

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ГАЗОДИНАМИКИ И КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

1. НЕПРЕРЫВНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕВЯЗКОГО И НЕТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

§ 1. Уравнения газовой динамики

Для значительного сжатия жидкостей (и твердых Тел) нужны давления в сотни тысяч атмосфер и выше. Поэтому в обычных условиях жидкость можно рассматривать как несжимаемую среду. Скорости течения жидкости при малых изменениях плотности гораздо меньше скорости звука, которая является масштабом скорости, характеризующим сплошную среду. При небольших изменениях плотности и движениях, медленных по сравнению со скоростью звука, газ также можно считать несжимаемым и описывать его движение при помощи гидродинамики несжимаемой жидкости. Однако заметные изменения плотности и скорости течения, сравнимые со скоростью звука, в газах, в отличие от жидкостей, достигаются сравнительно легко: при перепадах давления порядка величины самого давления, т. е. при $\Delta p \sim 1 \text{ атм}$, если начальное давление газа атмосферное. В таких условиях необходимо учитывать сжимаемость вещества. Уравнения газовой динамики тем и отличаются от уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости, что в них учтена возможность больших изменений плотности веществ.

Состояние движущегося газа с известными термодинамическими свойствами определяется заданием скорости, плотности и давления, как функций координат и времени. Для нахождения этих функции служит система уравнений газодинамики, которая представляет собой выраженные в дифференциальной форме общие законы сохранения массы, импульса и энергии вещества.

Выпишем эти уравнения без вывода, который можно найти, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1]. Будем пренебрегать действием массовых сил (силы тяжести), а также вязкостью и теплопроводностью вещества^{*)}. Обозначим через $\partial/\partial t$ частную производную по времени, относящуюся к данной точке пространства, локальную производную, а через d/dt — субстанциональную производную, характеризующую изменение во времени какой-либо величины, связанной с дающей движущейся частицей ве-

^{*)} Уравнения газодинамики с учетом вязкости и теплопроводности будут рассмотрены ниже, в §20.

щества. Если u — вектор скорости частицы с компонентами u_x, u_y, u_z или u_i , где $i = 1, 2, 3$, то

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \nabla). \quad (1.1)$$

Первое уравнение — уравнение непрерывности — свидетельствует о сохранении массы вещества, т. е. о том, что изменение плотности ρ в данном элементе объема происходит за счет втекания (или вытекания) вещества в этот элемент:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u = 0. \quad (1.2)$$

С помощью определения (1.1) уравнение непрерывности можно записать в форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0. \quad (1.3)$$

В частном случае несжимаемой жидкости, когда $\rho = \text{const.}$ уравнение непрерывности упрощается:

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (1.4)$$

Второе уравнение выражает закон Ньютона и не отличается от уравнения движения несжимаемой жидкости (p — давление):

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla p \quad (1.5)$$

или, в форме уравнения Эйлера,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.6)$$

Как легко проверить путем непосредственного вычисления, уравнение движения вместе с уравнением непрерывности эквивалентно закону сохранения импульса, записанному в форме, аналогичной уравнению (1.2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.7)$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + p \delta_{ik}. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.7) выражает тот факт, что изменение 1-й компоненты импульса в данной точке пространства связано с вытеканием (втеканием) импульса вместе с веществом (первое слагаемое в (1.8)) и работой сил давления (второе слагаемое)*).

Третье уравнение является существенно новым по сравнению с гидродинамикой несжимаемой жидкости и эквивалентно первому закону термодинамики — закону сохранения энергии. Его можно прочесть так: изменение удельной внутренней энергии ε данной частицы вещества происходит за счет работы сжатия, которую производит над нею окружающая среда, а также вследствие выделения энергии от посторонних источников:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} = Q. \quad (1.9)$$

*) В правой части формулы (1.7) производится суммирование по дважды встречающемуся индексу k ($k=1, 2, 3$); $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i \neq k$.

Здесь $V = 1/\rho$ — удельный объем, а Q — энергосодержание в 1 сек на 1 г вещества от внешних источников (Q может быть и отрицательным, если имеются немеханические потери энергии, например на излучение).

С помощью уравнений непрерывности и движения уравнение энергии также можно привести к форме, подобной (1.2), (1.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = - \operatorname{div} \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p u \right] + \rho Q. \quad (1.10)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что изменение полной энергии единицы объема в данной точке пространства происходит за счет вытекания (втекания) энергии при движении вещества, работы сил давления и энергосодержания от внешних источников.

Уравнения непрерывности, движения и энергии образуют систему пяти уравнений (уравнение движения векторное и эквивалентно трем координатным) относительно пяти неизвестных функций координат и времени: ρ , u_x , u_y , u_z , p . Внешние источники энергии Q считаются заданными, а внутреннюю энергию ε можно выразить через плотность и давление, поскольку термодинамические свойства вещества предполагаются известными: $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$.

Если энергия, как это часто бывает, известна не как функция давления и плотности, а как функция температуры M и плотности или температуры и давления, то к системе следует присоединить уравнение состояния вещества $p = f(M, \rho)$. Уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$pV = AT, \quad p = A\rho T, \quad (1.11)$$

где A — газовая постоянная, рассчитанная на 1 г^{*)}.

Уравнение энергии (1.9) имеет общее значение и справедливо даже тогда, когда вещество не находится в термодинамическом равновесии. В том частном и практически важнейшем случае, когда вещество термодинамически равновесно, его можно записать в иной форме с помощью второго закона термодинамики

$$TdS = d\varepsilon + pdV, \quad (1.12)$$

где S — удельная энтропия. В отсутствие внешних источников тепла третье уравнение газодинамики эквивалентно уравнению постоянства энтропии частицы, т. е. условию адиабатичности движения

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (1.13)$$

В идеальном газе с постоянной теплоемкостью энтропия особенно просто выражается через давление и плотность (удельный объем)

$$S = c_V \ln pV^\gamma + \text{const}, \quad (1.14)$$

где γ — показатель адиабаты, равный отношению удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, $\gamma = c_p/c_V = 1 + A/c_V$. В этом случае уравнение адиабатичности (1.13) (или энергии) можно непосредственно записать в форме дифференциального уравнения, связывающего давление и плотность (давление и объем),

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \gamma \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (1.15)$$

^{*)} $A = R/\mu$, где R — универсальная газовая постоянная, а μ — молекулярный вес.

К системе дифференциальных уравнений газодинамики добавляются соответствующие начальные и граничные условия.

§ 2. Лагранжевы координаты

Уравнения, в которых газодинамические величины рассматриваются как функции пространственных координат и времени, называют уравнениями в эйлеровой форме или уравнениями в эйлеровых координатах.

В случае одномерных движений, т. е. плоских, цилиндрически и сферически-симметричных, часто пользуются другими, лагранжевыми координатами. В отличие от эйлеровой, лагранжева координата связана не с определенной точкой пространства, а с определенной частицей вещества. Газодинамические величины, выраженные как функции лагранжевых координат, характеризуют изменения плотности, давления, скорости каждой частицы вещества с течением времени. Лагранжевы координаты особенно удобны при рассмотрении внутренних процессов, протекающих в веществе (не выходящих за рамки данной частицы) скажем, химической реакции, ход которой с течением времени зависит от изменения температуры и плотности частицы. Введение лагранжевых координат в ряде случаев позволяет также более коротким и легким путем находить точные решения уравнений газодинамики или делает более удобным численное интегрирование последних.

Производная по времени в лагранжевых координатах эквивалентна просто субстанциональной производной d/dt . Частицу можно характеризовать массой вещества, которое отделяет ее от какой-то другой, фиксированной частицы, или ее координатой в начальный момент времени.

Особенно просто введение лагранжевых координат в плоском случае, когда движение зависит только от одной декартовой, координаты x . Обозначим текущую эйлерову координату рассматриваемой частицы через x , а координату какой-то фиксированной частицы — через x_1 (в качестве фиксированной может быть, например, выбрана частица около твердой стенки или около границы газа с пустотой, если таковые имеются в задаче). Тогда масса столба единичного сечения между рассматриваемой частицей и фиксированной равна

$$m = \int_{x_1}^x \rho dx, \quad (1.16)$$

а приращение массы при переходе от частицы к соседней

$$dm = \rho dx. \quad (1.17)$$

Величину m можно выбрать в качестве лагранжевой координаты.

Если в начальный момент, как это часто бывает, газ покоится и плотность его постоянна, $\rho(x, 0) = \rho_0$, то в качестве лагранжевой удобно взять начальную координату частицы, отсчитываемую от точки x_1 , обозначим ее через a . Тогда

$$a = \int_{x_1}^x \frac{\rho}{\rho_0} dx, \quad da = \frac{\rho}{\rho_0} dx. \quad (1.18)$$

Уравнения плоского движения газа в лагранжевых координатах приобретают простую форму. Уравнение непрерывности, записанное относительно удельного объема $V = 1/\rho$ и единственной, x -й, компоненты скорости u есть

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial a}. \quad (1.19)$$

Здесь, как и в последующих уравнениях, производная по времени представляет собой субстанциональную производную d/dt , но ее лучше записать в виде частной производной $\partial/\partial t$, чтобы подчеркнуть, что она берется при m и $a = \text{const}$, т. е. для заданной частицы с определенной лагранжевой координатой m или a . Уравнение движения в лагранжевых координатах имеет вид.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial m} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - V_0 \frac{\partial p}{\partial a}. \quad (1.20)$$

Что же касается уравнения энергии, записанного в форме (1.9) или в форме условия адиабатичности (1.13) (при отсутствии внешних источников тепла и диссипативных процессов — вязкости и теплопроводности), то они сохраняют свою форму; следует лишь заменить обозначение d/dt на $\partial/\partial t$. В идеальном газе с постоянной теплоемкостью условие адиабатичности (1.13) дает

$$pV^\gamma = f[S(m)], \quad (1.21)$$

где функция f зависит только от энтропии данной частицы m . В так называемом изэнтропическом движении, когда энтропии всех частиц одинаковы и не меняются со временем, $f = \text{const}$, причем уравнение $pV^\gamma = \text{const}$ справедливо как в лагранжевых, так и в эйлеровых координатах.

Существенно, что в плоском случае в уравнение не входит в явном виде эйлерова координата x . После того как лагранжевы уравнения решены и найдена функция $V(m, t)$, к зависимости газодинамических величин от эйлеровой координаты можно перейти с помощью квадратуры, интегрируя уравнение (1.17),

$$dx = V(m, t) dm, \quad x(m, t) = \int_0^m V(m, t) dm + x_1(t). \quad (1.22)$$

В цилиндрическом и сферическом случаях уравнения газодинамики в лагранжевых координатах несколько более сложны, чем в плоском, так как теперь в уравнения в явном виде входит эйлерова координата и в систему уравнений включается дополнительное уравнение, связывающее лагранжеву и эйлерову координаты. Например, в сферическом случае лагранжеву координату можно определить как массу, заключенную внутри, сферического объема около центра симметрии:

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad dm = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (1.23)$$

Если в начальный момент плотность газа была постоянной, можно в качестве лагранжевой координаты взять начальный радиус r_0 «частицы», рассматриваемой как элементарный сферический слой:

$$\frac{4\pi r_0^3}{3} \rho_0 = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad dr_0 = \frac{r^2}{r_0^3} \frac{\rho}{\rho_0} dr. \quad (1.24)$$

Уравнение непрерывности в сферических лагранжевых координатах есть

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial m} 4\pi r^2 u \quad \text{или} \quad \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r_0^3} \frac{\partial}{\partial r_0} r^2 u. \quad (1.25)$$

Уравнение движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\partial p}{\partial r_0}. \quad (1.26)$$

Уравнения энергии или адиабатичности остаются такими же, как и в плоском случае.

В качестве дополнительного уравнения в систему включается дифференциальное (или интегральное) соотношение (1.23) или (1.24), связывающее m и r или r_0 и r .

Уравнения для цилиндрического случая составляются вполне аналогично сферическому.

Следует отметить, что в двумерных и трехмерных течениях переход к лагранжевым координатам, как правило, невыгоден, так как уравнения при этом сильно усложняются.

§ 3. Звуковые волны

Скорость звука входит в уравнения газовой динамики, как скорость распространения малых возмущений. В предельном случае, когда изменения плотности $\Delta\rho$ и давления Δp при движении вещества очень малы по сравнению со средними значениями плотности и давления ρ_0 и p_0 , а скорости движения малы по сравнению со скоростью звука c , уравнения газовой динамики превращаются в уравнения акустики и описывают распространение звуковых волн.

Запишем плотность и давление в виде $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, $p = p_0 + \Delta p$ и будем рассматривать величины $\Delta\rho$, Δp , а также скорость u как малые. Пренебрегая величинами второго порядка малости, преобразуем эйлеровы уравнения непрерывности и движения для плоского случая. Уравнение непрерывности дает

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.27)$$

Уравнение движения приобретает вид

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \Delta\rho}{\partial x}. \quad (1.28)$$

При последнем преобразовании принято во внимание, что движение в звуковой волне является адиабатическим. Поэтому малое изменение давления связано с малым изменением плотности через адиабатическую производную: $\Delta p = (\partial p / \partial \rho)_s \Delta\rho$. Эта производная подставляет собой, как мы сейчас увидим, квадрат скорости звука

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \quad (1.29)$$

и соответствует невозмущенному состоянию вещества.

Дифференцируя первое из написанных уравнений по времени, а второе по координате, исключим смешанную производную $\partial^2 u / \partial t \partial x$. Получим волновое уравнение для изменения плотности

$$\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial x^2}. \quad (1.30)$$

Такому же уравнению удовлетворяет и пропорциональная $\Delta\rho$ величина изменения давления $\Delta p = c^2 \Delta\rho$, а также скорость движения u и все другие

параметры вещества, например, температура^{*)}. Волновое уравнение типа (1.30) допускает две группы решений:

$$\Delta \varrho = \Delta \varrho(x - ct), \quad \Delta p = \Delta p(x - ct), \quad u = u(x - ct) \quad (1.31)$$

и

$$\Delta \varrho = \Delta \varrho(x + ct), \quad \Delta p = \Delta p(x + ct), \quad u = u(x + ct) \quad (1.32)$$

(под c подразумеваем положительный корень

Первая группа описывает возмущение, распространяющееся в сторону положительной оси x , а вторая — в противоположную сторону. Действительно, в первом случае, например, заданное значение плотности соответствует определенному значению аргумента $x - ct$, т. е. с течением времени бежит в сторону положительных x со скоростью c . Таким образом, c есть скорость распространения звуковых волн.

Замечая, что $\partial u(x \mp ct)/\partial x = \pm(1/c)\partial u(x \mp ct)/\partial t$, и принимая во внимание, что в невозмущенном газе перед волной $u=0$, $\Delta p=0$ (См. сноску), найдем с помощью уравнения (1.27) связь между массовой скоростью газа u и изменениями плотности или давления:

$$u = \pm \frac{c}{\varrho_0} \Delta \varrho = \pm \frac{\Delta p}{\varrho_0 c}, \quad \Delta \varrho = c^2 \Delta p = \pm \varrho_0 c u. \quad (1.33)$$

Верхний знак относится к волне, бегущей в сторону положительных x , а нижний — в сторону отрицательных.

В обоих случаях массовая скорость направлена в сторону распространения волны там, где вещество сжато, и в противоположную сторону там, где оно разрежено.

Общее решение волновых уравнений для Δp и u складывается из двух частных, соответствующих волнам, бегущим в положительном и отрицательном направлениях оси x . Согласно (1.31), (1.32), (1.33) решения для плотности и скорости можно записать в следующем виде:

$$\Delta \varrho = \frac{\varrho_0}{c} f_1(x - ct) + \frac{\varrho_0}{c} f_2(x + ct), \quad (1.34)$$

$$u = f_1(x - ct) - f_2(x + ct), \quad (1.35)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции своих аргументов, которые определяются начальными распределениями плотности и скорости:

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{\varrho_0} \Delta \varrho(x, 0) + u(x, 0) \right],$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{\varrho_0} \Delta \varrho(x, 0) - u(x, 0) \right].$$

Например, если в начальный момент имеется прямоугольное возмущение плотности, а газ везде неподвижен, то вправо и влево побегут прямоугольные возмущения, как показано на рис. 1.1.

^{*)} Чтобы получить волновое уравнение для скорости, продифференцируем уравнение (1.30) по времени и воспользуемся уравнениями (1.27), (1.28):

$$\frac{\partial^3 \Delta \varrho}{\partial t^3} = c^2 \frac{\partial^3 \Delta \varrho}{\partial x^2 \partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

откуда $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2 + f(t)$. Замечая, что перед волной в невозмущенном веществе $u=0$, найдем, что $f(t)=0$.

Если в начальный момент распределения плотности и скорости имели вид, изображенный на рис. 1.2, причем $u = (c/\rho_0) \Delta\rho$, так что $f_2 = 0$, то прямоугольные импульсы побегут только в одну сторону. (Такое возмущение может быть создано поршнем, который в начальный момент начал двигаться в покоящийся газ с постоянной скоростью u , а через некоторое время «мгновенно» остановился. Если длина прямоугольного импульса равна L , то, очевидно, время действия поршня $t_1 = L/c$.)

Особую важность для акустики представляют монохроматические звуковые волны, в которых все величины являются периодическими функциями времени типа

$$f = A \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t\right),$$

или, в комплексной форме,

$$f = A \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right],$$

$\nu = \omega/2\pi$ есть частота звука, а $\lambda = c/\nu$ — длина волны. Всякое возмущение можно разложить в интеграл Фурье, т. е. представить в виде совокупности монохроматических волн с различными частотами.

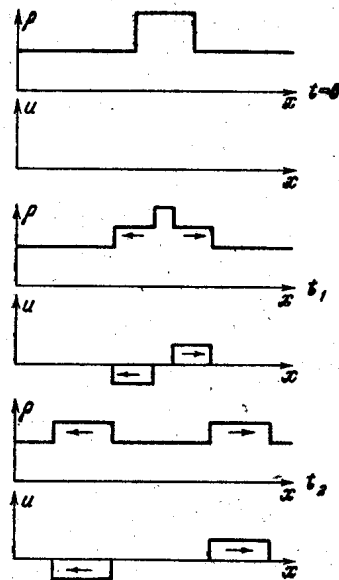


Рис. 1.1. Распространение прямоугольного импульса плотности и скорости по одной координате в линейной акустике.

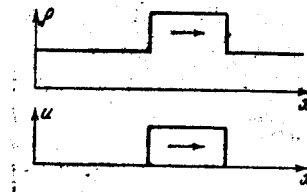


Рис. 1.2.

Воспринимаемые человеческим ухом звуки имеют частоты ν от 20 до 20000 *гц* (колебаний в 1 *сек*) и длины волн, соответствующие скорости звука в атмосферном воздухе $c = 330$ *м/сек*^{*)}, от 15 *м* до 1,5 *см*.

Для характеристики численных значений различных величин в звуковой волне укажем, что для сильнейшего звука, в 10^5 раз более интенсивного^{**)}, чем оркестр фортиссимо, амплитуда изменения плотности воздуха в волне

^{*)} Показатель адиабаты воздуха при нормальных условиях

$$\gamma = 1,4; \quad c = (\partial p / \partial \rho)^{1/2} = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2} = (\gamma A T_0)^{1/2}$$

(так как при $S = \text{const}$ $p \sim \rho^\gamma$).

^{**)} Как будет показано ниже, энергия или интенсивность звука пропорциональна квадрату амплитуды изменений давления или плотности. Громкость звука измеряется в децибеллах, в логарифмической шкале. За нуль принимается средний порог чувствительности человеческого уха. Увеличение громкости на n децибел означает увеличение энергии звука в $10^{n/10}$ раз. Увеличение громкости от шелеста листьев или шепота (~ 10 *дб*) до оркестра фортиссимо (~ 80 *дб*) соответствует увеличению энергии звука в 10^7 раз.

составляет 0,4% от нормальной плотности; амплитуда изменения давления — 0,56% от атмосферного; амплитуда скорости — 0,4%, от скорости звука, т. е. 1,3 м/сек. Амплитуда смещения частиц воздуха порядка $\Delta x \approx u/2\pi v = (u/c)(\lambda/2\pi) \approx 6 \cdot 10^{-4} \lambda$ ($\Delta x \approx 0,036$ см для $v = 500$ гц).

Найдем энергию, связанную с малым возмущением, которое распространяется по покоящемуся газу. Приращение удельной внутренней энергии возмущенного вещества с точностью до членов второго порядка малости относительно $\Delta \rho$ (или Δp , или u) есть:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \right)_0 (\Delta \rho)^2.$$

В силу адиабатичности движения производные берутся при постоянной энтропии. Их можно вычислить с помощью термодинамического соотношения: $d\varepsilon = T dS - p dV = (p/\rho^2) d\rho$. Получим

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{p_0}{\rho_0^2} \Delta \rho + \frac{c^2}{2\rho_0^3} (\Delta \rho)^2 - \frac{p_0}{\rho_0^3} (\Delta \rho)^3.$$

Приращение внутренней энергии в 1 см³ с той же точностью равно

$$\rho \varepsilon - \rho_0 \varepsilon_0 = (\rho_0 + \Delta \rho) (\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 \Delta \rho =$$

$$= \left(\varepsilon_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \right) \Delta \rho + \frac{c^2}{2\rho_0} (\Delta \rho)^2 = w_0 \Delta \rho + \frac{c^2}{2\rho_0} (\Delta \rho)^2,$$

где $w = \varepsilon + p/\rho$ — удельная энтальпия.

Плотность внутренней энергии, связанной с возмущением, в первом приближении пропорциональна $\Delta \rho$. Плотность кинетической энергии $\rho u^2/2 \approx \rho_0 u^2/2$ есть величина второго порядка малости. Из соотношения (1.33), справедливого для бегущей плоской волны, видно, что член второго порядка в плотности внутренней энергии и кинетическая энергия в точности равны друг другу, так что полная плотность энергии возмущения есть

$$E = w_0 \Delta \rho + \frac{c^2}{2\rho_0} (\Delta \rho)^2 + \frac{\rho_0 u^2}{2} = w_0 \Delta \rho + \rho_0 u^2. \quad (1.36)$$

Член первого порядка малости в энергии связан с изменением объема всего газа, которое произошло в результате возмущения. Если возмущение было создано таким образом, что объем газа в целом не изменился, то энергия возмущения всего газа есть величина второго порядка по $\Delta \rho$, так при интегрировании по объему член, пропорциональный $\Delta \rho$, исчезает.

Таково, например, положение в волновом пакете, который распространяется по газу, занимающему бесконечное пространство, причем на бесконечности газ не возмущен (рис. 1.3). Изменения плотности в областях сжатия с точностью до членов второго порядка компенсируются изменениями в областях разрежения.

