  vector to be the time-like Killing vector

$$\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0),$$

one finds the Noether charge to be equal to  $M$

$$\mathcal{P}(\xi) = M.$$

But calculating the Noether current, taking  $\tilde{\xi}$  as a freely falling observer's velocity

$$\tilde{\xi}^\alpha = \left( -\frac{1}{f}, \sqrt{1-f}, 0, 0 \right) = \left( -\frac{1}{1-2M/r}, \sqrt{\frac{2M}{r}}, 0, 0 \right). \quad (49)$$

we obtain non-zero - this contradicts with the equivalence principle. The freely falling observer should not feel any influence of gravity.

## Free-Falling Observers and Lemaitre Gauge

After applying the coordinate transformations from the Schwarzschild static coordinates  $(t, r, \theta, \phi)$  to Lemaitre freely falling coordinates  $(\tau, \rho, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} d\rho &= dt + \frac{dr}{f\sqrt{1-f}}, \\ d\tau &= dt + \frac{dr}{f}\sqrt{1-f}, \end{aligned} \quad (50)$$

with  $f(r)$  is defined in (45), the Schwarzschild metric (44) transforms to

$$ds^2 = -d\tau^2 + (1-f)d\rho^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (51)$$

where  $r = r(\tau, \rho) = [\frac{3}{2}(\rho - \tau)]^{2/3}(2M)^{1/3}$ . Diagonal tetrad related to the metric (51):

$$h^a_{\mu} = \text{diag} \left( 1, \sqrt{1-f}, r, r \sin \theta \right). \quad (52)$$

All the components of the Riemann tensor  $\overset{\circ}{R}{}^a{}_{b\mu\nu}$  calculated from this LC-HC are proportional to  $M$  and hence vanish in the limit  $M \rightarrow 0$ . Then the inertial spin connection  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$  can be taken as the  $M \rightarrow 0$  limit of this Lemaitre L-CSC, i.e.

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{22}} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{12}} = -1, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{33}} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{13}} = -\sin \theta, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{33}} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{23}} = -\cos \theta. \quad (53)$$

## Free-Falling Observers and Lemaitre Gauge

Applying a local Lorentz transformation  $\Lambda_{(Sch)}^{-1}$  (the same as at the Schwarzschild case) to the diagonal tetrad we get a proper tetrad:

$${}^D h^a{}_{\mu} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \phi \left(\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \theta \sin \phi \left(\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \theta \left(\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Where ISC becomes zero.

Because our formalism is Lorentz invariant, for the proper tetrad and zero ISC, we obtain again zero Noether current.

The freely falling diagonal tetrad (52) corresponding to the Lemaitre metric  $\equiv$  *Lemaitre gauge*. Performing covariant Lorentz or coordinate transformations we stay at the Lemaitre gauge.  ${}^D h^a{}_{\mu}$  with zero ISC is also Lemaitre gauge.

## Free-Falling Observers and Lemaitre Gauge

We then calculate the superpotential  $\dot{S}_\alpha{}^{\mu\nu} = \dot{S}_a{}^{\mu\nu} h^a{}_\alpha$  for the diagonal tetrad (52) and the inertial spin connection (53) and find that the non-vanishing components:

$$\begin{aligned}\dot{S}_0{}^{01} &= -\dot{S}_0{}^{10} = -\frac{4M}{r^2}, & \dot{S}_1{}^{01} &= -\dot{S}_1{}^{10} = -\frac{2}{r}\sqrt{\frac{2M}{r}}\frac{1}{1-2M/r}, \\ \dot{S}_2{}^{02} &= \dot{S}_3{}^{03} = -\dot{S}_2{}^{20} = -\dot{S}_3{}^{30} = -\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{2M}{r}}\frac{1}{1-2M/r}, & & (55) \\ \dot{S}_2{}^{12} &= \dot{S}_3{}^{13} = -\dot{S}_2{}^{21} = -\dot{S}_3{}^{31} = \frac{M}{r^2}.\end{aligned}$$