Таким образом, энергия звука есть величина второго порядка малости, пропорциональная квадрату амплитуды^{*)}:

$$E_{\text{зв}} = \rho_0 u^2. \quad (1.37)$$

Если возмущение было создано таким образом, что объем газа при этом изменился, то в энергии возмущения остается член, пропорциональный пер-

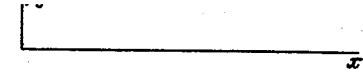


Рис. 1.3. Распределение плотности в волновом пакете.

^{*)} Выражение (1.37) следует усреднить по времени или по пространству:

$$E_{\text{зв}} = \rho_0 u^2 \quad (u \sim \Delta \rho \sim \Delta p = 0, \text{ тогда как } \overline{u^2} \sim (\overline{\Delta \rho})^2 \sim (\overline{\Delta p})^2 > 0).$$

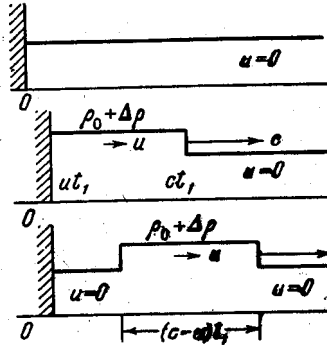


Рис. 1.4. Распространение импульса сжатия от поршня, который вдвинулся в газ.

ut_1 (этот случай был рассмотрен выше и иллюстрируется рис. 1.4). Энергия в первом приближении пропорциональна «амплитуде» волны u , $\Delta\rho$, Δp и времени сжатия (т.е. длине возмущения). Предоставим теперь газу возможность вернуть поршень на место, причем таким образом, что в момент t_1 скорость поршня u «мгновенно» меряется на противоположную, $(-u)$, а в момент $t_2 = 2t_1$ поршень, возвратившись в исходное положение, «мгновенно» останавливается. Возмущение будет теперь иметь вид, изображенный на рис. 1.5, где показаны состояния в моменты $t = 0$, t_1 , t_2 и $t > t_2$. Легко проверить непосредственным вычислением, что за второй период от t_1 до t_2 газ совершает над поршнем работу, в первом приближении в точности равную работе, которую совершил поршень над газом за первый период от нуля до t_1 . Длины положительной и отрицательной областей импульса в первом приближении также одинаковы и равны

$$ct_1 = c(t_2 - t_1).$$

Таким образом, если просуммировать энергии в сжатой и разреженной областях импульса, то члены первого порядка сократятся. Если производить все вычисления с учетом членов следующего порядка^{*)}, то в энергии останется член второго порядка, причем плотность энергии возмущения выразится общей формулой (1.37).

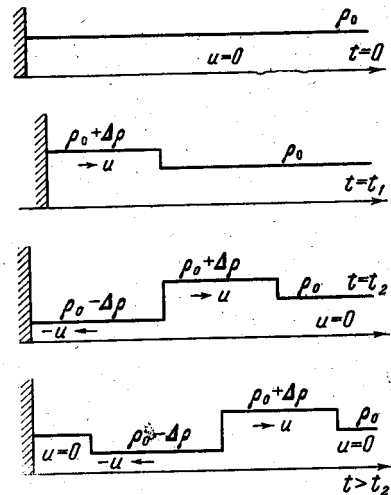


Рис. 1.5. Распространение импульсов сжатия и разрежения от поршня, который сначала вдвинулся в газ, а затем вернулся на место.

вой степени $\Delta\rho$. Однако эта, основная, доля энергии, пропорциональная $\Delta\rho$, может быть «возвращена газом обратно», если источник возмущения возвращается в свое исходное положение. Энергия, оставшаяся при этом в возмущенном газе, составит только величину второго порядка малости. Поясним это положение на простом примере.

Пусть в начальный момент в покоящийся газ начал двигаться поршень с постоянной скоростью u (гораздо меньшей скорости звука $u \ll c$). В момент t_1 поршень «мгновенно» останавливается. По газу побежит импульс сжатия длиной $(c-u)t_1 \approx ct_1$, энергия которого равна работе, затраченной внешней силой,двигающей поршень, $put_1 = (p_0 + \Delta p) u t_1 \approx p_0$

^{*)} В силу изэнтропичности течения изменения плотности и давления не независимы, а всегда связаны между собой термодинамическим соотношением $\Delta p = c^2 \Delta \rho$.

§ 4. Сферические звуковые волны

В отсутствие поглощения (т. е. без учета вязкости и теплопроводности; см. § 22) амплитуда и плотность энергии плоских волн не уменьшаются с течением времени. Например, импульсы, изображенные на рис. 1.4 и 1.5, уходят на «бесконечность», не изменяя своей формы и амплитуды.

В сферической волне это уже не так. Линеаризуя уравнение непрерывности в сферически-симметричном случае, получим

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u.$$

Линеаризованное уравнение движения не отличается от (1.28):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial r}.$$

Отсюда, как и в плоском случае, получим волновое уравнение для $\Delta \rho$, решение которого, описывающее волну, расходящуюся от центра, есть

$$\Delta \rho = \frac{f(r-ct)}{r}. \quad (1.38)$$

Если рассматривать короткие импульсы, длиной гораздо меньше r , то можно сказать, что форма импульса, задаваемая функцией $f(r-ct)$, не меняется, а амплитуда волны падает пропорционально $1/r$. Это вполне естественно. Предположим, что из центра бежит импульс конечной ширины Δr . По мере распространения импульса масса вещества, вовлеченного в движение, равная примерно $(\rho_0 4\pi r^2 \Delta r)$, растет пропорционально r^2 . Звуковая энергия единицы объема пропорциональна $(\Delta \rho)^2$. Поскольку энергия не меняется, т. е. $(\Delta \rho)^2 r^2 = \text{const.}$ то амплитуда должна убывать как $\Delta \rho \sim 1/r$.

Сферическая волна отличается от плоской еще в одном отношении. Подставим решение (1.38) в уравнение движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0} \left[\frac{f'(r-ct)}{r} - \frac{f(r-ct)}{r^2} \right],$$

и проинтегрируем полученное выражение по времени. Получим решение для скорости:

$$u = \frac{c}{\rho_0} \left[\frac{f(r-ct)}{r} - \frac{\int_{r-ct}^{r} f(\xi) d\xi}{r^2} \right] = \frac{c}{\rho_0} \left[\Delta \rho - \frac{\Phi(r-ct)}{r^2} \right], \quad (1.39)$$

которое отличается от формулы для плоского случая (1.33) наличием дополнительного члена. В плоской волне в области возмущения вещество может быть только сжато, как это имеет место в случае, изображенном на рис. 1.4. В сферической волне это невозможно: за областью сжатия обязательно следует область разрежения.

В самом деле, за областью возмущения $\Delta \rho$ и u обращаются в нуль. В плоском случае в силу пропорциональности в $u \sim \Delta \rho$ это условие выполняется автоматически, независимо от формы импульса. В сферической же волне для этого необходимо, чтобы за областью возмущения $\Phi(r-ct) = 0$, т. е. чтобы был равен нулю интеграл по всей области возмущения

$$\Phi(r-ct) = \int f(\xi) d\xi = \int r \Delta \rho dr = 0.$$

Отсюда видно, что $\Delta \rho$ в сферической волне меняет знак, т. е. за областью сжатия следует область разрежения.

Дополнительное количество вещества, заключенного в волне, равно $\int \Delta \rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Но $\Delta \rho \sim 1/r$, поэтому дополнительная масса в волне сжатия возрастает при расхождении волны от центра. Растущее в процессе распространения количество сжатого вещества и вызывает появление следующей за волной повышенной плотности волны пониженной плотности.

Изменение давления в сферической волне пропорционально изменению плотности, как и в плоской. Скорость же, как видно из формулы (1.39), не пропорциональна $\Delta \rho$ или Δp . В частности, скорость и изменение плотности меняют знак в разных точках, так что в волне, бегущей от центра, профили плотности и скорости имеют вид, изображенный на рис. 1.6.

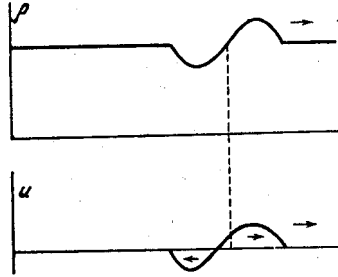


Рис. 1.6. Распределение плотности и скорости в сферической звуковой волне.

§ 5. Характеристики

В § 3 было показано, что если в начальный момент t_0 в какой-либо точке x_0 неподвижного газа, плотность и давление которого везде одинаковы, создать произвольные малые возмущения скорости и давления (или плотности ^{*)}), то от этой точки в обе стороны со скоростью звука побегут две волны, несущие возмущения. В волне, распространяющейся в сторону положительных x , направо, малые изменения всех величин связаны между собою соотношениями:

$$\Delta_1 u = \frac{\Delta_1 p}{\rho_0 c} = \frac{c}{\rho_0} \Delta_1 \rho = f(x - ct) \text{ **).$$

В волне, распространяющейся налево:

$$\Delta_2 u = -\frac{\Delta_2 p}{\rho_0 c} = -\frac{c}{\rho_0} \Delta_2 \rho = -f_2(x + ct).$$

Произвольные возмущения Δu и Δp , возникшие в начальный момент, всегда можно разложить на две составляющие: $\Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u$, $\Delta p = \Delta_1 p + \Delta_2 p$, подчиненные указанным соотношениям, так что в общем случае начальное возмущение распространяется в разные стороны в виде двух волн.

Если начальные возмущения Δu , Δp не произвольны, а уже связаны между собой одним из соотношений, то возмущение бежит в одну из сторон (это соответствует обращению в нуль одной из функций, f_1 или f_2). Если газ не покоится, а движется как целое с постоянной скоростью u , то картина не меняется, за тем лишь исключением, что теперь волны сносятся потоком, так что скорости их распространения относительно неподвижного наблюдателя становятся равными $u+c$ (направо) и $u-c$ («налево» ^{***)}). В этом легко убедиться, если перейти в уравнениях газодинамики к новой системе координат, движущейся, вместе с газом со скоростью u .

Предположим теперь, что в произвольном плоском изэнтропическом течении газа, описываемом функциями $u(x, t)$, $p(x, t)$, (или $\rho(x, t)$, см. первую сноску на стр. 24), в-момент t_0 в точке x_0 возникли произвольные малые воз-

^{*)} В силу изэнтропичности течения изменения плотности и давления не независимы, а всегда связаны между собой термодинамическим соотношением $\Delta p = c^2 \Delta \rho$.

^{**) Мы пишем здесь Δu вместо u в целях единства обозначений.}

^{***)} Мы заключаем слово «налево» в кавычки: если $u > c$, то волна также бежит направо, но, разумеется, медленнее, чем первая.

мушения скорости и давления. Рассматривая небольшую область около точки x_0 и малые промежутки времени (небольшую окрестность точки x_0, t_0 на плоскости x, t), можно в первом приближении пренебречь изменениями невозмущенных функции $u(x, t)$, $p(x, t)$, а следовательно, $\rho(x, t)$ и $c(x, t)$ в этой окрестности, и считать их постоянными, равными значениям в точке x_0, t_0 . Вся описанная выше картина распространения возмущений переносится и на этот случай. Если возмущения $\Delta u(x_0, t_0)$, $\Delta p(x_0, t_0)$ произвольны, то они также распадаются на две составляющие, одна из которых начнет распространяться вправо со скоростью $u_0 + c_0$ а другая «налево» со скоростью $u_0 - c_0$, причем под u_0 и c_0 здесь следует понимать локальные значения этих величин в точке x_0, t_0 .

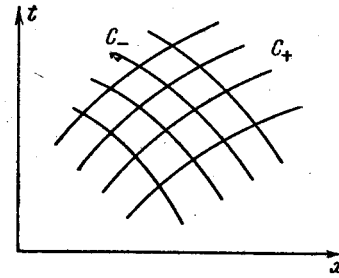


Рис. 1.7. Сетка двух семейств характеристик в изэнтропическом случае.

Поскольку u и c меняются от точки к точке, то на протяжении длительного промежутка времени пути распространения возмущений на плоскости x, t , описываемые уравнениями $dx/dt = u + c$ и $dx/dt = u - c$, будут искривляться. Эти линии на плоскости x, t , вдоль которых распространяются малые возмущения, называются характеристиками. При плоском изэнтропическом течении газа, как видим, существуют два семейства характеристик, которые описываются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = u + c, \quad \frac{dx}{dt} = u - c,$$

и называются соответственно C_+ - и C_- -характеристиками.

Через каждую точку на плоскости x, t можно провести две характеристики, принадлежащие C_+ - и C_- -семействам. В общем случае характеристики криволинейны, как показано на рис. 1.7. В области постоянного течения, где u, p, c, ρ постоянны в пространстве и во времени, характеристики обоих семейств — прямые линии.

Если течение не изэнтропично, а только адиабатично, т. е. энтропии различных час-

тиц газа не меняются во времени, но отличаются друг от друга, возможны и возмущения энтропии. В силу адиабатичности движения, $dS/dt = 0$, т. е. всякое возмущение энтропии, не сопровождающееся возмущениями других величин (p, ρ, u), остается локализованным в частице и перемещается вместе с частицей вдоль линии тока. Линии тока, следовательно, в случае не изэнтропического течения также являются характеристиками. Они описываются уравнением $dx/dt = u$ и называются C_0 -характеристиками.

В не изэнтропическом течении через каждую точку x, t проходят три характеристики и плоскость x, t покрывается сеткой трех семейств характеристик C_+, C_-, C_0 (рис. 1.8).

До сих пор мы говорили о характеристиках как о линиях на плоскости x, t , вдоль которых распространяются малые возмущения. Однако этим не исчерпывается значение характеристик.

Уравнения газовой динамики можно преобразовать к такому виду, чтобы они содержали производные от газодинамических величин только вдоль

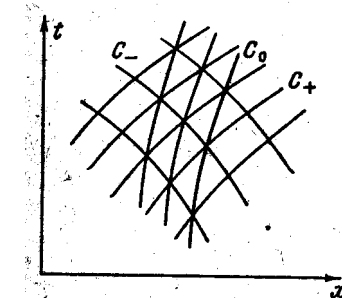


Рис. 1.8. Сетка трех семейств характеристик в не изэнтропическом случае.

характеристик. Как будет показано в следующем параграфе, в изэнтропическом течении вдоль характеристик переносятся не только малые возмущения, но и определенные комбинации газодинамических величин.

Как известно, функцию двух переменных $f(x, t)$ можно дифференцировать по времени вдоль определенной кривой $x=\varphi(t)$ на плоскости x, t . Производная по времени от функции $f(x, t)$ вдоль произвольной кривой $x=\varphi(t)$ определяется наклоном касательной к кривой в данной точке $dx/dt=\varphi'$ и равна

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \varphi'.$$

С двумя частными случаями дифференцирования вдоль кривой мы уже знакомы: это — частная производная по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ (вдоль кривой $x=\text{const}$,

($\varphi'=0$) и субстанциональная производная $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$ (вдоль пути движения частицы или вдоль линии тока: $dx/dt=\varphi'=u$).

Преобразуем уравнения плоского адиабатического движения к такому виду, чтобы они содержали производные от газодинамических величин только вдоль характеристик. Для этого исключим из уравнения непрерывности

$$\frac{a\rho}{dt} + \rho \frac{uu}{\partial x} = 0$$

производную от плотности, заменив ее на производную от давления. Поскольку плотность термодинамически связана с давлением и энтропией $\rho=\rho(p, S)$, а $dS/dt=0$, имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt}.$$

Подставляя это выражение в уравнение непрерывности и умножая уравнение на c/ρ , найдем

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Сложим это уравнение с уравнением движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, найдем аналогично

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0.$$

Первое из этих уравнений содержит производные только вдоль (C_+ -характеристик, а второе — только вдоль C_- -характеристик. Замечая, что

уравнение адиабатичности $\frac{dS}{dt} = 0$ можно рассматривать как уравнение

вдоль C_0 -характеристик, запишем уравнения газодинамики в виде

$$du + \frac{1}{\rho c} dp = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_+: \quad \frac{dx}{dt} = u + c, \quad (1.40)$$

$$du - \frac{1}{\rho c} dp = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_-: \quad \frac{dx}{dt} = u - c, \quad (1.41)$$

$$dS = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_0: \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (1.42)$$

В лагранжевых координатах уравнения характеристик приобретают вид (см. (1.18))

$$C_+: \quad \frac{da}{dt} = c \frac{\rho}{\rho_0}, \quad C_-: \quad \frac{da}{dt} = -c \frac{\rho}{\rho_0}, \quad C_0: \quad \frac{da}{dt} = 0.$$

Уравнения вдоль характеристик не отличаются от уравнений (1.40)–(1.42).

В сферически-симметричном течении уравнения характеристик в эйлеровых координатах таковы же, как и в плоском случае (только координату x следует заменить на радиус r). Уравнения же вдоль характеристик $C_{\pm}$ содержат дополнительные члены, зависящие от самих функций, но не от их производных

$$du \pm \frac{1}{\rho c} dp = \mp \frac{2uc}{r} dt \quad \text{вдоль} \quad C_{\pm}: \quad \frac{dr}{dt} = u \pm c.$$

В ряде случаев уравнения газодинамики, записанные в характеристической форме, для численного интегрирования удобнее, чем обычные.

§ 6. Плоское изэнтропическое течение. Инварианты Римана

В изэнтропическом течении энтропия, будучи постоянной в пространстве и во времени, вообще выпадает из уравнений. Все течение описывается двумя функциями: скоростью $u(x, t)$ и какой-нибудь одной из термодинамических переменных: $\rho(x, t)$, $p(x, t)$ или $c(x, t)$. Последние однозначно связаны между собою в каждой точке чисто термодинамическими соотношениями: $\rho = \rho(p)$, $c = c(\rho)$ или $p = p(\rho)$, $c = c(\rho)$; $c^2 = dp/d\rho$.

Дифференциальные выражения $du + dp/\rho$ и $du - dp/\rho$ с теперь представляют собой полные дифференциалы величин

$$\left. \begin{aligned} J_+ &= u + \int \frac{dp}{\rho c} = u + \int c \frac{d\rho}{\rho}, \\ J_- &= u - \int \frac{dp}{\rho c} = u - \int c \frac{d\rho}{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

которые называются инвариантами Римана^{*)}. С помощью термодинамических соотношений интегральные величины $\int dp/\rho$ и $\int c d\rho/\rho$ в принципе можно выразить через одну из термодинамических переменных, скажем, скорость звука c . Например, в идеальном газе с постоянной теплоемкостью

$$p = \text{const } \rho^\gamma, \quad c^2 = \gamma \text{const } \rho^{\gamma-1}$$

и

$$J_{\pm} = u \pm \frac{2}{\gamma-1} c. \quad (1.44)$$

^{*)} При неизэнтропическом течении ρ и c зависят от двух переменных: p и S , и выражения $du \pm dp/\rho$ уже не являются полными дифференциалами. Комбинации (1.43) в этом случае не имеют определенного смысла.

Инварианты Римана определяются с точностью до произвольной постоянной, которую в тех случаях, когда это удобно, можно вообще опустить, как это сделано в формуле (1.44).

Уравнения (1.40), (1.41) свидетельствуют о том, что в изэнтропическом течении инварианты Римана постоянны вдоль характеристик

$$\left. \begin{aligned} dJ_+ = 0, \quad J_+ = \text{const} \text{ вдоль } C_+: \quad \frac{dx}{dt} = u + c; \\ dJ_- = 0, \quad J_- = \text{const} \text{ вдоль } C_-: \quad \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Это положение можно рассматривать как обобщение соотношений, справедливых для случая распространения акустических волн по газу с постоянными скоростью, плотностью и давлением. Последние получаются из общих уравнений в качестве первого приближения. Если положить $u = u_0 + \Delta u$, $p = p_0 + \Delta p$, то в первом приближении

$$J_{\pm} = u_0 + \Delta u \pm \int \frac{d\Delta p}{\rho_0 c_0} = \Delta u \pm \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} + \text{const}. \quad (1.46)$$

Уравнения характеристик в первом приближении записываются в виде

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \pm c_0, \quad x = (u_0 \pm c_0)t + \text{const}.$$

Таким образом, вдоль пути $x = (u_0 + c_0)t + \text{const}$ сохраняется величина $\Delta u + \Delta p / \rho_0 c_0$, откуда видно, что она может быть представлена в виде функции от константы в уравнении $x = (u_0 + c_0)t + \text{const}$:

$$\Delta u + \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} = 2f_1 [x - (u_0 + c_0)t].$$

Вдоль пути $x = (u_0 - c_0)t + \text{const}$ сохраняется величина

$$\Delta u - \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} = -2f_2 [x - (u_0 - c_0)t].$$

Изменения скорости и давления представляются в виде суперпозиции двух волн f_1 и f_2 , бегущих в противоположных направлениях: $\Delta u = f_1 - f_2$, $\Delta p = \rho_0 c_0 (f_1 + f_2)$, причем в каждой из них величины связаны между собой уже известными нам соотношениями:

$$\Delta_1 u = \frac{\Delta_1 p}{\rho_0 c_0} = f_1, \quad \Delta_2 u = -\frac{\Delta_2 p}{\rho_0 c_0} = -f_2.$$

Инварианты Римана J_+ и J_- можно рассматривать как новые функции, описывающие движение газа, взамен старых переменных: скорости газа u и одной из термодинамических величин, например, скорости звука c . Они однозначно связаны с переменными u и c уравнениями (1.43). Разрешая эти уравнения относительно u и c , можно вернуться от функций J_+ , J_- к функциям u и c , например, для идеального газа с постоянной теплоемкостью по формулам (1.44)

$$u = \frac{J_+ + J_-}{2}; \quad c = \frac{\gamma - 1}{4} (J_+ - J_-).$$

Рассматривая инварианты как функции независимых переменных x и t , уравнения характеристик можно записать в форме

$$C_+: \quad \frac{dx}{dt} = F_+(J_+, J_-); \quad C_-: \quad \frac{dx}{dt} = F_-(J_+, J_-), \quad (1.47)$$

где F_+ и F_- — известные функции, вид которых определяется только термодинамическими свойствами вещества. В идеальном газе с постоянной теплоемкостью

$$F_+ = \frac{\gamma+1}{4} J_+ + \frac{3-\gamma}{4} J_-; \quad F_- = \frac{3-\gamma}{4} J_+ + \frac{\gamma+1}{4} J_-.$$

Как видно из уравнений (1.45), характеристики обладают свойством переносить постоянные значения одного из инвариантов. Поскольку вдоль определенной C_+ -характеристики $J_+ = \text{const}$, изменение наклона характеристики определяется изменением только одной величины — инварианта J_- . Точно так же вдоль C_- -характеристики постоянно J_- и изменение наклона при переходе от одной точки плоскости x, t к другой определяется изменением инварианта J_+ .