## Free-Falling Observers and Lemaitre Gauge

We can consider  $\xi$  as a four-vector of a freely falling observer in the form

$$\tilde{\xi}^\alpha = (-1, 0, 0, 0), \quad (56)$$

Note, this vector is written in the Lemaitre coordinates and it is not a Killing vector. With this  $\tilde{\xi}$  we obtain the vanishing Noether current

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\tilde{\xi}) = (0, 0, 0, 0) \quad (57)$$

that corresponds to the equivalence principle, i.e. the free-falling observer measures the vanishing Noether energy-momentum current. Consequently we obtain the zero Noether conserved charge

$$E(\tilde{\xi}) = 0, \quad (58)$$

i.e. the free-falling observer measures the vanishing total mass of the black hole. But calculating the Noether charge with Killing vector  $\xi = (-1, 0, 0, 0)$  we get

$$E(\xi) = 2M. \quad (59)$$

## Comparison of Schwarzschild static and Lemaitre gauges

Now we connect all the tetrads in the Schwarzschild coordinates:

$${}^C h^a{}_{\mu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2Mr}}{r-2M} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2M}{r}} & \frac{r}{r-2M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (60)$$

$${}^C h^a{}_{\mu} = (\Lambda_{(boost)})^a{}_b {}^B h^b{}_{\mu} \quad (61)$$

where

$$(\Lambda_{(boost)})^a{}_b = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

where  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  and  $\beta$  is the rapidity is  $\beta = \sqrt{\frac{2M}{r}}$ . All four are connected directly Lorentz transformations:

$${}^A h \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}} {}^B h \xrightarrow{\Lambda_{(boost)}} {}^C h \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}^{-1}} {}^D h. \quad (63)$$



## Comparison of Schwarzschild static and Lemaitre gauges

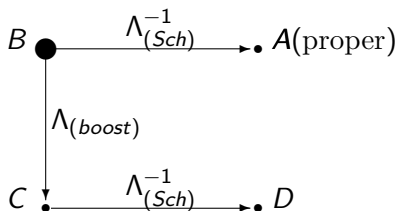


Figure 1

Pairs of tetrads and the related inertial ISCs in the Schwarzschild static gauge:

- The tetrad  $\overset{A}{h}$  is a proper tetrad with zero inertial spin connection.
- The tetrad  $\overset{B}{h}$  and the inertial spin connection  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(Sch)})^c{}_b$ .
- The tetrad  $\overset{C}{h}$  and  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(AC)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(AC)}^{-1})^c{}_b$ .
- The tetrad  $\overset{D}{h}$  and  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(AD)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(AD)}^{-1})^c{}_b$ .

## Comparison of Schwarzschild static and Lemaitre gauges

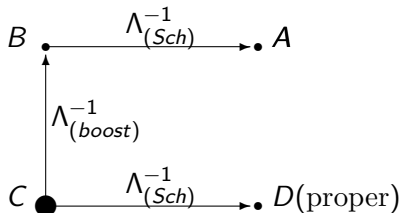


Figure 2

Pairs of tetrads and the related ISCs in the Lemaitre gauge:

- The tetrad  $\overset{D}{h}$  is a proper one with the vanishing inertial spin connection.
- The tetrad  $\overset{C}{h}$  and the inertial spin connection  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(Sch)})^c{}_b$ .
- The tetrad  $\overset{B}{h}$  and the inertial spin connection  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(DB)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(DB)}^{-1})^c{}_b$ .
- The tetrad  $\overset{A}{h}$  and the inertial spin connection  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(DA)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(DA)}^{-1})^c{}_b$ .

## Comparison of Schwarzschild static and Lemaitre gauges

Table 1.

Gauge	$\mathcal{P}(\xi)$	$\mathcal{P}(\check{\xi})$
Schwarzschild static	<b>M</b>	<i>M</i>
Lemaitre	<i>2M</i>	<b>0</b>

**Таблица:** Noether charges in the Schwarzschild and Lemaitre gauges for different choices of the vector field  $\xi$ .

Can we find a gauge giving both the correct BH mass and satisfying the equivalence principle?

## An arbitrary freely falling observer

Solving the geodesic equation in general form for a radially freely falling observer towards the Schwarzschild black hole in the Schwarzschild coordinates, one obtains

$$\tilde{\xi}^\alpha = \left( -\frac{e}{f}, \sqrt{e^2 - f}, 0, 0 \right) = \left( -\frac{e}{1 - 2M/r}, \sqrt{e^2 - (1 - 2M/r)}, 0, 0 \right), \quad (64)$$

where  $e$  is some number characterizing the initial state of the in-falling observer.

$e > 1$  - nonzero velocity directed to the black hole at infinity  $r \rightarrow \infty$ .

$e < 1$  - zero velocity at any finite  $r_0$ .

$e = 1$  has a zero velocity at the infinity  $r \rightarrow \infty$  (and the expression (64) reduces to the (??) considered previously.)

## An arbitrary freely falling observer

Let us introduce the coordinate transformation

$$\begin{aligned}d\tau_e &= edt + \frac{\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2M}{r}}}{1 - \frac{2M}{r}} dr, \\d\rho_e &= dt + \frac{e}{(1 - \frac{2M}{r}) \sqrt{e^2 - 1 + \frac{2M}{r}}} dr,\end{aligned}\tag{65}$$

using which, one transforms the Schwarzschild metric (44) to the form

$$ds^2 = -d\tau_e^2 + \left(e^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right) d\rho_e^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),\tag{66}$$

where  $r = r(\tau_e, \rho_e)$ . By the transformation (65), the 4-velocity (64) goes to the form

$$\tilde{\xi}^\alpha = (-1, 0, 0, 0),\tag{67}$$

## An arbitrary freely falling observer

The most natural choice for the tetrad corresponding to the metric (66) is to take the simplest diagonal tetrad

$$E_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (68)$$

To find the ISC corresponding to (68) we calculate the L-CSC for it and then “turn-off” the gravity by  $M \rightarrow 0$ . We find the non-vanishing components of the inertial spin connection to be

$$\begin{aligned} \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{2}2} = \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{0}2} = -\sqrt{e^2 - 1}, \quad \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{2}2} = -\dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{1}2} = -e, \quad \dot{A}^{\hat{0}}_{\hat{3}3} = \dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{0}3} = -\sin\theta\sqrt{e^2 - 1}, \\ \dot{A}^{\hat{1}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{1}3} = -e\sin\theta, \quad \dot{A}^{\hat{2}}_{\hat{3}3} = -\dot{A}^{\hat{3}}_{\hat{2}3} = -\cos\theta. \end{aligned} \quad (69)$$

## An arbitrary freely falling observer

In the Schwarzschild coordinates, the freely falling tetrad:

$${}^E h^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} e & \frac{\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1}}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ \sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1} & \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (70)$$

We can also derive a proper tetrad that we denote  ${}^F h$  by finding a local Lorentz transformation that transforms ISC (69) to zero. We find that this is achieved by

$$(\Lambda_{(EF)})^a{}_b = (\Lambda_{(Sch)})^a{}_c (\Lambda_{(boost')}^{-1})^c{}_b, \quad (71)$$

$$(\Lambda_{(boost')})^a{}_b = \begin{pmatrix} e & -\sqrt{e^2 - 1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{e^2 - 1} & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

${}^E h$  (70) and ISC (69), or  ${}^F h$  with zero ISC is *generalized Lemaitre gauge*, or *e-gauge*.

## An arbitrary freely falling observer

Relation for the new tetrads  $\overset{E}{h}$  and  $\overset{F}{h}$  with static the tetrads  $\overset{B}{h}$  and  $\overset{A}{h}$ :

$$\overset{A}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(Sch)}} \overset{B}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(boost_e)}^{-1}} \overset{E}{h} \xrightarrow{\Lambda_{(EF)}} \overset{F}{h}, \quad (73)$$

Where we have introduced the boost representing the free radial fall

$$(\Lambda_{(boost_e)})^a_b = \begin{pmatrix} \frac{e}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} & \frac{\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1}}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1}}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} & \frac{e}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (74)$$



## An arbitrary freely falling observer

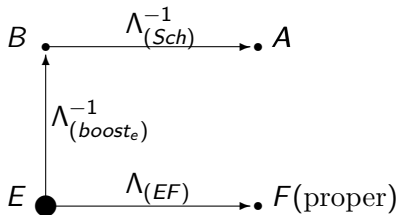


Figure 5

e-gauge presented in combinations of the tetrads and ISCs:

a) The tetrad  $\overset{F}{h}$  is a proper tetrad, i.e. with a zero inertial spin connection.