Уравнения, записанные в характеристической форме, делают весьма наглядной причинную связь явлений в газовой динамике. Рассмотрим какое-нибудь плоское изэнтропическое течение газа в бесконечном пространстве. Пусть в начальный момент $t=0$ заданы распределения газодинамических величин по координате x : $u(x, 0)$, $c(x, 0)$, или же, что эквивалентно, заданы распределения инвариантов $J_+(x, 0)$, $J_-(x, 0)$. На плоскости x, t (рис. 1.9) существует сетка C_+ - и C_- -характеристик, выходящих из различных точек оси x *). Значения газодинамических величин в какой-нибудь точке $D(x, t)$ (в координатной точке x в момент времени t) определяются только значениями величин в начальных точках $A(x_1, 0)$ и $B(x_2, 0)$:

$$J_+(x, t) = J_+(x_1, 0); \quad J_-(x, t) = J_-(x_2, 0).$$

Например, для идеального газа с постоянной теплоемкостью, разрешив эти уравнения относительно u и c , можно записать физические переменные в точке D в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{c_1 - c_2}{2}, \\ c(x, t) &= \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1 - u_2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

где u_1, c_1 — значения в точке $A(x_1, 0)$, а u_2, c_2 — значения в точке $B(x_2, 0)$.

Нельзя, конечно, утверждать, что состояние газа в точке D зависит от задания начальных условий только в двух начальных точках A и B , так как само положение точки D , как места, где пересекаются C_+ - и C_- -характеристики, выходящие из точек A и B , зависит от пути этих характеристик. Эти пути определяются заданием начальных условий на всем отрезке AB оси x . Например, наклон C_+ -характеристики AD в промежуточной точке N (см. рис. 1.9) определяется не только инвариантом $J_+(A)$, но и значением инварианта $J_-(M)$, перенесенного в N из промежуточной точки M отрезка AB .

Но состояние газа в D полностью определяется заданием начальных условий на отрезке AB оси x и совершенно не зависит от начальных значений

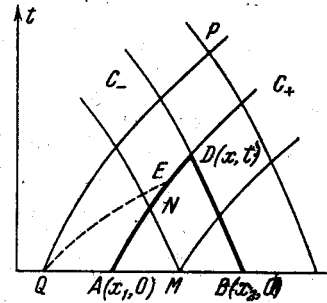


Рис. 1.9. x, t -диаграмма, иллюстрирующая область зависимости.

*) Построить эту сетку можно после того как найдено решение задачи.

величин вне этого отрезка. Если, скажем, немного изменить начальные значения в точке Q , то это никак не скажется на состоянии газа в D просто потому, что возмущение от этого изменения не успеет добежать в координатную точку x к моменту t . Оно придет в эту координатную точку позднее (в точку P вдоль C_+ -характеристики OP).

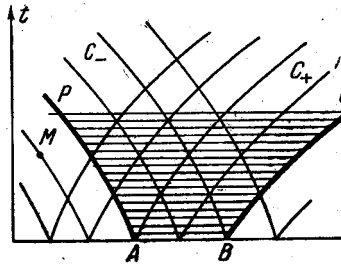


Рис. 1.10. x, t -диаграмма, иллюстрирующая область влияния.

Аналогично, начальное состояние газа на отрезке AB оси x влияет на состояние газа в последующие моменты времени только в тех точках, которые расположены внутри области, ограниченной C_- -характеристикой AP и C_+ -характеристикой BQ (рис. 1.10). Оно не влияет на состояние в M , так как «сигналы» от начальных условий на отрезке AB не успеют добежать до координатной точки x_M моменту t_M .

Подчеркнем, что изложенные соображения о причинной связи явлений имеют силу лишь при условии, что характеристики одного семейства не пересекаются друг с другом. Например, если бы C_+ -характеристика из Q (см. рис. 1.9) пошла по пунктирному пути QE , то состояние газа в Q повлияло бы на состояние в D . Но в области непрерывного течения характеристики, принадлежащие одному семейству, действительно никогда не пересекаются. Пересечение привело бы к неоднозначности газодинамических величин. В самом деле, в точке x, t пересечения двух C_+ -характеристик инварианты J_+ имели бы два различных значения, соответствующих той и другой характеристике. Между тем каждой точке плоскости x, t принадлежит только по одному значению J_+ и J_- , которые связаны с единственными значениями скорости газа и скорости звука в этой точке. Как мы увидим ниже, пересечение характеристик одного семейства приводит к нарушению непрерывности течения и возникновению разрывов газодинамических величин, т. е. ударных волн.

Провести линии характеристик на всей плоскости x, t можно, только зная решение газодинамической задачи. Если решение неизвестно, то нельзя указать точно положение точки D на рис. 1.9, в которой пересекаются характеристики, выходящие из A и B .

Однако приближенно найти место пересечения можно, заменяя истинные криволинейные пути AD и BD прямыми линиями, наклоны которых отвечают начальным значениям u_1, c_1 и u_2, c_2 в точках A и B (или $J_+(A), J_-(B)$) (рис. 1.11). Выбрав точки A и B достаточно близко друг от друга так, чтобы ошибка от замены истинных путей характеристик прямыми линиями была небольшой, находим положение точки пересечения из уравнений

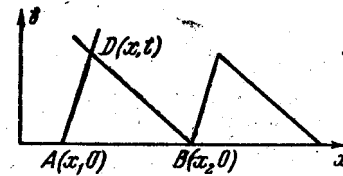


Рис. 1.11. Выпрямление характеристик на малых участках.

$$x - x_1 = (u_1 + c_1)t, \quad x - x_2 = (u_2 - c_2)t.$$

Значения u и c в месте пересечения определяются формулами (1.48). Такая операция, в сущности, представляет собой простейшую схему численного интегрирования уравнений (1.45). Покрывая плоскость x, t сеткой треугольников, аналогичных ADB , можно последовательно, шаг за шагом, продвигать решение уравнений вперед по времени, исходя из начальных условий $u(x, 0)$, $c(x, 0)$ или $J_+(x, 0)$, $J_-(x, 0)$.

§ 7. Плоское изэнтропическое течение газа в ограниченном пространстве

Рассмотрим какое-нибудь плоское изэнтропическое течение газа в ограниченном пространстве. Пусть газ занимает пространство между двумя плоскими поверхностями — поршнями, которые движутся по заданным законам $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t)$, причем в начальный момент $t=0$ координаты поршней равны x_{10} и x_{20} . В начальный момент задаются распределения скорости u и термодинамической переменной c по координате x на отрезке $x_{10} < x < x_{20}$: $u(x, 0)$, $c(x, 0)$ или же, что эквивалентно, задаются распределения инвариантов $J_+(x, 0)$, $J_-(x, 0)$.

Проведем на плоскости x, t сетку характеристик и линии поршней (рис. 1.12). Точки типа F , через которые проходят C_+ - и C_- -характеристики, выходящие из точек, лежащих внутри отрезка O_1O_2 оси x , ничем не отличаются от точек при движении газа в неограниченном пространстве. Как и там, в эти точки переносятся начальные значения инвариантов J_+ и J_- .

Рассмотрим точку, лежащую на линии поршня, для определенности, точку D у левого поршня.

В точку D из «прошлого» переносится только один инвариант J_- , он переносится вдоль C_+ -характеристики, выходящей из точки A начального отрезка O_1O_2 так, что $J_-(D) = J_-(A)$. Вторым инвариант J_+ не приносится в D , так как в D не приходит C_+ -характеристика (из «прошлого»). C_+ -характеристика только выходит из D (в «будущее»), унося с собою «образовавшееся» в этой точке значение инварианта J_+ . Состояние газа в точке D определяется значением привнесенного инварианта J_- и второй величиной — скоростью u , которая в силу граничного условия совпадает с известной скоростью поршня в точке D : $u_1(D)$. Эта пара величин $J_-(D) = J_-(A)$ и $u = u_1(D)$ и заменяет теперь пару величин J_+ , J_- , приходящих в точки газа, не соприкасающиеся с поршнями. Вторым инвариант J_+ составляется из величин $J_-(D)$ и $u_1(D)$: $J_+(D) = 2u_1(D) - J_-(D)$ и уносится C_+ -характеристикой. Например, в точку E приходит C_- -характеристика, выходящая из точки B начального отрезка оси x и несущая инвариант $J_-(B)$: $J_-(E) = J_-(B)$. C_+ -характеристика приходит с линии поршня, из D и приносит инвариант J_+ , равный $J_+(D)$: $J_+(E) = J_+(D)$. Состояние газа в E зависит от J_-

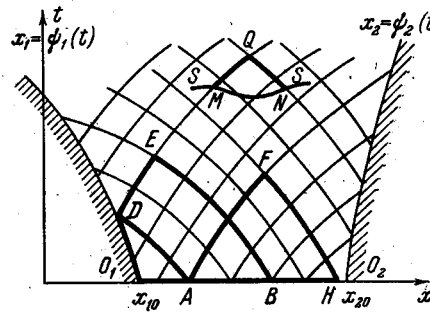


Рис. 1.12. Схема характеристик для плоского изэнтропического течения газа между двумя поршнями.

(B), $u_1(D)$ и $J_-(A)$, т. е. от условий в точках A , B , D . Положение точки E зависит от условий на отрезках O_1D , O_1B .

Таким образом, при течении в ограниченном пространстве состояние газа в какой-то точке может зависеть не только от начальных, но и от граничных условий.

Вообще состояние в произвольной точке плоскости x, t определяется заданием значений u и c или J_+ , J_- на отрезке произвольной кривой, отсекаемом C_+ и C_- -характеристиками, проходящими через рассматриваемую точку. Например, состояние в Q определяется состоянием на отрезке MN кривой SS (см. рис. 1.12).

Аналогично предыдущему, на правый поршень из «прошлого» вдоль C_+ -характеристик переносятся инварианты J_+ , а C_- -характеристики сами начинаются из точек линии поршня и уносят в «будущее» инварианты J_- , которые составляют из приведенных инвариантов J_+ и значений скорости поршня u_2 , с которыми совпадают скорости прилегающего к поршню слоя газа.

Давление на поршне однозначно определяется приведенным одним инвариантом и скоростью поршня. Рассмотрим для примера точку D на левом поршне. Пусть газ — идеальный с постоянной теплоемкостью. Обозначим через u_A , c_A начальные скорости газа и звука в точке A , а через u_{1D} — скорость поршня в точке D . Имеем для скоростей газа и звука в D

$$u_D = u_{1D}, \quad J_- = u_D - \frac{2}{\gamma-1} c_D = u_A - \frac{2}{\gamma-1} c_A,$$

откуда

$$c_D = c_A + (u_{1D} - u_A) \frac{\gamma-1}{2}$$

или через инвариант

$$c_D = [u_{1D} - J_-(A)] \frac{\gamma-1}{2}.$$

Давление на поршне p_D связано со скоростью звука c_D чисто термодинамически, $p_D = \text{const } c_D^{2\gamma/(\gamma-1)}$.

Изложенные соображения позволяют придать наглядный физический смысл инвариантам Римана.

Поставим такой эксперимент. Внесём в определенный момент t в точку x параллельную поверхности поршня плоскую пластинку. Пусть на одной, левой, стороне пластинки имеется индикатор давления, реагирующий на давление газа слева от пластинки.

К моменту t в x слева на индикатор приносится инвариант $J_+ = u + \int dp/\rho c = u + w(p)$, где u и p — скорость и давление невозмущенного пластинкой газа ($w(p)$ — функция давления, зависящая только от термодинамических свойств газа и его энтропии). В момент t газ тормозится около пластинки и останавливается, поскольку пластинка покоится. Новое давление слева от пластинки, соответствующее остановившемуся газу ($u = 0$), обозначим через p_1 . Тогда $J_+ = u + w(p) = w(p_1)$. Индикатор регистрирует давление отражения — p_1 . Поскольку функция w известна, шкалу индикатора можно проградуировать так, чтобы показание индикатора давало непосредственно величину инварианта J_+ .

Аналогично, индикатор давления, помещенный на правой стороне пластинки, измерит инвариант J_- , проходящий справа.

Если расположить очень тонкую пластинку перпендикулярно к поверхностям поршня, параллельно скорости течения так, чтобы газ свободно обтекал пластинку, не меняя своей скорости, индикатор зарегистрирует давление невозмущенного потока p . Будучи проградуированным так, чтобы давать непосредственно величину $w(p)$, индикатор измерит комбинацию инвариантов

$$w(p) = \frac{1}{2} (J_+ - J_-).$$

§ 8. Простые волны

Из формулы (1.46) для инвариантов Римана, относящейся к случаю распространения по газу малых возмущений — акустических волн, видно, что если волна распространяется только в одну сторону, то один из инвариантов постоянен в пространстве и во времени. Так, если волна бежит направо и $\Delta u(x, t) = \Delta p(x, t)/\rho_0 c_0 = f_1[x - (u_0 + c_0)t]$, то постоянен инвариант J_- :

$$J_- = \Delta u - \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} + \text{const} = \text{const}.$$

Если же волна бежит налево, то постоянен инвариант J_+ .

Покажем, что возможность существования волн, бегущих в одну сторону, не ограничивается предположением о малости амплитуды, причем и в общем случае бегущей волны остается постоянным один из инвариантов Римана. Прежде всего укажем, как можно практически осуществить постоянство одного из инвариантов, например J_- . Если газ занимает безграничное пространство, то для этого достаточно задать начальные распределения $u(x, 0)$, $c(x, 0)$ таким образом, чтобы в начальный момент было $J_-(x, 0) = \text{const}$. Поскольку это постоянное значение J_- переносится вдоль C_- -характеристик, выходящих из всех точек оси x , то и в последующие моменты времени инвариант J_- останется постоянным: $J_-(x, t) = \text{const}$.

Пусть газ занимает полупространство, ограниченное слева поршнем, движущимся по закону $x_1 = \psi_1(t)$. Если в начальный момент $J_-(x, 0) = \text{const}$ во всей области, занимаемой газом, $x > x_{10}$ (x_{10} — начальная координата поршня), то в последующие моменты J_- также останется постоянным во всем пространстве, ограниченном поршнем $x > x_1 = \psi_1(t)$. Действительно, левый поршень, как было показано в предыдущем параграфе, «возбуждает» только C_+ -характеристики; C_- -характеристики приходят к линии поршня из «прошлого» и на этом «заканчивают свое существование», так что поршень посылает в «будущее» только J_+ -инварианты, но не J_- .

Значения J_- -инвариантов во всей той части плоскости x, t , которая соответствует газу (эта часть ограничивается линией поршня $x_1 = \psi(t)$), определяются начальными значениями J_- на оси x , т. е. постоянны.

Наоборот, если газ занимает полупространство, ограниченное справа движущимся поршнем (линия поршня $x_2 = \psi_2(t)$, $x_{20} = \psi_2(0)$), и в начальный момент $J_+(x, 0) = \text{const}$ при $x < x_{20}$, то во всей физической части плоскости x, t ($x < x_2 = \psi_2(t)$) постоянен инвариант J_+ .

Итак, вернемся к поставленной задаче и предположим для определенности, что $J_-(x, t) = \text{const}$.

Из уравнения характеристик, записанного в форме (1.47), следует, что при этом C_+ -характеристики представляют собой семейство прямых линий ($F_+ = \text{const}$, так как $J_+ = \text{const}$ вдоль характеристики, а $J_- = \text{const}$ вообще). уравнения для C_+ -характеристик, можем записать

$$x = F_+(J_+, J_-)t + \varphi(J_+), \quad (1.49)$$

где $(\varphi(J_+))$ — постоянная интегрирования, которую можно рассматривать как функцию того значения J_+ , которое переносится вдоль характеристики. Она определяется начальными и граничными условиями задачи. Например, если данная характеристика выходит из начального отрезка оси x , то φ есть координата той точки оси x , из которой выходит характеристика и на которой задано значение J_+ , стоящее в качестве аргумента в φ .

Формула (1.49) совместно с условием, наложенным на одну из искоемых функций,

$$J_-(x, t) = \text{const}, \quad (1.50)$$

представляет собой общее решение уравнений газодинамики для рассматриваемого случая. Она определяет в неявном виде другую искоемую функцию $J_+(x, t)$. (Напоминаем, что функция F_+ известна, поскольку известны термодинамические свойства вещества.)

Решение (1.49), (1.50) можно записать в виде формул для обычных газодинамических переменных: скорости газа и скорости звука. Из уравнения (1.50)

$$J_- = u - \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const}$$

следует, что скорость звука или какая-нибудь иная термодинамическая переменная, скажем, давление, являются функциями скорости u , не содержащими в явном виде независимых переменных x и t : $c = c(u)$, $p = p(u)$.

Уравнение (1.49) эквивалентно уравнению

$$x = [u + c(u)]t + \varphi(u), \quad (1.51)$$

где постоянная интегрирования φ выражена как функция u . Это уравнение определяет в неявном виде u в зависимости от x и t .

Из формулы (1.51) видно, что данные значения u и $c(u)$ переносятся по газу вдоль оси x с постоянной скоростью $u + c(u)$. Другими словами, решение представляет собой волну, бегущую направо:

$$u = f\{x - [u + c(u)]t\}, \quad c = g\{x - [u + c(u)]t\},$$

причем вид функций f и g определяется начальными и граничными условиями задачи.

Однако, в отличие от бегущей волны малой амплитуды, различные значения скорости газа и термодинамических переменных переносятся с разными скоростями, так что начальные профили $u(x, 0)$, $c(x, 0)$ искажаются с течением времени. Это является следствием нелинейности уравнений газодинамики.

Полученное решение в виде бегущей волны называется простой волной.

Аналогичным путем можно получить простую волну, бегущую в другую сторону. В ней постоянен инвариант J_+ и прямыми являются C_- -характеристики. Общее решение в этом случае имеет вид

$$J_+ = \text{const}, \quad x = F_-(J_+, J_-)t + \varphi_1(J_-)$$

или

$$J_+ = u + \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const}, \quad x = [u - c(u)]t + \varphi_1(u),$$

$$u = f_1\{x + [c(u) - u]t\}, \quad c = g_1\{x + [c(u) - u]t\}.$$

Заметим, что решение для простой волны является особым интегралом уравнений одномерного изэнтропического течения. Можно найти и общий интеграл этих уравнений для произвольного течения (см. [1]). Особое решение не содержится непосредственно в общем.

§ 9. Искажение профилей в бегущей волне конечной амплитуды. Некоторые свойства простых волн

Воспользуемся полученным решением для простой волны и выясним, что происходит с волной типа акустической, если не ограничиваться первым приближением, как это было сделано в § 3, а исходить из точных уравнений газодинамики. Мы не будем приводить здесь аналитического решения, а выясним качественный характер явлений при помощи графического построения. Газ будем считать идеальным с постоянной теплоемкостью.

Пусть начальные профили скорости $u(x, 0)$ и скорости звука $c(x, 0)$ имеют вид, изображенный на рис. 1.13, причем эти функции связаны между собой таким образом, что $J_-(x, 0) = \text{const}$ (рассматриваем волну, бегущую направо). По формуле (1.44) имеем

$$c = \frac{\gamma - 1}{2} u + c_0, \quad \text{где} \quad \text{постоянное значение}$$

инварианта J_- выбрано в соответствии с условием, что в невозмущенном газе $u = 0$, $c = c_0$. Поскольку $p \sim c^{2\gamma/(\gamma-1)}$, $\rho \sim c^{\gamma/(\gamma-1)}$ (при $c = c_0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$), профили давления и плотности в качественном отношении вполне аналогичны профилю скорости звука.

Будучи постоянным в начальный момент, инвариант $J_-(x, t)$ постоянен и во все последующие моменты времени, так что движение представляет собой простую волну, бегущую направо. Характеристики C_+ -семейства представляют собой прямые линии $dx/dt = u + c = (\gamma + 1)u/2 + c_0$. Они изображены на рис. 1.13. Из точек A_0 , B_0 и D_0 , где $u = 0$, они выходят параллельно друг другу: $dx/dt = c_0$ (и параллельно C_+ -характеристикам, выходящим из точек оси x , соответствующей невозмущенной области газа). Для того чтобы не усложнять рис. 1.13, проведем, кроме того, еще только две C_+ -характеристики, из точек E_0 и F_0 , соответствующих минимумам и максимумам начальных распределений $u(x, 0)$ и $c(x, 0)$.

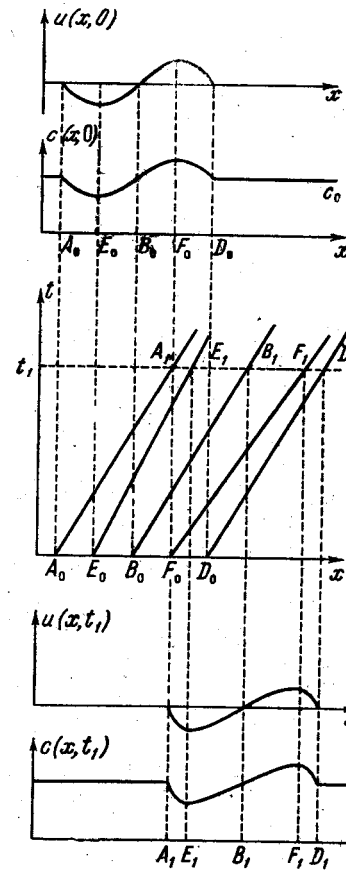


Рис. 1.13. Распространение вправо бегущей волны. Построение, позволяющее определить искажение профилей в волне. Наверху — профили скорости и скорости звука в начальный момент. Внизу — искаженные профили в момент t_1 . В середине — схема C_+ -характеристик.

Построим профили u и c момент t_1 : $u(x, t_1)$, $c(x, t_1)$. Поскольку вдоль C_+ -характеристик переносятся постоянные значения u и c , величины u и c в точках A_1 , E_1 и т.д. равны соответствующим величинам в точках A_0 , E_0 и т.д.

Выполняя построение, как показано на рис. 1.13, найдем профили u и c в момент t_1 . Мы видим, что «голова» (D) и «хвост» (A) волны, соприкасающиеся с областями постоянного течения, где $u = 0$, а $c = c_0$, сместились вдоль оси x на отрезки, равные $c_0 t_1$ (распространялись по характеристикам $D_0 D_1$, $A_0 A_1$ на плоскости x, t). Высоты максимумов и минимумов u и c не изменились, но относительные положения максимумов и минимумов стали иными: профили исказились.