b) The tetrad  $\overset{E}{h}$  and the ISC  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(FE)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(FE)}^{-1})^c{}_b$ .

c) The tetrad  $\overset{B}{h}$  and the ISC  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(FB)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(FB)}^{-1})^c{}_b$ .

d) The tetrad  $\overset{A}{h}$  and the ISC  $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = (\Lambda_{(FA)})^a{}_c \partial_\mu (\Lambda_{(FA)}^{-1})^c{}_b$ .

## An arbitrary freely falling observer

Due to the Lorentz invariance, all the pairs  $h^F, h^E, h^B, h^A$  with their related inertial spin connections listed above as a)-d) lead to the same result for the superpotential

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_0^{01} &= -\dot{S}_0^{10} = -\frac{2}{r}(\mathcal{A}_e - 1 + 2M/r), & \dot{S}_1^{01} &= -\dot{S}_1^{10} = +\frac{2}{r}\frac{B_e}{1-2M/r}, \\
 \dot{S}_2^{02} &= \dot{S}_3^{03} = -\dot{S}_2^{20} = -\dot{S}_3^{30} = +\frac{e}{r}\frac{\mathcal{A}_e - 1 + M/r}{(1-2M/r)\sqrt{e^2 + 2M/r - 1}}, & & (75) \\
 \dot{S}_2^{12} &= \dot{S}_3^{13} = -\dot{S}_2^{21} = -\dot{S}_3^{31} = -\frac{1}{r}(\mathcal{A}_e - 1 + M/r), & &
 \end{aligned}$$

where we have introduced

$$\mathcal{A}_e \equiv e^2 - \sqrt{e^2 - 1}\sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1}, \quad \mathcal{A}_{e=1} = 1, \quad (76)$$

$$B_e \equiv e \left( \sqrt{e^2 + \frac{2M}{r} - 1} - \sqrt{e^2 - 1} \right), \quad B_{e=1} = \sqrt{\frac{2M}{r}}. \quad (77)$$

## An arbitrary freely falling observer

For the arbitrary freely-falling observer with velocity (64) we find the vanishing Noether current

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\tilde{\xi}) = (0, 0, 0, 0) \quad (78)$$

and hence naturally leads to the vanishing Noether conserved charge

$$\mathcal{P}(\tilde{\xi}) = 0, \quad (79)$$

what is analogous to the situation in the Lemaitre case and is consistent with the expectations based on the equivalence principle.

However, an interesting NEW result is that if we choose the vector  $\xi$  as the time-like Killing vector of the diagonal static Schwarzschild metric,  $\xi = (-1, 0, 0, 0)$  we obtain

$$\mathcal{P}(\xi) = M. \quad (80)$$

## An arbitrary freely falling observer

Gauge	$\mathcal{P}(\xi)$	$\mathcal{P}(\tilde{\xi})$
e-gauge	<b>M</b>	<b>0</b>

Таблица:

where  $\xi = (-1, 0, 0, 0)$  - Killing vector;

$\tilde{\xi}^\alpha = \left(-\frac{e}{f}, \sqrt{e^2 - f}, 0, 0\right) = \left(-\frac{e}{1-2M/r}, \sqrt{e^2 - (1 - 2M/r)}, 0, 0\right)$  - freely falling observer's 4-velocity.

## Discussion

Quantities  $P_a$  and  $P_\mu$  used by previous authors to obtain BH mass:

- Obtained by direct integration of field equations.
- Not invariant.
- In their approach, the observer is associated with tetrad (in ours: observer -  $\xi$ , tetrad - gravitational field only.)

Comparison with Noether charge:

$P_a$ : If  $\xi$  is identified with the tetrad itself (diffeomorphisms generated by the tetrad):  $\xi^\mu = -h_0^\mu$ , what gives  $\mathcal{P}(\xi^{(a)}) = P_a$ .

We can then understand  $P_a$  as the total energy-momentum of the whole spacetime as measured by the observer represented by the tetrad.