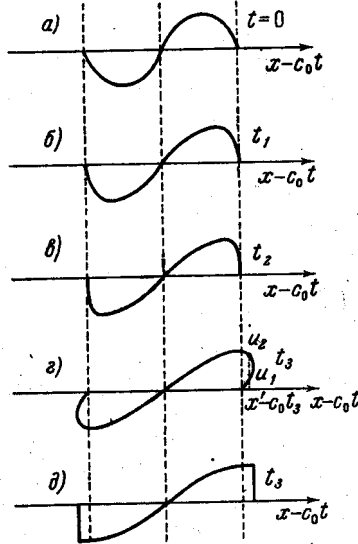


Рис. 1.14. Схема, иллюстрирующая нарастание крутизны и «перехлест» волны конечной амплитуды в нелинейной теории. Показаны профили скорости в последовательные моменты времени. Чтобы совместить волны в различные моменты времени, по оси абсцисс отложена комбинация $x - c_0 t$. Профиль г) отвечает физически нереальному состоянию. На самом деле в момент t_3 профиль имеет вид д) с разрывами.

и u_2 . Возникновение такой неоднозначности математически связано с пересечением характеристик одного семейства (C_+), тенденцию к которому можно усмотреть на рис. 1.13. На самом деле «перехлестывания», конечно, не происходит, а когда передняя и задняя части профилей становятся очень крутыми, образуются разрывы — ударные волны, как показано на рис. 1.14, д) (об этом речь пойдет ниже).

Таким образом, решение в виде простой волны в данном случае справедливо лишь в течение ограниченного времени, до момента образования разрывов. Решение никогда не теряет силы только в том случае, когда волна повсюду имеет характер волны разрежения, т. е. не содержит участков, где скорость газа, давление и плотность уменьшаются в направлении распространения волны. Такие участки (AE и FD) на рис. 1.13 представляют собой волны сжатия.

В акустической теории, где уравнения газодинамики линеаризуются, такого искажения не происходит: профили сдвигаются в виде застывшей картины. Искажение профилей есть следствие нелинейности уравнений газовой динамики. Физическая причина искажения состоит в том, что гребни волны бегут относительно скорее как за счет большей скорости распространения их по веществу (большей скорости звука), так и за счет более быстрого сноса вперед вместе с веществом (большей скорости газа). Наоборот, впадины бегут относительно медленнее, так как обе скорости в них меньше.

С течением времени профили искажаются все сильнее и сильнее, как показано на рис. 1.14. Если формально продолжить аналитическое решение на достаточно большие времена, то произойдет «перехлестывание» волны, показанное на рис. 1.14, г. Эта, последняя, картина физически бессмысленна, так как в ней решение неоднозначно. Например, в точке $x = x'$ в один и тот же момент времени имеются три значения скорости u : $u = 0$, u_1

Простая волна разрежения будет рассмотрена в следующем параграфе. Отметим одно важное свойство простой волны, которое иллюстрируется рассмотренным примером. Голова простой волны всегда распространяется по характеристике (в нашем примере по характеристике D_0D_1). На переднем краю простой волны, в точке D , сами величины u и c непрерывны, во их производные по координате x терпят разрыв (это видно из рис. 1.13, где профили u и c испытывают излом). Такой разрыв, в котором величины непрерывны, но разрывны их производные, называется слабым. Слабый разрыв можно представить себе как малое возмущение по отношению к непрерывному ходу газодинамических величин. Это показано на рис. 1.15, на котором изображены два профиля, один сглаженный, а другой — с разрывом производной. Заштрихованный участок можно рассматривать как малое возмущение.

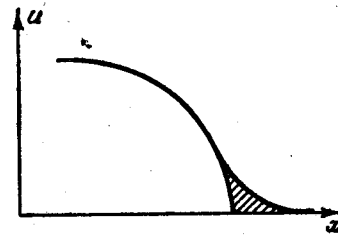


Рис. 1.15. К вопросу о слабом разрыве.

Но мы знаем, что малые возмущения распространяются по веществу со скоростью звука. Поэтому слабые разрывы всегда распространяются по характеристикам.

Если изэнтропическое течение граничит с областью постоянного течения, то это течение обязательно является простой волной, и наоборот, с областью постоянного течения может граничить только простая волна.

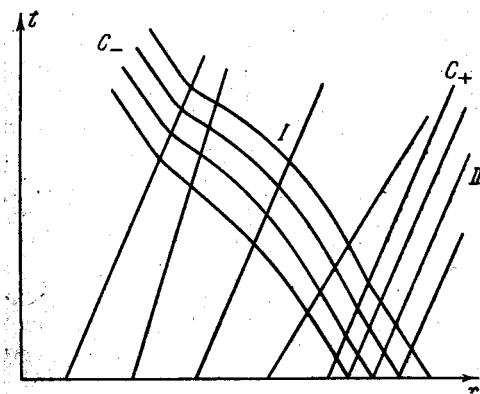


Рис. 1.16. Схема двух семейств характеристик для волны, изображенной на рис. 1.13.

Если изэнтропическое течение граничит с областью постоянного течения, то это течение обязательно является простой волной, и наоборот, с областью постоянного течения может граничить только простая волна. Действительно, в области постоянного течения C_+ - и C_- -характеристики представляют собой семейства параллельных прямых и инварианты $J_+(x, t)$ и $J_-(x, t)$ постоянны. Границей соприкосновения области какого-то изэнтропического течения I с областью постоянного течения II (рис. 1.16) служит одна из характеристик, скажем, C_+ -характеристика. Тогда C_- -характеристики, продолжаясь из области II в область I , переносят постоянное значение J_- , так что и в области I $J_-(x, t) = \text{const}$. Следовательно,

эта область есть простая волна, бегущая направо. На рис. 1.16 проведены характеристики для случая импульса протяженностью в одну «длину волны», рассмотренного выше в качестве примера.

§ 10. Волна разрежения

Рассмотрим движение газа под действием выдвигающегося поршня. Пусть вначале покоящийся газ с постоянными плотностью, давлением и скоростью звука ρ_0, p_0, c_0 занимает полупространство $x > 0$, слева ограниченное неподвижным поршнем, начальная координата которого есть $x = 0$.

В момент $t = 0$ поршень начинает двигаться влево, постепенно ускоряясь от нулевой скорости до некоторой постоянной, которую обозначим через $-U$. Закон движения поршня есть $x = X(t)$. Когда скорость поршня становится постоянной, линия $X(t)$ превращается в прямую $X(t) = -Ut + \text{const}$.

Как было показано в предыдущем параграфе, движение газа при $t > 0$ представляет собой простую волну, бегущую направо. Голова волны, т. е.

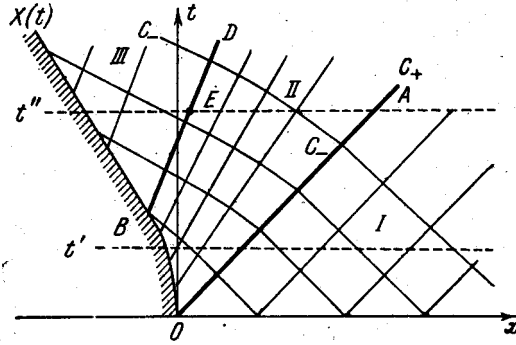


Рис. 1.17. x, t -диаграмма со схемой характеристик для волны разрежения, возникающей под действием поршня, который выдвигается из газа, сначала ускоряясь, а потом с постоянной скоростью.

начальное возмущение от поршня, распространяется вправо со скоростью звука вдоль C_+ -характеристики OA ; $x = c_0 t$ (рис. 1.17). Проведем на этом рисунке линию движения поршня $X(t)$ и характеристики C_+ - и C_- -семейств. В области I между осью x и C_+ -характеристикой OA газ не возмущен: характеристики в этой области представляют собой прямые линии с наклонами $(dx/dt)_+ = c_0$; $(dx/dt)_- = -c_0$. Пересекая прямую OA , C_- -характеристики продолжают до линии поршня и на ней заканчивают свое существование. Для наглядности рассуждений будем считать газ идеальным с постоянной теплоемкостью, однако подчеркнем, что в качественном отношении вся картина движения остается в силе и для газа с другими термодинамическими свойствами. J_- -инвариант постоянен во всей физической части плоскости x, t и равен

$$J_- = u - \frac{2}{\gamma - 1} c = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0.$$

Отсюда

$$u = -\frac{2}{\gamma - 1} (c_0 - c), \quad c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u.$$

На границе с поршнем скорость газа совпадает со скоростью поршня $w(t)$, которая отрицательна. Поэтому скорость звука, а также давление и плотность газа у поршня меньше начальных, притом тем меньше, чем скорее движется поршень, C_+ -характеристики, которые являются прямыми линиями, выходят с линии поршня, имея наклоны

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_+ = u + c = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} |w|.$$

Поскольку поршень только ускоряется, но не замедляется, C_+ -характеристики, начинающиеся на линии поршня, только расходятся, но нигде не сходятся, как показано на рис. 1.17. C_+ -характеристики, выходящие с того участка линии поршня, на котором скорость поршня уже постоянна, имеют одинаковые наклоны $(dx/dt)_+ = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} U$ и идут параллельно друг другу.

Пусть, например, скорость поршня становится строго постоянной и равной $w = -U$ ($U > 0$), начиная с момента t_1 (точка B на линии поршня). В области III на плоскости x, t , заключенной между линией поршня и C_+ -

характеристикой OA , газ не возмущен: характеристики в этой области представляют собой прямые линии с наклонами $(dx/dt)_+ = c_0$; $(dx/dt)_- = -c_0$. Пересекая прямую OA , C_- -характеристики продолжают до линии поршня и на ней заканчивают свое существование.

характеристикой BD , все газодинамические величины постоянны: $u = -U$, $c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2} U = c_1$ *). В самом деле, в этой области $J_- = \text{const}$ в силу общего постоянства, а $J_+ = \text{const}$, поскольку скорость газа на линии поршня, с которой выходят все C_+ -характеристики, одинакова:

$$J_+ = u + \frac{2}{\gamma-1} c = \frac{2}{\gamma-1} c_0 + 2u_1 = \frac{2}{\gamma-1} c_0 - 2U.$$

В области II , заключенной между C_+ -характеристиками OA и BD и участком OB линии поршня, газодинамические величины зависят от x и t в соответствии с решением для простой волны, C_+ -характеристики, выходящие с участка OB -линии поршня, во все более поздние моменты времени несут все меньшие значения скоростей звука и газа (все большие по абсолютной величине скорости газа). Поэтому распределение u и c по газу в какой-то определенный момент времени $t' < t_1$, соответствующий горизонтальной прямой $t = \text{const} = t'$ на плоскости x, t , имеет вид, изображенный на рис. 1.18, *а*.

Распределения плотности и давления в качественном отношении подобны распределению скорости звука.

Распределения газодинамических величин в более поздний момент $t'' > t_1$ (прямая $t = \text{const} = t''$ на плоскости x, t) показаны на рис. 1.18, *б*. В этом случае к поршню прилежит область постоянного течения $u = -U$, $c = c_1$. Координата точки разделяющей области постоянного и переменного течений III и II , X_E , соответствует точке E характеристики BD .

Задаваясь конкретным законом движения поршня, можно найти решение задачи в аналитическом виде. Положим для примера, что скорость поршня с течением времени роняется плавно по закону:

$$w = -U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad \tau > 0$$

и стремится к постоянной величине $-U$ асимптотически при $t \rightarrow \infty$. Линия движения поршня описывается уравнением

$$X(t) = \int_0^t w dt = -U\tau \left[\frac{t}{\tau} - (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right].$$

Она асимптотически переходит в прямую $X = -U(t - \tau)$.

Для нахождения искомого решения подчиним общее решение (1.51) граничному условию: $u = w(t)$ при $x = X(t)$. Это условие определяет произвольную функцию $\phi(u)$:

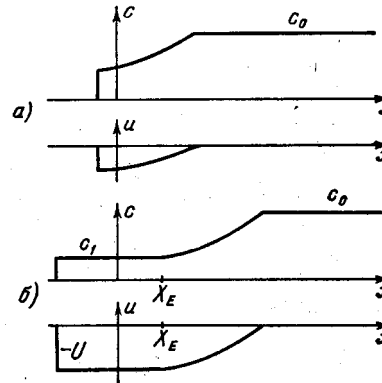


Рис. 1.18. Профили скорости звука и скорости в волне разрежения, возникающей под действием поршня (см. рис. 1.17):

а) до момента, когда скорость поршня стала постоянной, $t' < t_1$; б) после момента, когда скорость поршня стала постоянной, $t'' > t_1$.

*) Для справедливости этих формул необходимо, чтобы c_1 было положительной величиной, что накладывает ограничение на конечную скорость поршня: $U < [2/(\gamma-1)] c_0$. Случай, когда $U > [2/(\gamma-1)] c_0$, будет рассмотрен в § 11.

$$\varphi(w) = X(t) - [w + c(w)]t,$$

причем

$$c(w) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}w \quad \text{и} \quad w = \dot{w}(t).$$

Подставляя сюда $X(t)$ и выражая время через w с помощью закона движения поршня $t = -\tau \ln(1 + w/U)$ найдем вид функции φ :

$$\varphi(w) = -w\tau + \tau \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}w + U \right) \ln \left(1 + \frac{w}{U} \right).$$

Распределения скорости по координате в разные моменты времени даются неявной i функцией:

$$x = \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}u \right)t - u\tau + \tau \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}u + U \right) \ln \left(1 + \frac{u}{U} \right),$$

справедливой в интервале $X(t) < x < c_0 t$.

Предположим снова, что скорость поршня становится строго постоянной в определенный момент t_1 . Зададимся постоянным значением конечной

скорости поршня — U и предположим, что начальные ускорения поршня становятся все больше и больше и постоянная скорость достигается все быстрее и быстрее ($t_1 \rightarrow 0$). Участок OB линии поршня, где скорость поршня переменна, становится все меньше и меньше (см. рис. 1.17). Точки B и O , откуда выходят C_+ -характеристики BD и OA , между которыми заключена область переменного течения II , при этом сближаются. В пределе $t_1 = 0$, когда точки B и O совпадают, что соответствует мгновенному достижению поршнем постоянной скорости $w = -U$, обе характеристики BD и OA выходят из одной точки: из начала координат $x = 0, t = 0$ на плоскости x, t . Все C_+ -характеристики, заполняющие область переменного течения II , также выходят из начала O в виде веера. Таким образом, в предельном случае, когда поршень в момент $t = 0$ начинает двигаться с постоянной скоростью $w = -U$, картина на плоскости x, t приобретает вид изображенный на рис. 1.19.

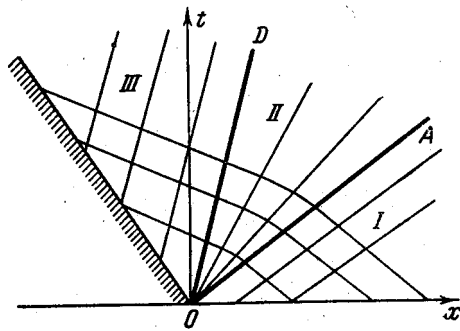


Рис. 1.19. x, t -диаграмма со схемой характеристик для центрированной волны разрежения.

Все характерные линии: линия «головы» волны разрежения OA , линия «хвоста» волны OD , за которым параметры газа принимают постоянные конечные значения, и линия поршня выходят из «центра» O . Из этого же «центра» выходят и все C_+ -характеристики, расположенные между C_+ -характеристиками OA и OD .

Такая волна называется центрированной простой волной. Поскольку все C_+ -характеристики в центрированной простой волне, т. е. в области переменного течения II , выходят из точки $x = 0, t = 0$, функция $\varphi(u)$ в решении (1.51), представляющем собой в то же время и уравнение этих характеристик, обращается в нуль. Решение для центрированной волны имеет вид

$$x = [u + \tau(u)]t. \quad (1.52)$$

Формально это решение можно получить и путем предельного перехода $\tau \rightarrow 0$ в примере, рассмотренном выше. Функция φ пропорциональна τ , так что при $\tau \rightarrow 0$ $\varphi(u) \rightarrow 0$.

Выпишем в явном виде решение для центрированной волны разрежения в случае идеального газа с постоянной теплоемкостью. Связь термодинамических переменных со скоростью газа u дается уже известной формулой, следующей из условия постоянства инварианта J_- :

$$c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2} |u|, \quad u < 0. \quad (1.53)$$

Поскольку $p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma$, $c^2 = \gamma p/\rho = c_0^2 (\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$,

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{|u|}{c_0} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (1.54)$$

$$p = p_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{|u|}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (1.55)$$

Чтобы получить зависимость этих величин от x и t , надо подставить сюда $|u|$, найденное из решения (1.52) и (1.53):

$$|u| = \frac{2}{\gamma+1} \left(c_0 - \frac{x}{t} \right). \quad (1.56)$$

Скорость газа в центрированной волне разрежения зависит от координаты x по линейному закону. Голова волны, где $u = 0$, движется вдоль линии $x = c_0 t$, хвост волны, где $u = w = -U$, движется вдоль линии:

$$x = (c_1 - U) t = \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} U \right) t.$$

Профили плотности и скорости показаны на рис. 1.20.

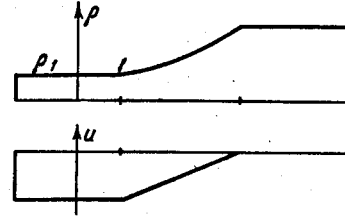


Рис. 1.20. Профили плотности и скорости в центрированной волне разрежения.

§ 11. Центрированная волна разрежения как пример автомодельного движения газа

Рассмотренное в предыдущем параграфе одномерное плоское движение газа, возникающее при выдвижении поршня с постоянной скоростью, обладает одной характерной особенностью. Все газодинамические величины, описывающие движение $u(x, t)$, $c(x, t)$, $\rho(x, t)$, $p(x, t)$, зависят от координаты и времени не порознь, а только в комбинации x/t . Для области II, где величины переменны, это видно непосредственно из формул (1.53) — (1.56). Что же касается областей постоянного течения I и III, то они ограничены в плоскости x, t прямыми линиями $x/t = c_0 = \text{const}$ (область I) и $x/t = w = \text{const}$, $x/t = w + c_1 = \text{const}$ (область III), которые также описываются уравнениями, содержащими x и t только в комбинации x/t . Иными словами, с течением времени распределения всех величин по координате x , изображенные на рис. 1.20, лишь растягиваются в пространстве, не меняя своей формы, т. е. оставаясь подобными самим себе. Если нарисовать распределения u, c, ρ, p , отложив по оси абсцисс не x , а отношение x/t (или одну из безразмерных величин $x/c_0 t$, $x/w t$), то мы получим застывшую картину, неизменяющуюся во времени. Такое движение, в котором профили газодинамических величин с течением времени остаются подобными самим себе, меняясь только за счет изменения масштабов величин (в данном случае масштаба длины $c_0 t$ или $w t$), называется самоподобным или автомодельным. В § 25 мы познакомимся с более сложным примером автомодельного движения, в ко-

тором меняются не только масштабы длины, но и масштабы самих газодинамических величин, причем автомодельная переменная ξ имеет более общий вид $\xi = xt^\alpha$, где $\alpha = \text{const}$. Рассмотренная выше центрированная волна разрежения представляет собой простейший случай автомодельного движения, в котором $\alpha = -1$, $\xi = x/t$, и масштабы газодинамических величин остаются неизменными: с течением времени профили их $u(x, t)$, $c(x, t)$ самоподобно растягиваются только по оси абсцисс, но не изменяются по оси ординат (масштабы u , c , ρ , p остаются неизменными).

Физическую причину автомодельного характера центрированной волны разрежения можно пояснить, воспользовавшись размерностными соображениями.

Если отвлечься от диссипативных процессов вязкости и теплопроводности, то уравнения газовой динамики, так же как и формулы, описывающие термодинамические свойства вещества, не содержат никаких характерных длин и времен. Единственные масштабы длины и времени у газа — это длина и время свободного пробега молекул, с которыми связаны коэффициенты вязкости и теплопроводности. Однако этими масштабами могут характеризоваться лишь микропроцессы, протекающие на расстояниях и за времена свободного пробега молекул, но не макроскопические движения. Вещество обладает размерным параметром — скоростью звука, которая входит наряду со скоростью вещества в описание газодинамических течений. Таким образом, если начальные и граничные условия задачи не содержат характерных длин и времен, движение может зависеть от координаты и времени, взятых только в комбинации x/t , имеющей размерность скорости. Именно такова рассматриваемая задача о волне разрежения, возникающей под действием поршня, выдвигающегося из газа с постоянной скоростью w . Начальные и граничные условия вносят только масштабы скорости: c_0 и w (и, конечно, масштабы плотности ρ_0 и давления p_0 , но ни масштабы длины или времени^{*)}).

Автомодельные движения имеют большое значение для газовой динамики. Поскольку в этом случае газодинамические величины не зависят от координат и времени в отдельности, но зависят только от их определенных комбинаций, — это уменьшает на единицу число независимых переменных в системе уравнений. В частности, при одномерных движениях вместо двух переменных x и t (или r и t в случае сферической или цилиндрической симметрии) появляется одна независимая переменная ($\xi = x/t$ в нашей задаче). Течение описывается уравнениями не в частных производных, а обыкновенными дифференциальными уравнениями, что в огромной степени упрощает задачу с математической точки зрения.

Ввиду принципиальной важности автомодельного течения, представляющего собой центрированную простую волну, мы еще раз найдем решение задачи о поршне, исходя из общих уравнений газодинамики и вос-

^{*)} Если скорость поршня не постоянна, а зависит от времени, то сразу появляются масштабы времени или длины. При этом задача о волне разрежения перестает быть автомодельной: математически это следует из формулы (1.51): если $\phi(u) \neq 0$, то ϕ и зависит от x и t в отдельности. Однако если скорость поршня с течением времени становится постоянной, как в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе, то истинное решение асимптотически стремится к автомодельному. При $t \gg \tau$ ($t/\tau \rightarrow \infty$) функцию $\phi(u) \sim \tau$ в решении можно опустить. Физически это соответствует тому, что при $t > \tau$ параметр τ становится малым по сравнению с характерным временем задачи t и роль его становится все менее и менее существенной. Подробнее об асимптотическом стремлении истинных, решений к автомодельным см. в гл. X и XII.