$P_\mu$ : If  $\xi^\mu = dx^\mu$ , i.e. diffeomorphisms generated by the coordinates, we have  $\mathcal{P}(\xi^{(a)}) = P_\mu$ .

Meaning to the coordinates?  $P_\mu$  - the energy-momentum of the spacetime itself?

## Сохраняющиеся величины для движущейся ЧД Шварцшильда

1. Для метрики Шварцшильда нет пространственно подобного вектора Киллинга
2. Движущаяся ЧД бесконечно удалена от наблюдателя, который находится в плоском пространстве-времени с метрикой Минковского.
3. Наш формализм инвариантен относительно любых преобразований.

## ЧД Шварцшильда - аналогия с материей

Это позволяет провести аналогию с движущейся материей в пространстве Минковского. Метрика:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (81)$$

Где  $(t, x, y, z) = (x^0, x^i) = (x^\alpha)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Чтобы превратить это пространство-время в систему отсчета, мы дополняем его статическими наблюдателями, которые имеют собственные вектора  $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$ . Пусть материя в пространстве Минковского имеет дифференциально сохраняющийся тензор энергии-импульса  $\Theta^\alpha_\beta$ ,  $\partial_\alpha \Theta^\alpha_\beta = 0$ . Тогда ток  $\mathcal{J}^\alpha = \Theta^\alpha_\beta \xi^\beta$  сохраняется,  $\partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha = 0$ , а его компоненты представляют собой плотность энергии  $\mathcal{J}^0 = \Theta^0_0 \xi^0$  и плотность импульса  $\mathcal{J}^i = \Theta^i_0 \xi^0$ , измеренные введенными выше наблюдателями. Ток  $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$  в TEGR обобщает самый простейший ток в пространстве Минковского, а его компоненты  $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$  имеют аналогичную интерпретацию для наблюдателей с собственными векторами  $\xi$ . Эта аналогия решает проблему отсутствия пространственно подобного вектора Киллинга.

## ЧД Шварцшильда - аналогия с материей

Предполагая статическое сферически-симметричное распределение вещества, имеем ток:

$$\mathcal{J}_s^\alpha = [\rho(r), 0, 0, 0], \quad (82)$$

где  $\rho(r) = \mathcal{J}_s^0(r) = \Theta^0_0(r)\xi^0$  — просто плотность энергии,  $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$  и

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \theta. \quad (83)$$

Предположим, что материя, распределенная на гиперповерхности  $\Sigma$  постоянного времени, ограничена  $\partial\Sigma$ , являющейся сферой  $r = r_0$ . Тогда массу/энергию такого шара материи можно рассчитать как

$$E_s = \iiint_{\Sigma} dx dy dz \mathcal{J}_s^0(r) = \iiint_{\Sigma} dx dy dz \rho(r) = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dr d\theta d\phi \rho(r) r^2 \sin \theta = \mathcal{M}. \quad (84)$$



## ЧД Шварцшильда - аналогия с материей

Предположим, что абсолютно идентичный шар из материи движется относительно системы  $\{x^\alpha\}$ , связанной с (81), с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $X$ . Собственные координаты движущегося объекта связаны с координатами в (81) преобразованием Лоренца:

$$\bar{t} = \gamma(t - vx); \quad \bar{x} = \gamma(x - vt); \quad \bar{y} = y; \quad \bar{z} = z, \quad (85)$$

где  $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ . По аналогии с системой отсчета  $\{x^\alpha\}$ , определяемой (81), движущийся шар имеет собственную (свою) систему отсчета  $\{\bar{x}^\alpha\}$ .

Пусть движущаяся сфера заполнена  $N$  точечными частицами с массами  $m$  и статическими в собственной системе отсчета  $\{\bar{x}^\alpha\}$ . Полная масса всех частиц в системе  $\{\bar{x}^\alpha\}$  равна  $M_s = Nm$ .

Переходим к системе  $\{x^\alpha\}$ :

- 1) Движущаяся сфера подвергается релятивистскому сжатию, и ее объем уменьшается в  $\gamma$  раз.
  - 2) В силу эффектов специальной теории относительности энергия и импульс каждой частицы с массой  $m$  становятся равными  $\gamma m$  и  $\gamma vt$  соответственно.
  - 3) Т.к. число частиц  $N$  сохраняется, концентрация частиц увеличивается в  $\gamma$  раз.
- 1) и 3) компенсируются при суммировании и интегрировании.