пользовавшись изложенными соображениями об уменьшении числа независимых переменных. Преобразуем эйлеровы уравнения газодинамики к новой независимой переменной $\xi = x/t$. Если $f(x, t)$ — некоторая функция x и t , зависящая только от комбинации этих величин $\xi = x/t$, то путем непосредственного вычисления получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{t} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{x}{t^2} \frac{df}{d\xi} = -\frac{\xi}{t} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u - \xi}{t} \frac{df}{d\xi}.\end{aligned}$$

Преобразуем с помощью этих формул уравнения непрерывности, движения и адиабатичности, записанные для плоского случая:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow (u - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} = -\rho \frac{du}{d\xi}, \\ \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow (u - \xi) \rho \frac{du}{d\xi} = -\frac{dp}{d\xi}, \\ \frac{dS}{dt} &= 0 \rightarrow (u - \xi) \frac{dS}{d\xi} = 0.\end{aligned}\quad (1.57)$$

Как и следовало ожидать, сами величины x и t исключались из уравнений. Написанные уравнения допускают прежде всего тривиальное решение $u = \text{const}$, $p = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$, соответствующее движению однородного газа как целого. Для получения нетривиального решения исключим из первой пары уравнений $du/d\xi$, и заметим, что третье уравнение дает $S = \text{const}$ ^{*)}, т. е. что автомодельное движение изэнтропично. Заменяя во втором из уравнений (1.57) производную от давления на производную от плотности, $dp/d\xi = (dp/d\rho)(d\rho/d\xi) = c^2 dp/d\xi$, (поскольку движение изэнтропично $dp/d\rho = (\partial p/\partial \rho)_S = c^2$), получим

$$[(u - \xi)^2 - c^2] \frac{d\rho}{d\xi} = 0,$$

откуда

$$u - \xi = \pm c, \quad \xi = \frac{x}{t} = u \mp c. \quad (1.58)$$

Подставляя это соотношение в уравнения (1.57), найдем

$$du \pm c \frac{d\rho}{\rho} = du \pm \frac{dp}{\rho c} = 0$$

или

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const}. \quad (1.59)$$

Мы пришли, таким образом, к уже найденному в предыдущем параграфе решению задачи о центрированной волне разрежения. Для волны, бегущей вправо, следует взять нижний знак в формулах (1.58), (1.59), для волны, бегущей влево — верхний.

Как и раньше, всю картину течения можно сконструировать с помощью решений (1.58), (1.59) и тривиальных решений $u = \text{const}$, $c = \text{const}$, также удовлетворяющих автомодельным уравнениям. При этом комбинировать

^{*)} Предположение о том, что не $dS/d\xi = 0$, а $u - \xi = 0$, противоречит первому из уравнений (1.57).

эти решения следует так, чтобы удовлетворялось граничное условие $-u = w$ у поршня.

Остановимся на некоторых особенностях волны разрежения. Характер решения свидетельствует о том, что для его справедливости не обязательно, чтобы газ простирался от поршня до бесконечности. До тех пор, пока голова волны разрежения, которая бежит по невозмущенному газу вправо со скоростью звука c_0 , не доходит до правой

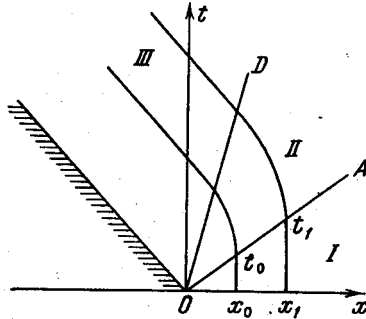


Рис. 1.21. Пути частиц на x, t -диаграмме для центрированной волны разрежения; OA — голова волны, OD — хвост волны.

границы газа, $x = x_1 > 0$, т. е. до момента $t_1 = x_1/c_0$, наличие границы никак не сказывается на движении^{*)}. Поэтому полученное решение всегда описывает начальную стадию движения газа при выдвигании поршня, даже если газ занимает конечную область.

Проследим за судьбой определенной частицы газа, начальная координата которой была x_0 . До момента $t = t_0 = x_0/c_0$, пока к ней не подойдет голова волны разрежения, частица покоится. Затем она начинает двигаться влево, с ускорением, и при этом расширяется. Когда плотность в ней упадет до конечного значения ρ_1 , а скорость станет равной скорости поршня

w , дальнейшее ускорение и расширение прекратятся, а частица начнет двигаться с постоянной скоростью w . Пути нескольких частиц на плоскости x, t изображены на рис. 1.21. Уравнения этих линий в области разрежения II легко получить, интегрируя уравнение для линии тока. $dx/dt = u = 2/(\gamma - 1) \times (c_0 - x/t)$ с начальным условием $x = x_0$ при $t = t_0 = x_0/c_0$.

Посмотрим теперь, что происходит, если переходить к движениям со все большими и большими абсолютными скоростями поршня $|w|$. Из формул (1.53) — (1.56) видно, что чем больше $|w|$, тем ниже скорость звука, плотность, давление и температура ($T \sim \sqrt{c}$) газа в конечном состоянии ($c_1 = c(w)$, $\rho_1 = \rho(w)$ и т. д.). Наконец, при некоторой скорости поршня $|w|_m = 2c_0/(\gamma - 1)$ конечные значения c_1 , ρ_1 , p_1 обращаются в нуль. Если поршень выдвигается еще быстрее, то формально решения (1.53) — (1.56) становятся бессмысленными, так как при $|u| > |w|_m$, c_1 отрицательно, а ρ_1 и p_1 комплексны.

Фактически это означает, что при $|w| > |w|_m$ между поршнем и левой границей газа образуется область вакуума. Течение происходит таким образом, как будто поршень в начальный момент $t = 0$ вообще «убирается», и газ вытекает в пустоту. При этом газ расширяется до нулевых плотности, давления и температуры (скорости звука), и граница его движется влево со скоростью

$$u = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0, \quad |u|_{\max} = \frac{2}{\gamma - 1} c_0. \quad (1.60)$$

Профили скорости и плотности при нестационарном истечении в вакуум изображены на рис. 1.22. Например, для воздуха при обычных темпера-

^{*)} Вспомним рассуждения в § 6 об области влияния.

турах $\gamma = 7/5$ и $|u|_{\max} = 5c_0$. Эта величина более чем в два раза превышает скорость стационарного истечения в вакуум из большого резервуара, когда справедливо уравнение Бернулли $h + u^2/2$

$$= h_0 = c_0^2/(\gamma - 1) \text{ и } u_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c_0 \approx 2.2 c_0$$

при $\gamma = 1.4$ (здесь через h мы обозначили удельную энтальпию $h = \varepsilon + p/\rho$). При стационарном истечении частица приобретает кинетическую энергию $u_{\max}^2/2$ на грамм только за счет ее начального теплосодержания h_0 . При нестационарном истечении в пустоту кинетическая энергия больше ее начального теплосодержания h_0 (в пять раз при $\gamma = 1.4$).

Дополнительная кинетическая энергия приобретается за счет отбора тепла от соседних частиц: полная энергия, равная сумме кинетической и внутренней энергий в области, охваченной волной разрежения, естественно, сохраняется и равна исходной внутренней энергии этой области.

Аналогично плоскому случаю можно рассматривать сферически или цилиндрически симметричные волны разрежения, которые образуются, если «сферический» или «цилиндрический» поршни в начальный момент $t=0$ начинают выдвигаться из газа, занимающего пространство $r > r_0$ или $r < r_0$. При этом также образуется волна разрежения, голова которой бежит по невозмущенному газу со скоростью звука c_0 . Однако в этих случаях не существует областей постоянного течения между поршнем и хвостом волны разрежения. Заметим, что сферическая и цилиндрическая волны разрежения, в отличие от плоской, не автомодельны: в задаче имеется характерный масштаб длины — начальный радиус поршня r_0 .

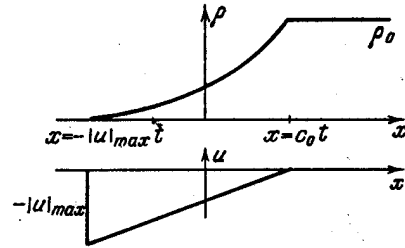


Рис. 1.22. Профили плотности и скорости при плоском нестационарном истечении газа в вакуум.

§ 12. О невозможности существования центрированной волны сжатия

Казалось бы, решение задачи о поршне, движущемся с постоянной скоростью, в равной степени применимо независимо от того, выдвигается ли поршень из газа или вдвигается в газ, производит ли он разрежение или сжатие. И то и другое движение автомодельно, т. е. решения для них можно конструировать и» тривиальных, соответствующих областям постоянного течения, и нетривиального, соответствующего простой центрированной волне. Попробуем формально построить непрерывное решение для автомодельной волны сжатия, образующейся, если в начальный момент поршень начинает вдвигаться в газ с постоянной скоростью $w > 0$ (газ находится справа от поршня). «Голова» волны бежит по газу со скоростью звука c_0 вдоль линии $x = c_0 t$ на плоскости x, t . К поршню примыкает область постоянного течения, где $u = w$, а $c = c_1$, причем обе эти области постоянного течения (I и III, согласно терминологии, принятой в предыдущих параграфах) разделены областью простой центрированной волны II, где $J_- = u - 2c/(\gamma - 1) = \text{const} = -2c_0/(\gamma - 1)$. Отсюда следует, что $c_1 = c_0 + 2w/(\gamma + 1)$, так что «хвост» волны бежит вдоль линии $x = (w + c_1) t = (2w/(\gamma + 1) + c_0) t$. Распре-

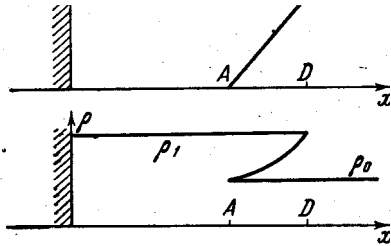


Рис. 1.23. Профили скорости и плотности, отвечающие непрерывному решению для автомодельной (центрированной) волны сжатия.

A — голова волны, D — хвост волны. Решение неоднозначно и физически бессмысленно.

деление скорости по координате x в области II описывается решением, аналогичным (1.56):

$$u = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right).$$

Получается, что «хвост» волны распространяется быстрее, чем «голова»: $2w/(\gamma + 1) + c_0 > c_0$, и профили скорости и плотности: имеют вид, изображенный на рис. 1.23.

Картина физически бессмысленна, решение неоднозначно в области II . Но полученное решение есть единственное непрерывное решение, которое следует из уравнений газодинамики. Следовательно, в данном случае непрерывного

решения не существует. Эта трудность исторически явилась одним из исходных пунктов для построения разрывных решений уравнений газодинамики, т. е. для построения теории ударных волн.

Отметим, что если поршень начинает вдвигаться в газ не с постоянной скоростью, а постепенно, ускоряясь от состояния покоя, то можно найти непрерывное решение для простой (но уже не центрированной) волны сжатия, которое описывает начальную стадию движения. Положение в этом случае вполне аналогично тому, которое имеет место в звуковой волне не малой амплитуды (см. § 7). Характеристики C_+ -семейства (если поршень находится слева от газа) сближаются и стремятся пересечься, крутизна профиля волны сжатия нарастает с течением времени (как показано на рис. 1.24) и в некоторый момент происходит «перехлестывание», возникает неоднозначность решения, аналогичная описанной в § 7 и в этом параграфе. На самом деле это означает, что образуется разрыв — ударная волна.

2. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

§ 13. Введение в газодинамику понятия об ударной волне

Рассмотрим покоящийся газ с постоянными плотностью и давлением ρ_0, p_0 , слева ограниченный плоским поршнем, и предположим, что в начальный момент поршень начал сжимать газ с постоянной скоростью, которую будем теперь обозначать через u .

Как было показано в предыдущем параграфе, попытка найти непрерывное решение для этой задачи приводит к физически бессмысленному результату. Поскольку задача автомодельна (не содержит никаких характерных масштабов длины и времени), единственные решения, удовлетво-

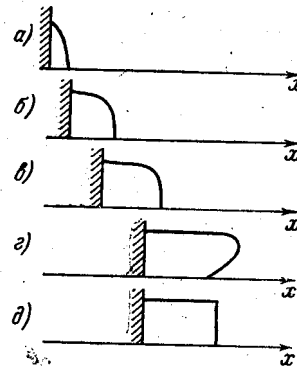


Рис. 1.24. Постепенное нарастание крутизны профиля скорости в волне сжатия, которая распространяется под действием ускоряющегося поршня.

е) Отвечает физически бессмысленному непрерывному решению с «перехлестом» волны; д) показывает фактический профиль с разрывом после момента «перехлеста».

ряющие уравнениям газовой динамики, — это тривиальное решение, в котором все величины u , p , ρ постоянны, и решение типа центрированной простой волны. Таким образом, остается одна-единственная возможность построить решение, удовлетворяющее граничным условиям задачи — в невозмущенном газе $u = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$; в области газа, прилегающей к поршню, скорость газа равна скорости поршня, — это выбросить физически бессмысленную область II и непосредственно сомкнуть области постоянного течения I и III, предположив, что в точке смыкания газодинамические величины терпят разрыв, как показано на рис. 1.25.

Вообще говоря, законы сохранения массы, импульса и энергии, которые положены в основу уравнений динамики невязкого и не теплопроводного газа не предусматривают обязательную непрерывность газодинамических величин. Эти законы были сформулированы ранее в форме дифференциальных уравнений просто потому, что с самого начала предполагалась непрерывность течения. Но эти же законы можно применить и к областям, в которых газодинамические величины испытывают разрыв. С математической точки зрения разрыв можно рассматривать как предельный случай очень больших градиентов газодинамических величин, когда толщина слоя, в котором происходит конечное изменение этих величин, стремится к нулю. Поскольку в динамике невязкого и не теплопроводного газа, т. е. при условии, что мы отвлекаемся от молекулярной структуры вещества, нет никаких характерных длин, постольку не ограничены возможности существования сколь угодно тонких переходных слоев, в пределе сводящихся к разрыву. Эти разрывы и представляют собой ударные волны.

Найдем неизвестные величины: плотность и давление газа в сжатой области ρ_1 , p_1 , а также скорость распространения разрыва по невозмущенному веществу D , исходя из общих законов сохранения массы, импульса и энергии, выполнение которых не подлежит сомнению. Параметры невозмущенного газа ρ_0 , p_0 и скорость поршня u , с которой совпадает скорость газа, будем считать известными. К моменту t в столбе с сечением в 1 см^2 движение охватывает массу газа, равную $\rho_0 D t$. Эта масса занимает объем $(D - u) t$, т. е. плотность сжатого газа ρ_1 удовлетворяет условию:

$$\rho_1 (D - u) t = \rho_0 D t.$$

Масса $\rho_0 D t$ приобретает количество движения $\rho_0 D t u$, которое по закону Ньютона равно импульсу сил давления. Результирующая сила, действующая на сжатый газ, равна разности давлений со стороны поршня а со стороны невозмущенного вещества, т. е.

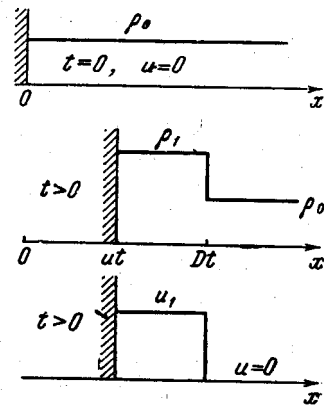


Рис. 1.25. Профили плотности и скорости в ударной волне. Волна возникает под действием поршня, который в начальный момент начал двигаться в газ с постоянной скоростью. На верхнем рисунке — исходное состояние.

$$Q_0 D u t = (p_1 - p_0) t.$$

Наконец, приращение суммы внутренней и кинетической энергий сжатого газа равно работе внешней силы, толкающей поршень $p_1 u t$:

$$Q_0 D t \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \frac{u^2}{2} \right) = p_1 u t.$$

Сокращая в этих равенствах время t , получим систему трех алгебраических уравнений для определения трех неизвестных величин p_1 , ρ_1 , D через известные u , ρ_0 , p_0 (термодинамическая связь $\varepsilon(p, \rho)$, конечно, предполагается известной).

Преобразуем эти уравнения таким образом, чтобы с правой стороны равенств стояли только величины, относящиеся к области перед разрывом, а с левой — параметры газа за разрывом. Для этого заметим, что если D — скорость распространения разрыва по неподвижному газу, то $u_0 = -D$ — скорость, с которой невозмущенный газ втекает в разрыв, а $D - u$ — скорость распространения разрыва относительно движущегося за ним газа, т. е. $u_1 = -(D - u)$ — это скорость, с которой газ вытекает из разрыва. Вводя эти обозначения в уравнения, запишем закон сохранения массы:

$$Q_1 u_1 = Q_0 u_0. \quad (1.61)$$

Закон сохранения импульса при помощи (1.61) приобретает вид

$$p_1 + Q_1 u_1^2 = p_0 + Q_0 u_0^2. \quad (1.62)$$

Закон сохранения энергии при помощи уравнений (1.61) и (1.62) преобразуется к виду

$$\varepsilon_1 + \frac{p_1}{Q_1} + \frac{u_1^2}{2} = \varepsilon_0 + \frac{p_0}{Q_0} + \frac{u_0^2}{2}. \quad (1.63)$$

Вводя удельную энтальпию $w = \varepsilon + p/\rho$, можно переписать его иначе:

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_0 + \frac{u_0^2}{2}. \quad (1.64)$$

Полученные уравнения представляют собой записанные в наиболее общей форме соотношения между газодинамическими величинами на поверхности разрыва, в который газ втекает по направлению, нормальному к самой поверхности.

Замечательно, что они не содержат никаких предположений о свойствах вещества и являются выражением лишь общих законов сохранения массы импульса и энергии.

Уравнения (1.61) — (1.63) можно вывести и непосредственно, рассматривая разрыв в системе координат, в которой он покоится. Поскольку разрыв является бесконечно тонким, внутри него не происходит накопления массы, импульса и энергии. Следовательно, потоки этих величин со стороны невозмущенного газа равны потокам по другую сторону разрыва. Если на разрыв нормально к поверхности набегающий газ с плотностью ρ_0 скоростью u_0 , то поток массы есть $\rho_0 u_0$; он равен массе, вытекающей через 1 см^2 в 1 сек с другой стороны разрыва, т. е. $\rho_1 u_1$. Таким образом, получаем уравнение (1.61). Втекающая через 1 см^2 в 1 сек масса $\rho_0 u_0$ обладает количеством движения $\rho_0 u_0^2$. Приращение количества движения при переходе через разрыв $\rho_1 u_1^2 - \rho_0 u_0^2$ равно импульсу сил давления за 1 сек $p_0 - p_1$ или, что то же самое, потоки импульса $p + \rho u^2$ по обе стороны разрыва равны друг другу (то, что величина $p + \rho u^2$ представляет собой плотность потока импульса при плоском движении, видно из формул (1.7), (1.8)). Так получается уравнение (1.62).

Приращение полной (внутренней и кинетической) энергии газа, протекающего в 1 сек через 1 см² поверхности разрыва $\rho_0 u_0 [(\varepsilon_1 + u_1^2/2) - (\varepsilon_0 + u_0^2/2)]$, равно работе сил давления, совершаемой в 1 сек из расчета на 1 см² поверхности. Эта работа равна $p_0 u_0 - p_1 u_1$. Для того чтобы пояснить происхождение этой величины, представим себе трубу, по которой течет газ справа налево, протекая через разрыв, находящийся где-то посередине (рис. 1.26). Справа и слева в трубе помещены поршни, которые движутся со скоростями u_0 и u_1 таким образом, чтобы поверхность разрыва покоилась. Правый поршень, к которому приложено давление p_0 , гонит газ через трубу, совершая работу $p_0 u_0$ в 1 сек на 1 см². Над левым поршнем газ совершает работу $p_1 u_1$ (поршень «совершает» над газом отрицательную работу $-p_1 u_1$). Таким образом, полная работа, совершенная над газом, равна $p_0 u_0 - p_1 u_1$. Приравнявая ее приращению энергии газа, получим уравнение (1.63). Его можно истолковать и иначе: полные потоки энергии по обе стороны разрыва $\rho u (\varepsilon + u^2/2)$, выражение для которых следует из уравнения энергии, записанного в форме (1.10), равны друг другу.

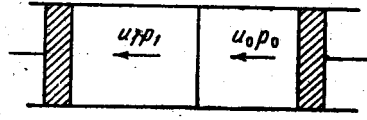


Рис. 1.26. Опыт, поясняющий вывод выражения для работы.

Формально соотношения (1.61) — (1.63), свидетельствующие о равенстве потоков массы, импульса и энергии через поверхность разрыва, можно получить и из дифференциальных уравнений (1.2), (1.7), (1.10), которые являются выражением тех же законов. Запишем эти уравнения для плоского случая:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho u), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) &= -\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Будем сначала формально рассматривать разрыв как некий тонкий слой с большими градиентами всех величин и проинтегрируем уравнения по этому слою от x_0 до x_1 . Например,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) dx.$$

Теперь произведем предельный переход, устремив толщину слоя $x_1 - x_0$ к нулю. Интегралы в левых частях, пропорциональные $x_1 - x_0 \rightarrow 0$, исчезают (что и соответствует, отсутствию накопления массы, импульса и энергии в разрыве). Интегралы же в правых частях дают разности потоков соответствующих величин по обе стороны разрыва, т.е. мы приходим к уравнениям (1.61) — (1.63).

Следует подчеркнуть формальный характер последнего вывода соотношений на ударном разрыве (1.61) — (1.63). Он свидетельствует только о том, что выражения для потоков массы, импульса и энергии, стоящие под знаками дивергенции в дифференциальных уравнениях, являются совершенно общими, независимо от того, непрерывно течение или нет. Если считать разрыв не математической поверхностью, а неким тонким слоем конечной толщины, где газодинамические величины меняются очень резко, но

непрерывным образом, то применять к этому слою уравнения (1.65), в которых не учтены вязкость и теплопроводность, нельзя. Ниже мы увидим, что энтропии газа по обе стороны разрыва различны, тогда как в дифференциальных уравнениях (1.65) заложено условие постоянства энтропии (адиабатичности движения). Отметим внешнее сходство энергетического соотношения на ударном разрыве (1.64) с интегралом Бернулли для стационарного потока

$$w + \frac{u^2}{2} = \text{const},$$

справедливого вдоль линии тока.

§14. Ударная адиабата

Уравнения (1.61) — (1.63), связывающие между собой параметры газа по обе стороны разрыва, представляют собой систему трех алгебраических уравнений относительно шести величин: $u_0, \rho_0, p_0, u_1, \rho_1, p_1$ (термодинамические свойства вещества, т. е. функции $\varepsilon(p, \rho)$ или $w(p, \rho)$ предполагаются известными). Зная термодинамические параметры газа перед разрывом ρ_0, p_0 и задаваясь какой-нибудь из величин, характеризующих амплитуду ударной волны, например, давлением за фронтом волны p_1 или скоростью «поршня», создающего волну $|u| = u_0 - u_1$, можно вычислить все остальные неизвестные величины. Выпишем некоторые общие соотношения, следующие из законов сохранения (1.61) — (1.63). Введем вместо плотностей удельные объемы $V_0 = 1/\rho_0, V_1 = 1/\rho_1$. Из уравнения (1.61) получим

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{u_0}{u_1}. \quad (1.66)$$

Исключая из первых двух уравнений (1.61) — (1.62) сначала одну, а потом другую скорость, найдем

$$u_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}, \quad (1.67)$$

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}. \quad (1.68)$$

Если ударная волна создается в покоящемся газе движением поршня, для скорости движения сжатого газа относительно невозмущенного, равной скорости «поршня», получим формулу

$$|u| = u_0 - u_1 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)}. \quad (1.69)$$

Отметим полезную формулу для разности кинетических энергий газа по обе стороны разрыва в системе координат, в которой разрыв покоится:

$$\frac{1}{2} (u_0^2 - u_1^2) = \frac{1}{2} (p_1 - p_0) (V_0 + V_1). \quad (1.70)$$

Подставляя выражения для квадратов скоростей (1.67), (1.68) в уравнение энергии (1.63), получим соотношение, связывающее давления с удельными объемами по обе стороны разрыва:

$$\varepsilon_1 (p_1 V_1) - \varepsilon_0 (p_0 V_0) = \frac{1}{2} (p_1 + p_0) (V_0 - V_1). \quad (1.71)$$

Заменяя удельные внутренние энергии на удельные энтальпии по формуле $w = \varepsilon + pV$, перепишем эту формулу в другом виде:

$$w_1 - w_0 = \frac{1}{2} (p_1 - p_0) (V_0 + V_1). \quad (1.72)$$

По аналогии с соотношением, связывающим начальные и конечные давления и объемы при адиабатическом сжатии вещества, выражения (1.71) или (1.72) носят название ударной адиабаты или адиабаты Гюгонио. Ударная адиабата представляется функцией

$$p_1 = H(V_1, p_0, V_0), \quad (1.73)$$

которая в ряде конкретных случаев, когда термодинамические связи $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$ выражаются простыми формулами, может быть найдена в явной форме.

Ударная адиабата имеет существенное отличие от обычной адиабаты (адиабаты Пуассона в идеальном газе с постоянной теплоемкостью). В то время как последняя представляет собой однопараметрическое семейство кривых $p = p(V, S)$, где параметром служит только значение энтропии S , адиабата Гюгонио зависит от двух параметров: давления и, объема в начальном состоянии p_0, V_0 . Чтобы исчерпать все кривые $p = p(V, S)$, достаточно пройти одномерный ряд значений энтропии S . Чтобы исчерпать все кривые $p = H(V, p_0, V_0)$, надо построить «бесконечность в квадрате» кривых, отвечающих всем возможным p_0 и V_0 .

§ 15. Ударные волны в идеальном газе с постоянной теплоемкостью

Особенно простой вид преобретают формулы для ударной волны в случае идеального газа с постоянной теплоемкостью. На этом примере удобно выяснить все основные закономерности изменения величин в ударной волне. Подставим в уравнения ударной адиабаты (1.71) или (1.72) соотношения

$$\varepsilon = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} pV; \quad w = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pV. \quad (1.74)$$

Это дает возможность найти в явном виде уравнение ударной адиабаты:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma + 1) V_0 - (\gamma - 1) V_1}{(\gamma + 1) V_1 - (\gamma - 1) V_0}. \quad (1.75)$$

Для отношения объемов получим формулу:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_0}{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_0}. \quad (1.76)$$

Отношение температур равно

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0}. \quad (1.77)$$

С помощью (1.76) скорости по формулам (1.67) и (1.68) можно представить через давления и начальный объем:

$$u_0^2 = \frac{V_0}{2} [(\gamma - 1) p_0 + (\gamma + 1) p_1], \quad (1.78)$$

$$u_1^2 = \frac{V_0}{2} \frac{[(\gamma + 1) p_0 + (\gamma - 1) p_1]^2}{[(\gamma - 1) p_0 + (\gamma + 1) p_1]}. \quad (1.79)$$

Выясним на примере идеального газа с постоянной теплоемкостью некоторые закономерности для ударных волн. Ударная адиабата представляет

собой кривую на плоскости p, V , которая проходит через точку начального состояния p_0, V_0 .

Эта кривая изображена на рис. 1.27. В принципе формулу (1.75) можно распространить и на давления, меньшие начального $p_1 < p_0$. Как мы увидим ниже, в §17, эта часть кривой соответствует физически неосуществимым состояниям. Поэтому она проведена на рис. 1.27 пунктиром. Из формулы (1.76) видно, что в случае ударной волны очень высокой амплитуды, когда давление за фронтом гораздо больше начального, плотность газа при возрастании амплитуды увеличивается не беспречно, а стремится к определенному значению. Это предельное сжатие в ударной волне зависит только от показателя адиабаты и равно

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \quad (1.80)$$

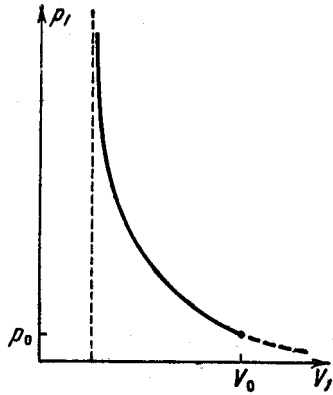


Рис. 1.27. Ударная адиабата.

Для одноатомного газа с $\gamma = 5/3$ предельное сжатие равно 4. Для двухатомного газа в предположении, что колебания не возбуждены, $\gamma = 7/5$, и предельное сжатие равно 6; если считать, что колебания возбуждены, $\gamma = 9/7$ и сжатие равно 8. В действительности, при высоких давлениях и температурах теплоемкость и показатель адиабаты в газах уже не являются постоянными, так как в газе происходят диссоциация молекул и ионизация атомов. Ударная адиабата с учетом этих процессов будет рассмотрена в гл. III. Однако и в этом случае величина сжатия всегда остается ограниченной и чаще всего не превышает 11—13. Сжатие газа в ударной волне при данном большом отношении давлений тем сильнее, чем выше теплоемкость и меньше показатель адиабаты.

Поскольку при больших давлениях p_1 плотность возрастает очень медленно с ростом давления, температура сжатого газа растет пропорционально давлению (см. формулу (1.77) при $V_1 \approx \text{const}$). В пределе сильной волны, когда $p_1/p_0 \gg 1$ и $V_1/V_0 \approx (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p_1}{p_0}. \quad (1.81)$$

Скорости в пределе при $p_1/p_0 \rightarrow \infty$ растут пропорционально корню из давления. Как видно из формул (1.67) и (1.68), при $p_1 \gg p_0$.

$$u_0 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} p_1 V_0}, \quad u_1 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)} p_1 V_0}. \quad (1.82)$$

Очень важные следствия можно получить, сопоставляя скорости газа по обе стороны разрыва с соответствующими скоростями звука. В идеальном газе с постоянной теплоемкостью

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma p V.$$

Составим отношения скоростей газа относительно разрыва к скоростям звука:

$$\left(\frac{u_0}{c_0}\right)^2 = \frac{(\gamma-1) + (\gamma+1)\frac{p_1}{p_0}}{2\gamma}, \quad (1.83)$$

$$\left(\frac{u_1}{c_1}\right)^2 = \frac{(\gamma-1) + (\gamma+1)\frac{p_0}{p_1}}{2\gamma}. \quad (1.84)$$

В предельном случае ударной волны малой амплитуды, когда давления по обе стороны разрыва близки друг к другу, $p_1 \approx p_0$, $(p_1 - p_0)/p_0 \ll 1$, согласно формуле (1.76), также мало и сжатие газа: $V_1 \approx V_0$; близки друг к другу и скорости звука $c_1 \approx c_0$. Из формул (1.83) и (1.84) видно, что в этом случае $u_0 \approx c_0 \approx c_1 \approx u_1$. Но u_0 есть скорость распространения разрыва по невозмущенному газу. Таким образом, слабая ударная волна бежит по газу со скоростью, очень близкой к скорости звука, т. е. практически не отличается от акустической волны сжатия. Это не удивительно, ибо при малом отклонении p_1 от p_0 мы имеем дело с малым возмущением. Далее, из формул (1.83) и (1.84) видно, что в ударной волне, в которой происходит сжатие газа ($V_1 < V_0$, $p_1 > p_0$), газ втекает в разрыв со сверхзвуковой скоростью $u_0 > c_0$, а вытекает из него с дозвуковой $u_1 < c_1$ (то, что $V_1 < V_0$, $p_1 > p_0$ при $p_1 > p_0$, следует и из общих формул (1.67), (1.68)). Можно сказать иначе: ударная волна распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью, а по сжатому газу, находящемуся за нею, с дозвуковой. Чем выше амплитуда ударной волны, т. е. чем больше отношение p_1/p_0 , тем больше скорость фронта волны u_0 по сравнению со скоростью звука в невозмущенном газе c_0 . Отношение же u_1/c_1 в пределе сильной волны $p_1 \gg p_0$ стремится к постоянной величине $u_1/c_1 \rightarrow \sqrt{(\gamma-1)/2\gamma} < 1$.

Рассмотрим, что происходит энтропией газа при сжатии его ударной волной. Энтропия идеального газа с постоянной теплоемкостью c_V точно до константы равна $S = c_V \ln pV^\gamma$. Разность энтропий по обе стороны фронта ударной волны с помощью формулы (1.76) можно представить в виде

$$S_1 - S_0 = c_V \ln \frac{p_1 V_1^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = c_V \ln \left\{ \frac{p_1}{p_0} \left[\frac{(\gamma-1)\frac{p_1}{p_0} + (\gamma+1)}{(\gamma+1)\frac{p_1}{p_0} + (\gamma-1)} \right]^\gamma \right\}. \quad (1.85)$$

В предельном случае слабой волны ($p_1 \approx p_0$) выражение в фигурных скобках близко к единице и $S_1 \approx S_0$. При возрастании амплитуды волны, т. е. при увеличении отношения p_1/p_0 , начиная от единицы, выражение в фигурных скобках, как легко проверить, монотонно растет, стремясь к бесконечности при $p_1/p_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, энтропия газа, испытывающего ударное сжатие, возрастает, причем тем сильнее, чем выше амплитуда ударной волны. Возрастание энтропии свидетельствует о том, что в ударной волне происходят необратимые, диссипативные процессы, связанные с существованием вязкости и теплопроводности вещества. Теория, в которой эти процессы не учитываются, естественно, не может описать сам механизм ударного сжатия, не может описать структуру того тонкого, но в действительности конечного слоя, в котором происходит переход газа из

начального состояния в конечное. Именно поэтому в теории, где вязкость и теплопроводность не приняты во внимание, ударный разрыв представляется математической поверхностью с нулевой толщиной. Как было отмечено выше, в такой теории нет характерной длины, которая могла бы послужить масштабом для толщины разрыва. При учете молекулярной структуры газа, т. е. процессов вязкости и теплопроводности, такой масштаб появляется. Это — длина свободного пробега молекул, которой пропорциональны коэффициенты вязкости и теплопроводности и которая, в действительности, служит мерой реальной ширины разрыва.

Существенно, однако, что сама величина возрастания энтропии при ударном сжатии совершенно не зависит от механизма диссипации и определяется исключительно законами сохранения массы, импульса и энергии. От механизма диссипации зависит только ширина разрыва, т. е. скорость, с которой происходит необратимое нагревание газа, испытывающего ударное сжатие. Так, стакан горячей воды непременно остывает до вполне определенной, комнатной температуры, совершенно независимо от механизма теплообмена с окружающей средой, которым определяется лишь скорость остывания.

От механизма диссипации зависят величины градиентов газодинамических величин в переходном слое, но не скачки этих величин между конечным и начальным состояниями, которые определяются только законами сохранения. Например, если $\Delta p = p_1 - p_0$ есть скачок давления в ударной волне, а Δx — ширина переходного слоя, то при изменении коэффициентов вязкости и теплопроводности меняются Δx и $dp/dx \sim \Delta p/\Delta x$, но произведение $\Delta x dp/dx \approx \Delta p$ остается неизменным. В пределе, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности устремляются к нулю, $\Delta x \rightarrow 0$, а $dp/dx \sim 1/\Delta x \rightarrow \infty$, градиенты становятся бесконечными, что и соответствует разрыву.

Дифференциальные уравнения газовой динамики без учета вязкости и теплопроводности лишь допускают возможность существования разрывов, но не могут описать непрерывным образом переход из начального в конечное состояние, ибо в уравнениях автоматически заложено условие адиабатичности процесса, $dS/dt = 0$, эквивалентное уравнению энергии. Дифференциальные уравнения содержат четыре закона сохранения: массы, импульса, энергии и энтропии, тогда как в разрыве выполняются только три из них, все, кроме закона сохранения энтропии.

К вопросу о толщине фронта ударной волны, который может быть решен лишь при учете молекулярной структуры вещества, т. е. при «микроскопическом» рассмотрении процесса ударного сжатия, мы вернемся ниже, в § 23. Теперь же продолжим «макроскопическое» описание явления ударного сжатия, исходя только из законов сохранения массы, импульса и энергии.

§ 16. Геометрическая интерпретация закономерностей ударного сжатия

Для лучшего уяснения различных закономерностей в теории ударной волны и свойств ударной адиабаты очень полезны графические построения на диаграмме p, V . Проведем на плоскости p, V через точку A начального состояния вещества p_0, V_0 ударную адиабату HH (рис. 1.28). Будем считать, что характер этой кривой аналогичен ударной адиабате идеального газа с постоянной теплоемкостью, т. е. что кривая везде обращена выпуклостью

вниз; вторая производная d^2p/dV^2 в каждой точке положительна. В целях наглядности мы будем иллюстрировать некоторые положения конкретными вычислениями на примере идеального газа с постоянной теплоемкостью, однако можно показать, что закономерности являются общими и справедливы для веществ с другими термодинамическими свойствами. Единственное условие, которое накладывается на эти свойства, — это чтобы ударная адиабата во всех точках была обращена выпуклостью вниз. Пусть вещество после ударного сжатия из состояния $A(p_0, V_0)$ переходит в состояние $B(p_1, V_1)$, изображаемое точкой B , лежащей на ударной адиабате.

По формуле (1.67) скорость распространения ударной волны по невозмущенному веществу дается выражением

$$D^2 = u_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

Графически эта скорость определяется наклоном прямой AB , проведенной из начального состояния в конечное $((p_1 - p_0)/(V_0 - V_1))$ равно тангенсу угла наклона прямой). Из рис. 1.28 видно, что чем выше конечное давление (чем мощнее ударная волна), тем больше наклон прямой и тем больше скорость волны. (Для иллюстрации на рис. 1.28 проведены две прямые, AB и AC .)

Посмотрим, чем определяется начальный наклон ударной адиабаты в точке A . Вычислим производную dp_1/dV_1 с помощью формулы (1.75) для идеального газа с постоянной теплоемкостью:

$$\frac{dp_1}{dV_1} = - \frac{(\gamma-1)p_0}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0} - \frac{p_0[(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1](\gamma+1)}{[(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0]^2}.$$

Взяв производную в точке A , т. е. положив $V_1 = V_0$, получим $(dp_1/dV_1)_0 = -\gamma p_0/V_0$. Но эта величина есть не что иное, как наклон адиабаты Пуассона $p \sim V^{-\gamma}$, проходящей через точку A : $(\partial p/\partial V)_S = -\gamma p/V$. Таким образом, в точке A ударная адиабата касается адиабаты Пуассона, проходящей через эту точку. Обычная адиабата PP , соответствующая начальной энтропии газа $S_0 = S(p_0, V_0)$, также проведена на рис. 1.28. Касание адиабат в начальной точке иллюстрируется и общей формулой (1.67) для скорости ударной волны. В пределе слабой волны, когда $(p_1 - p_0)/p_0 \rightarrow 0$, ударная волна не отличается от звуковой, изменение энтропии стремится к нулю, и скорость волны D совпадает со скоростью звука:

$$D^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1} \rightarrow -V_0^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta V} \right)_S \rightarrow c_0^2.$$

Вообще же наклон прямой AB всегда больше наклона касательной к адиабате в точке A , так что всегда $D = u_0 > c_0$.

Начальный наклон ударной адиабаты определяется скоростью звука в исходном состоянии. Строго это будет доказано для общего случая про-

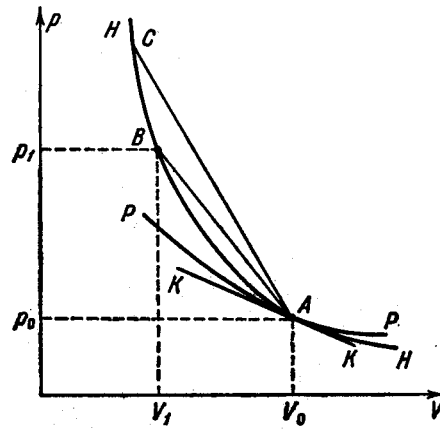


Рис. 1.28. p, V -диаграмма.
 HH — адиабата Гюгонио, PP — адиабата Пуассона, KK — касательная к обеим адиабатам в точке начального состояния $A(V_0, p_0)$.

извольного вещества в § 18. Непосредственным вычислением по формулам для идеального газа с постоянной теплоемкостью можно убедиться в том, что в точке A совпадают не только первые, но и вторые производные от адиабат Гюгонио и Пуассона, т. е. в точке A имеет место касание второго порядка. Это положение также является общим (см. § 18).

Адиабата Гюгонио везде проходит выше обычной адиабаты, проведенной из начальной точки, как показано на рис. 1.28. В самом деле, при ударном сжатии от объема V_0 до объема $V_1 < V_0$ энтропия повышается, а при адиабатическом — остается неизменной. Но при одинаковом объеме давление тем выше, чем больше энтропия.

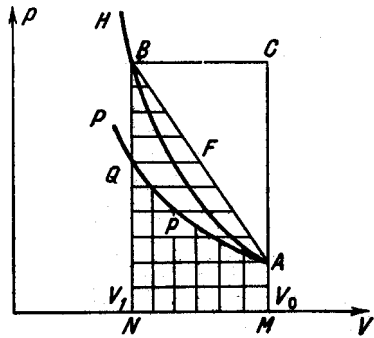


Рис. 1.29. К геометрической интерпретации приращения энергии в ударной волне. H — ударная адиабата, P — адиабата Пуассона.

Приращение удельной внутренней энергии при ударном сжатии $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ от состояния A до состояния B , как видно из выражения (1.71) для ударной адиабаты, численно равно площади трапеции $MABN$, покрытой на рис. 1.29 горизонтальной штриховкой.

Если газ сжать адиабатически из состояния A до того же самого объема V_1 (до состояния Q), то для этого нужно совершить работу, численно равную площади фигуры $MAQN$, ограниченной сверху обычной адиабатой P и заштрихованной вертикально. Эта площадь дает и приращение внутренней энергии газа

$$\varepsilon' - \varepsilon_0 = - \int_{V_0}^{V_1} p dV$$

(интегрирование ведется при $S = S_0$). Для того чтобы привести газ в конечное состояние B , необходимо его еще нагреть при постоянном объеме V_1 , сообщив ему количество тепла, численно равное разности площадей, заштрихованных горизонтально и вертикально, т. е. равное площади фигуры ABQ . Эта площадь и определяет вырастание энтропии газа при ударном сжатии. Она равна

$$\varepsilon_1 - \varepsilon' = \int_{S_0}^{S_1} T dS = \bar{T} (S_1 - S_0),$$

где $\bar{T}$ — некоторая средняя температура на отрезке прямой QB (при $V = V_1 = \text{const}$).

В системе координат, в которой исходный газ покоится, он после сжатия приобретает кинетическую энергию (на 1 г), равную, согласно общей формуле (1.69),

$$\frac{u^2}{2} = \frac{(u_0 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2} (p_1 - p_0) (V_0 - V_1).$$

Эта энергия численно равна площади треугольника ABC на рис. 1.29, дополняющего трапецию $MABN$, площадь которой соответствует $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$, до прямоугольника $MCBN$.

Площадь этого прямоугольника $p_1(V_0 - V_1)$ представляет собой полную энергию, сообщенную «поршнем» 1 с первоначально покоящегося газа. В сильной ударной волне, когда $p_1 \gg p_0$ она поровну делится между приращениями внутренней и кинетической энергий: площадь $MABN \approx ABC$:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \approx \frac{u^2}{2} \approx \frac{1}{2} p_1 (V_1 - V_0).$$

Разберем на диаграмме p, V соотношение между скоростями газа и звука в конечном состоянии (рис. 1.30). Проведем через точку B на адиабате H_A , соответствующей начальному состоянию A , новую адиабату H_B , для которой точка B является начальной. Из симметрии уравнения адиабаты относительно перестановки индексов «0» и «1» следует, что если $p_1 = H(V_1, p_0, V_0)$, то $p_0 = H(V_0, p_1, V_1)$. Другими словами, адиабата H_B , формально продолженная в сторону давлений, меньших начального, пересекает адиабату H_A в точке A . Взаимное расположение адиабат H_A и H_B таково, как это показано на рис. 1.30, в чем легко убедиться на примере идеального газа с постоянной теплоемкостью^{*)}. Скорость распространения волн относительно сжатого газа определяется формулой (1.68)

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

Квадрат скорости звука в сжатом газе в точке B равен

$$c_1^2 = -V_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S.$$

Первая величина пропорциональна тангенсу угла наклона прямой BA , а вторая — тангенсу угла наклона касательной к ударной адиабате H_B в точке B (ударная адиабата H_B и адиабата Пуассона, проходящая через B , касаются друг друга). Взаимное расположение — прямой BA и адиабаты H_B соответствует тому, что $u_1 < c_1$.

В конце § 12 было отмечено, что, в отличие от адиабаты Пуассона, адиабата Гюгонио зависит от двух параметров. Благодаря этому нельзя путем сжатия газа несколькими ударными волнами, исходя из данного начального состояния, прийти к тому же самому конечному состоянию, что и путем сжатия одной волной.

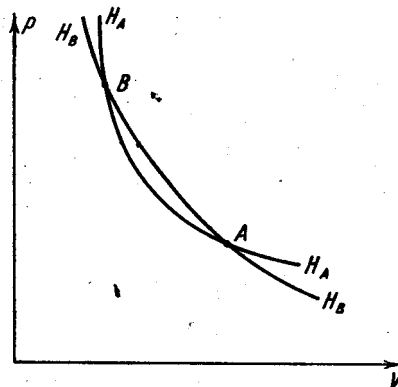


Рис. 1.30. p, V -диаграмма, поясняющая соотношение между скоростями газа и звука в ударной волне.