## ЧД Шварцшильда - аналогия с материей

Эта логика работает и в случае непрерывного распределения материи. Таким образом, в собственной системе  $\{\bar{x}^\alpha\}$  движущегося шара ток имеет вид:

$$\mathcal{J}_s^{\bar{\alpha}} = [\rho(\bar{r}), 0, 0, 0], \quad (86)$$

где  $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$ . Перейдем от системы  $\{\bar{x}^\alpha\}$  к системе  $\{x^\alpha\}$ . Компоненты вектора (86) после преобразований Лоренца (85) становятся:

$$\mathcal{J}_m^\alpha = [\gamma\rho(\bar{r}), \gamma v\rho(\bar{r}), 0, 0] \quad (87)$$

в системе  $\{x^\alpha\}$  в координатах  $(t, x, y, z)$ , где  $\bar{r}^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2$ .

После перехода от суммирования точечных частиц к интегрированию получается тот же результат.

Полная масса движущегося шара материи

$$E_m = \iiint_{\Sigma} dx dy dz (\gamma \mathcal{J}_m^0(\bar{r})) = \gamma \iiint_{\Sigma} dx' dy dz \rho(r') = 4\pi\gamma \int_0^{r_0} dr' r'^2 \rho(r') = \gamma \mathcal{M}, \quad (88)$$

где граница  $\partial\Sigma$  области  $\Sigma$  определяется как  $\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ , вычисленная в момент  $t = 0$  без ограничения общности. После простого переопределения  $x' = \gamma x$  имеем  $x'^2 + y^2 + z^2 = r'^2$ , и граница  $\partial\Sigma$  определяется как обычно:  $r' = r_0$ , поэтому последнее интегрирование в (88) точно повторяет (84).

Полный импульс движущегося шара материи получается интегрированием плотности импульса  $\mathcal{J}_m^1(\bar{r})$ , умноженной на  $\gamma$

$$P_m^1 = \iiint_{\Sigma} dx dy dz (\gamma \mathcal{J}_m^1(\bar{r})) = \gamma v \iiint_{\Sigma} dx' dy dz \rho(r') = 4\pi\gamma v \int_0^{r_0} dr' r'^2 \rho(r') = \gamma v \mathcal{M}. \quad (89)$$

Формализм поностью ковариантен, поэтому эти преобразования токов применимы к ЧД.

## Движущаяся черная дыра вTEGR

Метрика Шварцшильда в изотропных координатах:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \psi^4(r)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (90)$$

где  $\alpha(r) \equiv (1 - \frac{M}{2r})/(1 + \frac{M}{2r})$ ,  $\psi(r) \equiv 1 + \frac{M}{2r}$  и  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Удобная диагональная тетрада:

$$h^a{}_{\mu} = \text{diag} [\alpha(r), \psi^2(r), \psi^2(r), \psi^2(r)]. \quad (91)$$

Для расчета полной массы черной дыры Шварцшильда удобнее брать сферические координаты. Поэтому применим стандартное преобразование координат (83), после которого метрика (90) примет вид:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \psi^4(r) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (92)$$

Возьмем снова удобную диагональную тетраду для (92):

$$h^a{}_{\mu} = \text{diag} [\alpha(r), \psi^2(r), r\psi^2(r), r\psi^2(r) \sin \theta]. \quad (93)$$

## Движущаяся черная дыра вTEGR

“Выключение” гравитации с помощью  $M \rightarrow 0$  в обоих случаях приводит к одной и той же Статической Калибровке Шварцшильда, в которой с 4-векторами статических наблюдателей

$$\xi^\sigma = [\alpha^{-1}(r), 0, 0, 0] \quad (94)$$

Был получен суперпотенциал Нётер

$$\dot{\mathcal{J}}_s^{01} = -\dot{\mathcal{J}}_s^{10} = 2\kappa^{-1}M\psi(r)\sin\theta; \quad (95)$$

и ток Нётер :

$$\dot{\mathcal{J}}_s^\alpha = [2\kappa^{-1}M\psi'(r)\sin\theta, 0, 0, 0]. \quad (96)$$

И посчитана масса ЧД (в собственной системе ЧД)

$$E_s = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma} dx dy dz(r) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \iiint_{\Sigma} dr d\theta d\phi \dot{\mathcal{J}}_s^0 = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Sigma} d\theta d\phi \dot{\mathcal{J}}_s^{01} = M, \quad (97)$$

где граница  $\partial\Sigma$  - сфера  $r = r_0$ , и  $r_0 \rightarrow \infty$ . (97) можно интерпретировать как полную массу черной дыры, т.к. при  $r_0 \rightarrow \infty$  4-вектор (94) асимптотически стремится к времениподобному вектору Киллинга  $\xi^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$ .

## Движущаяся черная дыра в TEGR

В собственных координатах ЧД  $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  и в статической шварцшильдовой калибровке (построенной на собственных координатах ЧД) ток:

$$\dot{\mathcal{J}}_{\bar{s}}^{\bar{\alpha}}(\bar{r}) = [(\bar{r}), 0, 0, 0], \quad (98)$$

Ковариантный формализм позволяет преобразовать компоненты тока (98) с использованием преобразований Лоренца в систему  $\{x^\alpha\}$ :

$$\dot{\mathcal{J}}_m^\alpha(\bar{r}) = [\gamma(\bar{r}), \gamma v(\bar{r}), 0, 0]. \quad (99)$$

Формально (99) совпадает с током для шара материи в пространстве Минковского.

Интегрирование компонентов тока ЧД повторяет интегрирование компонентов тока материи. Единственное отличие  $r' = r_0 \rightarrow \infty$ . Полные масса и импульс для движущейся черной дыры:

$$E_m = \gamma M; \quad P_m^1 = \gamma v M. \quad (100)$$

## Free-falling tetrads in $f(T)$ gravity

$$\dot{\mathcal{L}}_f = \frac{h}{2\kappa} f(T). \quad (101)$$

where  $f$  - arbitrary function.

Varying with respect to ISC one gets the antisymmetric part of the field equations obtained by variation with respect to the tetrad. The antisymmetric part in TEGR  $\equiv 0$ , but in  $F(T)$  it is not trivial. The spin connection is dynamical, and, one needs to check the field equations.

$$E_{ab} = h \left( f_{TT} \dot{S}_{ab}{}^\nu \partial_\nu \dot{T} + f_T \overset{\circ}{G}_{ab} + \frac{1}{2} \eta_{ab} (f - \dot{T} f_T) \right), \quad (102)$$

where  $\overset{\circ}{G}_{ab}$  is the Levi-Civita Einstein tensor. Antisymmetric part:

$$E_{[ab]} = f \dot{S}_{[ab]}{}^\nu \partial_\nu \dot{T} = 0. \quad (103)$$

When  $f_{TT} = 0$ , the theory reduces to TEGR.

In some cases, turning off gravity, one can get the ISC satisfying the antisymmetric part. We'll check if we can turn off gravity to obtain a good tetrad in  $f(T)$  for BH solution.

## Free-falling tetrads in $f(T)$ gravity

The spherically symmetric spacetime can be in a general case given by the metric ansatz

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-A^2, B^2, r^2, r^2 \sin^2 \theta) \quad (104)$$

where  $A, B$  are some functions of  $r$ .

Taking the diagonal tetrad for the diagonal metric:

$$\bar{h}^a{}_{\mu} \equiv \text{diag}(A, B, r, r \sin \theta). \quad (105)$$

And then turning off gravity we get *good tetrad*

$$\bar{A}^a{}_{\mu} = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b \bar{B}^b{}_{\mu} \quad (106)$$

where  $(\Lambda_{(Sch)}^{-1})^a{}_b$  is same as in TEGR.