^{*)} То, что адиабата H_B проходит левее H_A при давлениях более высоких, чем p_B , можно пояснить следующим образом. Если точка B соответствует сжатию газа из состояния A очень сильной ударной волной, то адиабата H_A проходит при $p > p_B$ почти вертикально, отвечая предельному сжатию до объема, равного $[(\gamma-1)/(\gamma+1)] V_A$. В то же время, пропуская вторую ударную волну по газу из состояния B , мы можем его сжимать вплоть до объема

$$[(\gamma-1)/(\gamma+1)] V_B = [(\gamma-1)/(\gamma+1)]^2 V_A.$$

Так, например, если пропустить по одноатомному газу сильную ударную волну, газ сожмется в четыре раза, а если пропустить одну за другой две сильные волны, оставляя неизменным конечное давление, получим сжатие в 16 раз.

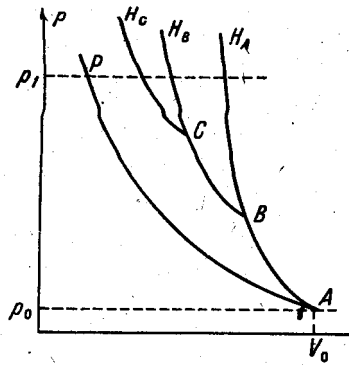


Рис. 1.31. К вопросу об однократном в многократном ударном и адиабатическом сжатиях газа до одинакового давления p_1 .

H_A, H_B, H_C — ударные адиабаты, для которых точки A, B, C являются начальными; P — адиабата Пуассона.

В то же время, разбивая адиабатический процесс на: сколько угодно этапов, придем к одной и той же плотности, если задано конечное давление. Это положение иллюстрируется диаграммой p, V рис. 1.31, где изображены адиабата Пуассона и несколько адиабат Гюгонио, отвечающих сжатию газа последовательными ударными волнами.

§ 17. Невозможность существования ударной волны разрежения в веществе с нормальными свойствами

В §15 были выписаны формулы для вычисления различных величин, связанных с ударной волной, для случая идеального газа с постоянной теплоемкостью. Из этих формул непосредственно следовало, что в ударной волне, в которой происходит сжатие вещества, выполняются следующие неравенства:

$$p_1 > p_0, \quad \rho_1 > \rho_0, \quad V_1 < V_0, \quad u_0 > c_0, \quad u_1 < c_1, \\ S_1 > S_0. \quad (1.86)$$

Одновременно со сжатием вещества и повышением его давления растет и энтропия; волна распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью, а по сжатому газу за нею — с дозвуковой. Этот режим схематически изображен на рис. 1.32, а. Распространяем теперь выражения (1.75) для ударной адиабаты на давления, меньшие начального, и допустим, что существуют такие разрывы, в которых происходит не сжатие, а разрежение газа: $V_1 > V_0, p_1 < p_0$. Законы сохранения массы, импульса и энергии, с помощью которых были получены формулы, связывающие скорости, плотности и давления по обе стороны разрыва, никак не ограничивают возможности существования таких разрывов. Из формул (1.83) — (1.84) видно, что в этом случае $u_0 < c_0$, а $u_1 > c_1$. Формула (1.85) для скачка энтропии в разрыве свидетельствует о том, что энтропия газа при этом уменьшается (выражение в фигурных скобках меньше единицы при $p_1 < p_0$).

Мы приходим, таким образом, к режиму ударной волны разрежения, в котором одновременно выполняются следующие неравенства:

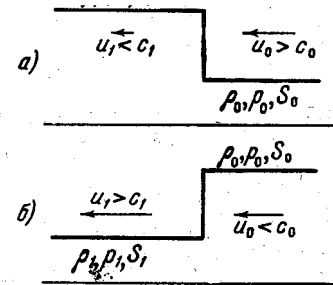


Рис. 1.32. Схематические изображения ударных волн сжатия (а) и разрежения (б). Газ втекает в разрыв справа налево.

$$p_1 < p_0, \quad q_1 < q_0, \quad V_1 > V_0, \quad u_0 < c_0, \quad u_1 > c_1, \quad S_1 < S_0, \quad (1.87)$$

и который схематически изображен на рис. 1.32, б,

Геометрическая интерпретация этих неравенств, подобная изложенной в § 16, представлена на рис. 1.33. Наклон прямой AB меньше наклона касательной к ударной адиабате H_A в точке начального состояния A ($u_0 < c_0$) и больше наклона касательной ко второй ударной адиабате H_B , проведенной через точку конечного состояния B ($u_1 > c_1$).

Адиабата Пуассона P , проходящая через точку A в области $p_1 < p_0$, стелется выше ударной адиабаты H_A . Этим и объясняется уменьшение энтропии при ударном разрежении. При адиабатическом разрежении до того же объема V_1 давление p' выше конечного p_1 . Для того чтобы прийти из Q в B , надо охладить газ при постоянном объеме, т.е. уменьшить его энтропию.

Но по второму закону термодинамики, за счет одних только внутренних процессов, без отбора тепла наружу, энтропия вещества не может уменьшаться. Отсюда следует невозможность распространения волны разрежения в виде разрыва, и из двух режимов, существование которых допускается законами сохранения массы, импульса и энергии, требование возрастания энтропии выбирает только один — ударную волну сжатия. Это положение носит совершенно общий характер и известно под названием теоремы Цемплена. В следующем параграфе будет показано, что в волнах слабой интенсивности при условии положительности второй производной $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$ совокупности неравенств (1.86) или (1.87) выполняются одновременно, совершенно независимо от конкретных термодинамических свойств вещества. Это положение можно доказать и для волн не малой амплитуды и произвольного вещества. Единственное условие, которое накладывается на свойства вещества, — это чтобы ударная адиабата во всех точках была обращена выпуклостью вниз: $(\partial^2 p / \partial V^2)_H > 0$, одобно тому как это имеет место для идеального газа с постоянной теплоемкостью. Подавляющее большинство реальных веществ обладает именно такими свойствами, так что утверждение о невозможности существования ударных волн разрежения имеет весьма общий характер (о некоторых исключениях речь пойдет ниже).

Невозможность существования ударной волны разрежения можно пояснить следующим образом. Такая волна распространялась бы по невозмущенному газу с дозвуковой скоростью $u_0 < c_0$. Значит, если в какой-то момент времени и возникнет состояние, подобное изображенному на рис. 1.32, б, то возмущение от скачка плотности и давления побежит вправо со скоростью звука c_0 , обгоняя «ударную волну»; через некоторое время разрежение охватит газ перед «разрывом», и разрыв попросту размоется. Иными словами, ударная волна разрежения механически неустойчива. Наоборот,

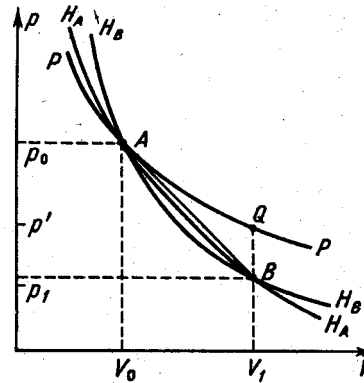


Рис. 1.33. К геометрической интерпретации неравенств в «ударной волне разрежения». H_A — ударная адиабата; P — адиабата Пуассона, проходящая через точку A начального состояния; H_B — ударная адиабата, проведенная из точки конечного состояния B .

ударная волна сжатия распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью $u_0 > c_0$; состояние за фронтом этой волны никак не может повлиять на состояние газа перед волною и разрыв остается устойчивым. Относительно сжатого газа ударная волна сжатия распространяется с дозвуковой скоростью $u_1 < c_1$, поэтому газодинамический режим за фронтом ударной волны влияет на амплитуду волны.

Если, скажем, подогреть или сжимать газ за фронтом, то ударная волна будет усиливаться, и наоборот, если за фронтом ударной волны происходит охлаждение газа или его разрежение, то возмущения, несущие разрежение, догоняют ударную волну и ослабляют ее.

В ударной волне разрежения положение было бы обратное: поскольку она распространялась бы по разреженному газу со сверхзвуковой скоростью, она не была бы подвержена воздействию каких-либо процессов, происходящих за нею — была бы «неуправляемой».

Весьма существенно, что условие механической устойчивости ударной волны совпадает с термодинамическим условием возрастания энтропии. Механическая устойчивость может иметь место только тогда, когда волна распространяется по невозмущенному веществу со сверхзвуковой скоростью, иначе возмущение, вызываемое ударной волной, проникло бы в исходный газ со скоростью звука, опередило бы ударную волну, размывая тем самым резкий фронт волны. В то же время с условием возрастания энтропии совпадает и условие, позволяющее представить себе причинную связь явлений. Именно при возрастании энтропии ударная волна сжатия распространяется по испытывавшему превращению газу с дозвуковой скоростью, т. е. внешние факторы, такие, например, как поршень,двигающийся в газ, могут вызывать появление ударной волны и в дальнейшем воздействовать на ее распространение.

Таким образом, в веществе с нормальными термодинамическими свойствами, когда $(\partial^2 p / \partial V^2)_s > 0$, ударные волны сжатия, соответствующие возрастанию энтропии, оказываются механически устойчивыми и подверженными воздействию внешних причин. Возникновение ударной волны разрежения невозможно как с термодинамической точки зрения, так и с точки зрения устойчивости: возникший однажды крутой фронт разрежения размылся бы с течением времени.

Приведем в заключение этого параграфа таблицу, иллюстрирующую возможности осуществления различных режимов:

	Волна сжатия	Волна разрежения
Разрыв	Возможна; энтропия растет; механическая устойчивость	Невозможна; энтропия уменьшается; механическая неустойчивость
Плавное распределение	Невозможна; неограниченное нарастание крутизны фронта, переходящее в «перехлестывание»	Возможна; распределения становятся с течением времени все более плавными

§ 18. Ударные волны слабой интенсивности

Рассмотрим ударную волну слабой интенсивности, в которой скачки всех газодинамических параметров можно рассматривать как малые величины. При этом пока не будем делать никаких предположений о термодинамических свойствах вещества, исходя только из законов сохранения. Рассматривая внутреннюю энергию как функцию энтропии и удельного объема, запишем приращение энергии в ударной волне в виде разложения по малым приращениям независимых переменных около точки начального состояния:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0) + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial V^3} \right)_S (V_1 - V_0)^3.$$

Все производные в этом разложении берутся в точке начального состояния $V_0 S_0$. Как мы сейчас увидим, приращение энтропии в волне $S_1 - S_0$ есть величина третьего порядка малости, если рассматривать приращение $V_1 - V_0$ как малую первого порядка. Поэтому, ограничиваясь разложением внутренней энергии до величин третьего порядка, можно опустить члены, пропорциональные $(S_1 - S_0)(V_1 - V_0)$, $(S_1 - S_0)^3$ и т. д. Согласно термодинамическому тождеству $dE = T dS - p dV$,

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} \right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_S = -p.$$

Поэтому

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = T_0 (S_1 - S_0) - p_0 (V_1 - V_0) - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^3.$$

Подставим это выражение в уравнение адиабаты Гюгонио (1.71) и разложим в правой части ее давление p_1 . Поскольку левую часть равенства можно разложить до величин третьего порядка, в разложении давления достаточно ограничиться членами второго порядка по разности $V_1 - V_0$ и опустить член, содержащий приращение энтропии, так как он даст в правой части слагаемое, пропорциональное $(S_1 - S_0)(V_1 - V_0)$, которое есть величина более высокого порядка малости, чем $(V_1 - V_0)^3$:

$$p_1 = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^2.$$

Производя сокращения в уравнении адиабаты Гюгонио с подставленными разложениями, получим связь приращения энтропии с приращением объема:

$$T_0 (S_1 - S_0) = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_0 - V_1)^3. \quad (1.88)$$

Если исходить из уравнения адиабаты Гюгонио, записанного в форме (1.72), где вместо внутренней энергии стоит энтальпия, получим аналогичным путем

$$T_0 (S_1 - S_0) = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_S (p_1 - p_0)^3. \quad (1.89)$$

В тождественности обеих формул легко убедиться, подставляя разложение $(p_1 - p_0) = (\partial p / \partial V)_S (V_1 - V_0)$ в формулу (1.89) и замечая, что

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\partial p / \partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{\partial p / \partial V} \right) \frac{1}{\partial p / \partial V} = - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)^{-3} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right).$$

Формулы (1.88) и (1.89) показывают, что приращение энтропии в ударной волне слабой интенсивности есть величина третьего порядка малости относительно приращений $p_1 - p_0$ или $V_0 - V_1$ которыми характеризуется амплитуда волны.

Из формул (1.88) и (1.89) видно, что знак приращения энтропии в ударной волне определяется знаками вторых производных $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ или $(\partial^2 V / \partial p^2)_S$. Если адиабатическая сжимаемость вещества — $(\partial V / \partial p)_S$ уменьшается с увеличением давления, т. е. $(\partial^2 V / \partial p^2)_S > 0$ и $(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$, обычная адиабата на плоскости p, V изображается кривой, обращенной выпуклостью вниз (как в идеальном газе с постоянной теплоемкостью). В этом случае энтропия растет ($S_1 > S_0$) в ударной волне сжатия, когда $p_1 > p_0$, $V_1 < V_0$, и уменьшается в ударной волне разрежения. Если же $(\partial^2 V / \partial p^2)_S < 0$, $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$, положение обратное: энтропия растет в ударной волне разрежения, когда $p_1 < p_0$, $V_1 > V_0$, и уменьшается в ударной волне сжатия. Поскольку для подавляющего большинства реальных веществ $(\partial^2 V / \partial p^2)_S > 0$, то из условия невозможности уменьшения энтропии и следует невозможность существования ударных волн разрежения. Это положение уже было сформулировано выше и продемонстрировано на конкретном примере идеального газа с постоянной теплоемкостью.

Запишем разложение давления $p = p(S, V)$ около начальной точки S_0, V_0 вплоть до членов третьего порядка по $V_1 - V_0$ и первого порядка по $S_1 - S_0$:

$$p_1 - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3} \right)_S (V_1 - V_0)^3 + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0).$$

Опишем этим разложением начальные участки ударной и обычной адиабат, проведенных через точку S_0, V_0 . Члены первого и второго порядков малости относительно $V_1 - V_0$ у обеих адиабат совпадают, т. е. ударная и обычная адиабаты имеют в начальной точке общие касательные и общие центры кривизны (имеет место касание второго порядка). Члены третьего порядка малости у адиабат отличаются. Третий член в правой части разложения у обеих адиабат общий. Последний же, четвертый, у обычной адиабаты исчезает, так как $S_1 - S_0 = 0$ ($S = \text{const}$), а у ударной адиабаты, согласно (1.88), равен

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0) = - \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^3.$$

У всех нормальных веществ давление с ростом энтропии при постоянном объеме (во время нагревания при постоянном объеме) увеличивается, т. е. $(\partial p / \partial S)_V > 0$; $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ также положительна. Следовательно, при $V_1 > V_0$ последний член отрицателен, а при $V_1 < V_0$ положителен: при $V_1 > V_0$ ударная адиабата проходит ниже обычной, а при $V_1 < V_0$ — выше обычной.

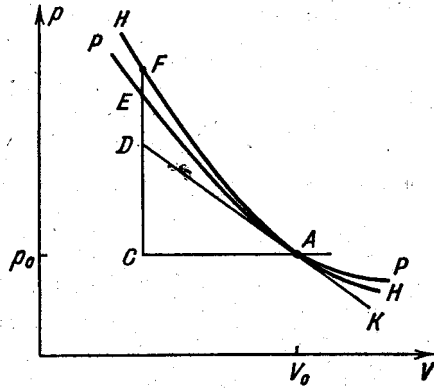


Рис. 1.34. Взаимное расположение ударной H и обычной P адиабат. DK — касательная к адиабатам в точке начального состояния A . В ударной волне слабой интенсивности отрезок CD — величина первого порядка малости, DE — второго, EF — третьего.

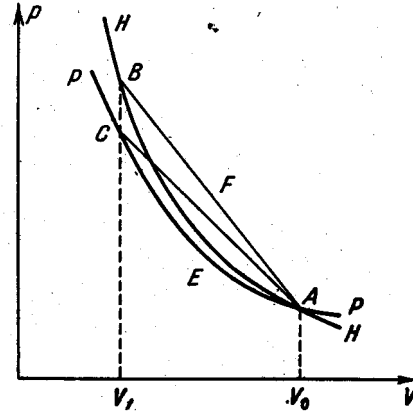


Рис. 1.35. К геометрической интерпретации приращения энтропии в ударной волне.

Таким образом, в начальной точке для обеих адиабат имеет место касание второго порядка с пересечением.

Взаимное расположение ударной адиабаты H и обычной P показано на рис. 1.34. Для ясности отметим, что отрезок CD — величина первого порядка малости относительно $V_0 - V_1$, DE — второго, а EF — третьего. Вернемся к геометрической интерпретации приращения энтропии в ударной волне (рис. 1.35). Как было показано в § 16, величина $M\Delta S$ изображается площадью фигуры $AFBCEA$. Разобьем ее прямой AC на две части: сегмент $ACEA$ и треугольник ABC . Площадь треугольника ABC равна половине произведения основания BC на высоту $V_0 - V_1$. Отрезок BC при небольших изменениях врех величин, т. е. в волне слабой интенсивности, равен $(\partial p / \partial S)_V \Delta S$, т. е.

$$\bar{T} \Delta S = F_{\text{сегм}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (V_0 - V_1) \Delta S,$$

где $F_{\text{сегм}}$ — площадь сегмента $ACEA$. Отсюда

$$\Delta S = \frac{F_{\text{сегм}}}{\bar{T} - \alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (V_0 - V_1).$$

При малых изменениях объема $\alpha \rightarrow 0$ и $\bar{T} \Delta S \rightarrow F_{\text{сегм}}$, т. е. поправка на площадь треугольника мала. И действительно, она более высокого порядка малости, чем площадь сегмента, которая имеет порядок MAS . Составляя выражение для площади сегмента

$$\bar{T} \Delta S = \frac{p_0 + p'}{2} (V_0 - V_1) - \int_{V_1}^{V_0} (p dV)_{S=S_0}$$

и подставляя разложения для слабых волн, придем, как и следовало ожидать, к формуле (1.88).

Таким образом, и из геометрического построения видно, что знак ΔS зависит от знака площади сегмента, т. е. от того, проходит ли секущая AC выше или ниже обычной адиабаты для, что то же самое, обращена ли адиабата выпуклостью вниз или вверх.

Сопоставим скорости u_0, u_1 со скоростями звука c_0, c_1 . Как мы знаем, отношение u_0/c_0 определяется соотношением наклонов прямой AB (см. рис. 1.28) и касательной к адиабате Пуассона в точке A . Отношение u_1/c_1 определяется соотношением наклонов прямой AB и касательной к адиабате Пуассона, проведенной через точку B . Запишем выражения для наклонов всех трех прямых:

$$\begin{aligned}\frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_0} (V_1 - V_0) \text{ — прямая } AB, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_A} &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} \text{ — касательная к адиабате в точке } A, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_B} &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_0} (V_1 - V_0) \text{ — касательная к адиабате в точке } B.\end{aligned}$$

Последняя формула следует из того факта, что адиабата $S_1 = \text{const}$ вплоть до членов третьего порядка относительно $V_1 - V_0$ параллельна адиабате $S_0 = \text{const}$. Замечая, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_0} > 0, \quad V_1 - V_0 < 0,$$

видим, что прямая AB проходит более круто, чем касательная в точке A , но менее круто, чем касательная в точке B , откуда $u_0 > c_0, u_1 < c_1$. Это непосредственно видно и из рис. 1.30.

Существенна внутренняя связь условий возрастания энтропии и условия механической устойчивости разрыва $u_0 > c_0$. Оба условия непосредственно вытекают из того факта, что адиабаты при уменьшении объема, начиная от A , идут все круче и круче.

Итак, из рассмотрения ударных волн слабой интенсивности в веществе с произвольными термодинамическими свойствами мы получили все те следствия из законов сохранения, которые были выше продемонстрированы на частном примере идеального газа с постоянной теплоемкостью. Единственное условие, которое нам при этом потребовалось, — это положительность второй производной $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$.

§ 19. Ударные волны в веществе с аномальными термодинамическими свойствами

Представим себе теперь вещество с аномальными термодинамическими свойствами, такими, что вторая производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$, хотя бы в некоторой части адиабаты отрицательна. Обычная адиабата для такого вещества в соответствующей области давлений и объемов обращена выпуклостью вверх, как показано на рис. 1.36.

Из рассмотрения предыдущего параграфа следует, что при небольших изменениях давления адиабата Гюгонио почти совпадает с адиабатой Пуассона (с точностью до малых третьего порядка по $V_1 - V_0$ или $p_1 - p_0$).

В этом случае площадь фигуры $APBMNA$, ограниченной сверху адиабатой Пуассона, больше площади трапеции $AEBMNA$, ограниченной сверху секущей AEB , т. е. энтропия в ударной волне сжатия убывает (это видно и из формулы (1.88)). В то же время благодаря тому, что наклон секущей меньше наклона касательной в точке A , скорость распространения ударной волны по невозмущенному газу меньше скорости звука, а поскольку наклон секущей AEB больше наклона касательной в точке B , скорость за разрывом сверхзвуковая.

Наоборот, в ударной волне разрежения энтропия растет (см. формулу (1.88)). Как видно из сопоставления наклонов секущей AC и касательных в точках A и C) скорость перед разрывом сверхзвуковая, а за разрывом — дозвуковая.

Таким образом, и в веществе с аномальными свойствами условие возрастания энтропии совпадает с условием механической устойчивости $u_0 > c_0$ и условием, допускающим причинную связь между внешними факторами и распространением волны:

$u_1 < c_1$. В аномальном веществе невозможны ударные волны сжатия, но возможны ударные волны разрежения. Вызванное движением поршня сжатие в таком веществе будет распространяться в виде волны, постепенно расширяющейся

наподобие волн разрежения в обычном газе. Ударный разрыв вообще не возникнет и движение будет адиабатическим. Волна же разрежения будет распространяться в виде крутого фронта, который не будет расширяться с течением времени и толщина которого будет определяться значениями вязкости и теплопроводности.

В обычных условиях все вещества — газообразные, твердые и жидкие — обладают нормальными, свойствами: адиабатическая сжимаемость их уменьшается с возрастанием давления. Аномального поведения вещества можно ожидать вблизи критической точки жидкость — газ. Действительно, еще задолго до критической точки изотермы газа имеют перегиб (в критической точке перегиб становится горизонтальным). Для вещества с достаточно большой молекулярной теплоемкостью, у которого показатель адиабаты близок к единице, адиабаты и изотермы отличаются мало, и можно ожидать, что вне области двухфазных состояний адиабаты также будут иметь перегиб, т. е. обладать областью, с

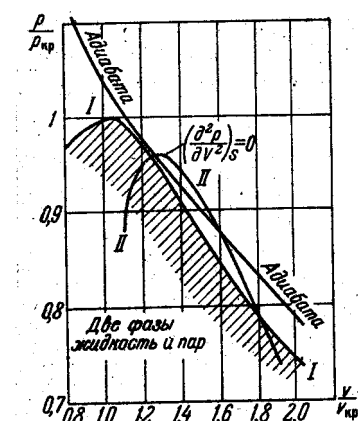


Рис. 1.37. Адиабата с аномальной выпуклостью в вандер-ваальсовом газе с теплоемкостью $c_V = 40$ кал/град-моль.