## Free-falling tetrads in $f(T)$ gravity

Free-falling tetrad for the spherically symmetric spacetime (104) by

$$\bar{h}^a{}_\mu = \bar{\Lambda}_{(boost)}{}^a{}_b \bar{h}^b{}_\mu, \quad (107)$$

where

$$(\Lambda_{(boost)})^a{}_b = \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & \bar{\gamma}\bar{\beta} & 0 & 0 \\ \bar{\gamma}\bar{\beta} & \bar{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

where  $\bar{\gamma} = 1/\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}$  and  $\bar{\beta}$  is the rapidity is  $\bar{\beta} = \sqrt{1 - A^2}$ .

Analogically to TEGR, turning off gravity in  $\bar{h}^{\bar{c}}{}_{\bar{\mu}}$  one gets that the 'good tetrad' is  $\bar{h}^{\bar{D}}$ :

$$\bar{h}^{\bar{a}}{}_{\bar{\mu}} = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} \bar{h}^{\bar{b}}{}_{\bar{\mu}} = (\Lambda_{(Sch)}^{-1})^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} \bar{\Lambda}_{(boost)}{}^{\bar{b}}{}_{\bar{c}} \bar{h}^{\bar{c}}{}_{\bar{\mu}}. \quad (109)$$

But are  $\bar{h}^{\bar{A}}$  and  $\bar{h}^{\bar{D}}$  really good tetrads which satisfy the antisymmetric field equations?

We check these assumptions directly.

## Free-falling tetrads in $f(T)$ gravity

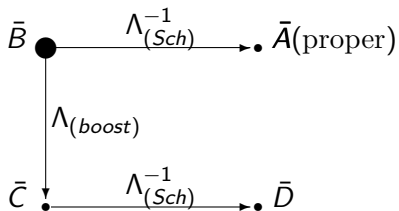


Figure 1

Turning off gravity in the tetrad  $\bar{h}$  one gets that the proper tetrad is  $\bar{h}$  - This is a correct result, obtained by many authors, that satisfies the antisymmetric part.

## Free-falling tetrads in $f(T)$ gravity

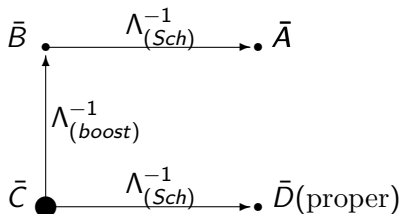


Figure 2

Turning off gravity in the tetrad  $\bar{h}$  one gets that the proper tetrad is  $\bar{D}$  - But unfortunately  $\bar{h}$  cannot be a good tetrad - We obtained that the antisymmetric part of equations is not satisfied here.

## Выводы 1

- С помощью теоремы Нетер построены в удобной тензорной форме сохраняющиеся токи и заряды, ковариантные относительно лоренцевых вращений и координатных преобразований.
- Свободно падающий наблюдатель во вселенной Фридмана и пространстве (анти-)де Ситтера измеряет нулевую плотность энергии.
- Масса черной дыры (заряд Нётера) и плотность энергии, измеренные наблюдателем (ток Нётера), были получены в статической калибровке Шварцшильда, калибровке Леметра и во впервые построенной  $e$ -калибровке.
- Выключение гравитации в общем случае приводит к разным калибровкам, а следовательно, и к разным значениям сохраняющихся величин.
- Статическая калибровка Шварцшильда дает правильную массу ЧД  $M$  (инвариантную относительно локально лоренцевых вращений), но принцип эквивалентности не выполняется для свободно падающего наблюдателя.
- В калибровке Леметра принцип эквивалентности выполняется для свободно падающего наблюдателя, но масса ЧД вдвое больше.

## Выводы 2

- Во впервые построенной е-калибровке мы получаем как правильную массу ЧД  $M$  (инвариантную относительно локально лоренцевых вращений), так и правильный принцип эквивалентности для свободно падающего наблюдателя.
- Получены массы и импульс движущейся ЧД относительно бесконечно далеких наблюдателей
- Выключение гравитации для декартовых изотропных и сферических изотропных координат ЧД приводит к одной и той же статической Шварцшильдовой калибровке.
- Выключение гравитации в свободно падающей тетраде в гравитации  $f(T)$  не дает ISC, удовлетворяющую уравнениям поля.
- Собственные тетады в TEGR не всегда являются хорошими в модифицированных телепараллельных теориях.

**Thank you for attention!**