Заштрихована область двухфазных систем. Кривая II ограничивает область состояний с аномальной выпуклостью адиабат. Под кривой II $(\partial^2 p / \partial v^2)_s < 0$.

аномальным знаком второй производной, как это показано на рис. 1.37, взятом из книги Я. Б. Зельдовича [2].

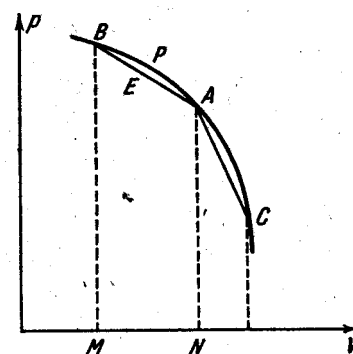


Рис. 1.36. Адиабата Пуассона вещества с аномальными свойствами в геометрической интерпретации соотношений для ударных волн сжатия и разрежения.

Кривая на этом рисунке ограничивает область двухфазной системы, а кривая II есть геометрическое место точек перегиба адиабат $(\partial^2 p / \partial V^2)_S = 0$. Она отделяет область, в которой $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$. На рис. 1.37 проведена также одна адиабата, обладающая аномальностью. Кривые рассчитаны с помощью модельного уравнения состояния Ван-дер-Ваальса для случая теплоемкости $c_V = 40$ кал/град-моль.

Связь знака приращения энтропии и неравенств, касающихся скоростей газа и звука, отвечающая обязательному совпадению условия возрастания энтропии с условием механической устойчивости, может нарушиться только в том случае, если в рассматриваемом интервале изменения давления осуществляются оба знака $\partial^2 p / \partial V^2$, так что адиабата Пуассона имеет больше двух точек пересечения с секущей. При этом могут возникать сложные режимы с одновременным существованием и разрывов и примыкающих к ним размытых волн.

Еще один случай аномального поведения вещества будет рассмотрен в гл. XI; аномалии в этом случае связаны с полиморфными превращениями (фазовыми переходами) твердых тел при тех высоких давлениях, которые достигаются в ударных волнах. Там же будут рассмотрены и указанные сложные режимы.

3. ВЯЗКОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ГАЗОДИНАМИКЕ

§ 20. Уравнения одномерного движения газа

Диссипативные процессы — вязкость (внутреннее трение) и теплопроводность — связаны с существованием молекулярной структуры вещества. Они создают дополнительный, негидродинамический перенос импульса и энергии и приводят к неадиабатичности движения, к термодинамически необратимому превращению механической энергии в тепло.

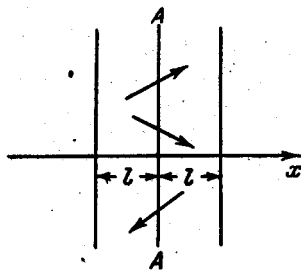


Рис. 1.38. Схема, поясняющая вывод формулы для молекулярного переноса импульса.

Вязкость и теплопроводность проявляются только при наличии больших градиентов гидродинамических величин, которые имеют место, например, в пограничном слое при обтекании тел или внутри фронта, ударной волны. В этой книге вязкость и теплопроводность нас будут интересовать в основном с точки зрения их влияния на внутреннюю структуру фронта ударных волн в газах. При изучении этой структуры течение можно считать зависящим от одной координаты x (плоским), так как толщина фронта ударной волны всегда намного меньше радиуса кривизны его поверхности. Поэтому мы не будем останавливаться на выводе общего уравнения движения вязкой жид-

кости (газа), который можно найти, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1], и поясним только, как можно получить уравнения для одномерного, плоского случая.

Запишем уравнение сохранения импульса для невязкого газа (1.7) в плоском случае, когда все величины зависят только от одной координаты x и скорость имеет только одну x -вую компоненту u

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = - \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad \Pi_{xx} = p + \rho u^2.$$

Примем во внимание теперь, что газ состоит из сталкивающихся друг с другом молекул. Представим себе площадку единичного сечения, перпендикулярную к оси x . Эту площадку с обеих сторон пронизывают молекулы, летящие в определенных направлениях после того, как они испытали последнее столкновение. Молекулы выходят после последнего столкновения из слоев толщиной порядка среднего свободного пробега молекул l , граничащих с площадкой с обеих сторон (рис. 1.38). Если n — число молекул в 1 см^3 , а v — их средняя тепловая скорость, то в 1 сек площадку пересекает слева направо порядка $n v$ молекул. Каждая из них переносит через площадку гидродинамический импульс mv , где m — масса молекулы, т. е. плотность потока гидродинамического импульса слева направо по порядку величины равна $n v m v$. Аналогично, поток гидродинамического импульса справа налево равен примерно $n v m (v + \Delta u)$, где Δu — приращение гидродинамической скорости при переходе от левого слоя к правому: $\Delta u \approx (\partial u / \partial x) l$. Связанная с молекулярным переносом плотность потока x -й компоненты импульса в x -направлении равна разности потоков слева направо и справа налево, т. е. $- n v m l (\partial u / \partial x)$. Эта величина и соответствует дополнительно переносу импульса за счет внутреннего трения; она должна быть добавлена к плотности потока импульса $\Pi_{xx} = p + \rho u^2$.

Более строгое рассмотрение, основанное на изучении трехмерного движения, показывает, что в написанное выражение следует ввести численный коэффициент порядка единицы. А именно, уравнение сохранения импульса с учетом вязкости в плоском случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = - \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad \Pi_{xx} = p + \rho u^2 - \sigma', \quad \sigma' = \frac{4}{3} \eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.90)$$

где η — коэффициент вязкости, который для газов (при отсутствии релаксационных процессов; см. ниже) по порядку величины равен

$$\eta \sim n \bar{v} m l = \bar{\rho} \bar{v} l.$$

Величина σ' представляет собой xx -компоненту тензора вязких напряжений. Появление ее в формуле для потока импульса эквивалентно возникновению добавочного «давления», обязанного силам внутреннего трения. От уравнения (1.90) с помощью уравнения непрерывности легко перейти к уравнению движения

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} (p - \sigma'). \quad (1.91)$$

$\partial \sigma' / \partial x$ есть сила внутреннего трения, рассчитанная на 1 см^3 газа.

При наличии диссипативных процессов дополнительные члены появляются и в уравнении энергии. С добавочным, «вязким» давлением связан дополнительный поток энергии. К выражению плотности потока энергии, которое стоит под знаком дивергенции в формуле (1.10), надо прибавить величину $-\sigma' u$, аналогичную ρu . Кроме того, в это выражение следует ввести еще и поток энергии, переносимой механизмом теплопроводности:

$$J = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.92)$$

где κ — коэффициент теплопроводности. Выражение (1.92) легко получить таким же путем, каким был найден вязкий поток импульса. При этом оказывается, что в газах коэффициент теплопроводности по порядку величины равен $\kappa \sim \rho c_p v l$.

С учетом обоих диссипативных членов уравнение энергии (1.10), записанное для плоского случая, приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + pu - \sigma' u + J \right]. \quad (1.93)$$

Преобразуя это уравнение с помощью уравнений непрерывности, движения и термодинамического тождества $T dS = d\varepsilon + p dV$, получим уравнение для скорости изменения энтропии частицы вещества:

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \sigma' \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{4}{3} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (1.94)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет собой механическую энергию, диссипируемую в 1 см^3 в 1 сек за счет вязкости. Он всегда положителен, так как $\eta > 0$ и $(\partial u / \partial x)^2 > 0$; следовательно, силы внутреннего трения приводят к локальному повышению энтропии вещества. Второй член соответствует нагреванию или охлаждению вещества вследствие теплопроводности. Он может быть как положительным, так и отрицательным, так как теплопроводность приводит к перекачиванию тепла из более нагретых областей в менее нагретые. Однако энтропия всего вещества в целом вследствие теплопроводности только возрастает. В этом можно убедиться, если поделить уравнение (1.94) на M и проинтегрировать по всему объему. Изменение энтропии вещества, занимающего объем, ограниченный поверхностями x_1 и x_2 , вследствие теплопроводности равно

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = \frac{1}{T} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\kappa}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Если вещество теплоизолировано на границах x_1 и x_2 , то потоки тепла на границах исчезают и остается только второй член в правой части, который всегда положителен ($\kappa > 0$).

Уравнения газодинамики, записанные с учетом вязкости и теплопроводности, позволяют судить о том, при каких условиях роль этих диссипативных процессов может оказаться существенной.

Сравним инерционные силы в уравнении движения с силами вязкостными. Если U — масштаб скорости движения, а d — характерные размеры области, охваченной движением, то масштаб времени порядка d/U и инерционный член $\rho du/dt$ порядка $\rho U^2/d$. Член вязкости в уравнении $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ порядка $\eta U/d^2$ и отношение его к инерционному порядка

$$\frac{1}{\text{Re}} = \frac{\eta}{\rho U d} = \frac{\nu}{U d} \sim \frac{l}{d} \frac{c}{U}.$$

Обратная величина этого отношения носит название числа Рейнольдса ($\nu = \eta/\rho \sim l\nu \sim lc$ — кинематическая вязкость, $c \sim \nu$ — скорость звука). Аналогичным путем, сравнивая перенос тепла путем теплопроводности с механическим переносом энергии, найдем, что отношение их порядка

$$\frac{1}{\text{Pe}} = \frac{\kappa}{\rho c_p U d} \sim \frac{\chi}{U d} \sim \frac{l}{d} \frac{c}{U},$$

где Pe — число Пекле, близкое в газах к числу Рейнольдса, так как коэффициент молекулярной температуропроводности $\chi = \kappa/\rho c_p$ близок к коэф-

фициенту кинематической вязкости ν . (Например, в воздухе при нормальных условиях $\nu \approx \chi \approx 0,15 \text{ см}^2/\text{сек}$).

Таким образом, вязкостью и теплопроводностью можно пренебречь при $\text{Re} \approx \text{Pe} \gg 1$. Если рассматривать движение со скоростями, меньшими или сравнимыми со скоростью звука, размеры системы для этого должны быть гораздо больше длины пробега молекул $d/l \gg 1$. Это условие, как мы увидим, не выполняется, в частности, в области фронта ударной волны, толщина которой сравнима с длиной пробега молекул. Поэтому внутри фронта ударной волны диссипативные процессы оказываются существенными. Именно они и приводят к возрастанию энтропии в ударной волне.

§ 21. Замечания о второй вязкости

При написании уравнений газодинамики и использовании термодинамической связи между давлением и другими термодинамическими характеристиками вещества молчаливо предполагалось, что давление p , определяющее силы в движущемся газе, не отличается от статического давления $p_{\text{ст}}$, измеренного в покоящемся газе в тех же условиях (т. е. при таких же составе газа, его плотности, внутренней энергии, температуре). Давление есть величина скалярная, не зависящая от выбора системы координат, от направлений скорости движения и градиента скорости. Требование скалярности давления, инвариантности его по отношению к преобразованиям координат, допускает предположение более общее, чем предположение о зависимости только от термодинамического состояния вещества. Давление, вообще говоря, может зависеть от скаляра — дивергенции скорости. При небольших градиентах, ограничиваясь первыми членами разложения, как и при выводе вязких сил, можно записать общее выражение

$$p = p_{\text{ст}} - \xi \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.95)$$

где коэффициент ξ характеризует зависимость сил, действующих в веществе, от скаляра $\operatorname{div} \mathbf{u}$. Коэффициент ξ называется второй вязкостью. В отличие от нее, коэффициент η , первая вязкость, характеризует силы, зависящие от направлений скорости и ее градиента. Коэффициент первой вязкости в газе связан с поступательным тепловым движением молекул. Если время установления статического давления порядка времени свободного пробега молекул $1/c$, то ξ имеет такой же порядок, как и η . В плоском случае оба члена с первой и второй вязкостью при этом объединяются вместе. В некоторых случаях, однако, ξ имеет аномально большое значение. Согласно уравнений непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$, т. е. коэффициент ξ характеризует зависимость давления от скорости изменения плотности.

При наличии внутренних, медленно возбуждающихся степеней свободы в веществе (например, колебаний в молекулах) и быстрых изменений состояния вещества, давление не успевает «следить» за изменением плотности и отличается от термодинамически равновесной величины. Влияние этого эффекта может быть описано с помощью коэффициента второй вязкости (см. [1]), причем чем труднее возбуждаются внутренние степени свободы, тем больше «несогласованность» изменений давления и изменений плотности и внутреннего состояния вещества, тем больше вторая вязкость. В очень

быстрых процессах, когда эта «несогласованность» (отклонение от термодинамического равновесия) особенно велика, линейная зависимость (1.95) может оказаться недостаточной и в уравнения газодинамики приходится вводить в явном виде описание релаксационных процессов — кинетики возбуждения внутренних степеней свободы. Мы познакомимся с этим явлением в главах VI, VII, VIII при рассмотрении релаксационных процессов, их влияния на структуру фронта ударных волн и поглощение ультразвука.

§ 22. Замечания о поглощении звука

В качестве примера влияния вязкости и теплопроводности на гидродинамическое движение рассмотрим процесс распространения звуковых волн с учетом этих явлений.

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн, необратимому превращению ее в тепло, т. е. поглощению звука и уменьшению его интенсивности. Формально коэффициент поглощения звука можно получить, если искать решение одномерных линеаризованных уравнений газодинамики с учетом вязкости и теплопроводности в виде плоской гармонической волны типа $\exp[i(kx - \omega t)]$, где k — волновой вектор. При этом для k получается комплексное значение, действительная часть которого дает длину волны, а мнимая — коэффициент поглощения: $k = k_1 + ik_2$, $\exp[i(kx - \omega t)] = e^{-k_2 x} e^{i(k_1 x - \omega t)}$. Коэффициент поглощения можно оценить и из физических соображений. Согласно формуле (1.94), энергия, диссипируемая в 1 см^3 в 1 сек , складывается из двух частей, отвечающих вязкости и теплопроводности. В звуковой волне с длиной волны λ эти величины — порядка $\eta u^2/\lambda^2$ и $\kappa \Delta T/\lambda^2$. Здесь u — амплитуда скорости, а ΔT — амплитуда изменения температуры в волне (последняя пропорциональна u). Энергия звука в 1 см^3 есть $\rho_0 u^2$. Доля энергии, которая поглощается в 1 сек , состоит из двух слагаемых. Член, связанный с вязкостью, порядка $(\eta u^2/\lambda^2)/\rho_0 u^2 \sim \eta/\rho_0 \lambda^2 \sim \eta \omega^2/c^2 \rho_0$. Но в 1 сек звук проходит расстояние c , так что коэффициент поглощения на единице длины порядка $\gamma_1 \sim \eta \omega^2/c^3 \rho_0$. Коэффициент поглощения на единице длины, связанный с теплопроводностью, порядка $\gamma_2 \sim (\kappa/c_p) \times (\omega^2/c^3 \rho_0)$ (в случае газов это легко понять, если учесть, что $\kappa/c_p \approx \eta$ в силу приближенного равенства кинематической вязкости $\nu = \eta/\rho$ и температуропроводности $\chi = \kappa/\rho c_p$; в газах $\gamma_1 \approx \gamma_2$). Эти выражения справедливы при малом поглощении звука, когда мало убывание амплитуды на расстояниях порядка длины волны, т. е. $\gamma \lambda \ll 1$ ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$). В газах это условие означает, что

$$\gamma \lambda \sim \frac{\eta \omega^2 \lambda}{c^3 \rho_0} \sim \frac{\nu}{\lambda^2} \frac{\lambda}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \frac{\bar{\nu}}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1,$$

т. е. выражение для коэффициента поглощения справедливо для длин волн, значительно больших пробега молекул, что фактически всегда имеет место.

В веществе с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы (при большой второй вязкости) возникают дополнительное, аномально большое поглощение, а также дисперсия звука (зависимость скорости звука от частоты). Этот вопрос будет рассмотрен в гл. VIII.

§ 23. Структура и ширина фронта ударной волны слабой интенсивности

Рассмотрим, каковы внутренняя структура и толщина того тонкого слоя в ударной волне, в котором происходит переход газа из начального состояния в конечное и который называется фронтом ударной волны. В этом слое происходят резкое сжатие вещества, изменения его давления, скорости и, как показали вычисления, основанные только на применении законов сохранения массы, импульса и энергии, — возрастание энтропии. Последнее свидетельствует о том, что в переходном слое имеет место диссипация механической энергии, необратимое превращение ее в тепло. Поэтому, чтобы понять, как происходит ударное сжатие, необходимо привлечь к рассмотрению диссипативные процессы — вязкость и теплопроводность.

Рассмотрим плоское одномерное течение вязкого и теплопроводного газа в системе координат, в которой фронт ударной волны покоится. Ширина фронта очень мала по сравнению с характерными масштабами длины для всего газодинамического процесса в целом, например, по сравнению с расстоянием от фронта ударной волны до поршня, толкающего газ и создающего волну.

Даже если поршень движется с переменной скоростью и амплитуда ударной волны меняется со временем, за то малое время Δt , в течение которого фронт проходит расстояние порядка своей ширины Δx , амплитуда волны остается практически неизменной. Поэтому на протяжении некоторого времени, малого по сравнению с общим временным масштабом газодинамического процесса, но большого по сравнению с Δt , вся картина распределения газодинамических величин во фронте волны распространяется по газу в «застывшем» виде как целое. Другими словами, в системе координат, в которой фронт покоится, течение газа можно в каждый данный момент считать стационарным.

Запишем уравнения непрерывности, импульса и энтропийное с учетом вязкости и теплопроводности для плоского стационарного случая. Поскольку процесс стационарен, частную производную по времени $\partial/\partial t$ можно опустить, а частную производную по координате $\partial/\partial x$ заменить полной d/dx :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\rho u) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(p + \rho u^2 - \frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx} \right) &= 0, \\ \rho u T \frac{dS}{dx} &= \frac{4}{3} \eta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right). \end{aligned} \quad (1.96)$$

С помощью второго закона термодинамики $T dS = dw - V dp$ и уравнений непрерывности и импульса энтропийное уравнение можно записать в форме уравнения энергии:

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u \left(w + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \eta u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} \right] = 0. \quad (1.97)$$

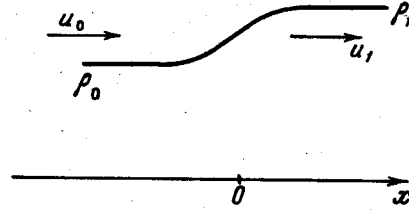


Рис. 1.39. Схема, иллюстрирующая постановку задачи о структуре фронта ударной волны.

Подчиним решение этих уравнений граничным условиям, согласно которым градиенты всех величин перед фронтом, при $x = -\infty$, и за фронтом, при $x = +\infty$, исчезают, а сами величины принимают свои начальные и конечные значения, которым мы по-прежнему приписываем индексы «0» и «1» (рис. 1.39).

Первые интегралы системы уравнений массы, импульса и энергии получаются сразу же:

$$\rho u = \rho_0 u_0, \quad (1.98)$$

$$p + \rho u^2 - \frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx} = p_0 + \rho_0 u_0^2, \quad (1.99)$$

$$\rho u \left(w + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \eta u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} = \rho_0 u_0 \left(w_0 + \frac{u_0^2}{2} \right). \quad (1.100)$$

Постоянные интегрирования здесь выражены через начальные значения величин, p , ρ , M , и рассматриваются как функции текущей координаты x ^{*)}.

Из уравнения (1.99) видно, что благодаря наличию вязкости, т. е. члена, содержащего du/dx , распределение величин по x во фронте волны должно быть непрерывным (в противном случае градиент du/dx обращался бы в бесконечность, что несовместимо с конечностью самих величин).

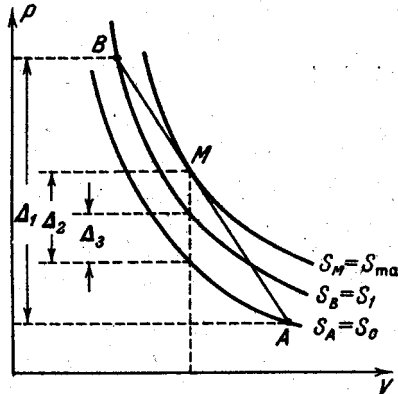


Рис. 1.40. Диаграмма p, V применительно к задаче о структуре фронта ударной волны без учета вязкости.

Состояние в волне меняется вдоль прямой AB . Отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ — первого, второго и третьего порядков малости относительно амплитуды волны.

аналогичную той, которая связывает конечные и начальные значения величин. Однако теперь это уравнение описывает и все промежуточные состояния во фронте волны. С помощью уравнения непрерывности (1.98) получим

$$p = p_0 + \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{V}{V_0} \right). \quad (1.101)$$

Таким образом, точка, описывающая состояние газа внутри фронта ударной волны, пробегает на плоскости p, V из начальной точки A в конеч-

В целях лучшего понимания ролей каждого из процессов, вязкости и теплопроводности, мы рассмотрим прежде два частных случая структуры фронта: 1) когда нет вязкости и существует одна теплопроводность; 2) когда существует одна лишь вязкость, но нет теплопроводности. Мы не будем здесь искать точные решения уравнений (этот вопрос будет рассмотрен в гл. VII, специально посвященной изучению структуры фронта ударных волн). Ограничимся лишь выяснением качественной картины явления и оценками ширины фронта.

1) *Есть теплопроводность, а вязкости нет.*; $\eta = 0$.

Этот случай замечателен тем, что уравнение импульса (1.99) приобретает форму

$$p + \rho u^2 = p_0 + \rho_0 u_0^2,$$

^{*)} При $x = +\infty$ $du/dx = 0$, $dT/dx = 0$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, $u = u_1$, и мы приходим к законам сохранения массы, импульса и энергии на разрыве (1.61), (1.62), (1.64).

ную точку B вдоль прямой AB , о которой уже много говорилось при исследовании ударной адиабаты.

Проведем через точки начального и конечного состояния на плоскости p, V адиабаты Пуассона (рис. 1.40; адиабата Гюгонио на нем не показана). Если нанести на плоскость целый ряд адиабат Пуассона с разными значениями энтропии, то мы увидим, что одна из них коснется прямой AB в некоторой точке M , как показано на рис. 1.40. В этой точке энтропия вдоль прямой AB максимальна ($S_0 < S_1 < S_M$). Из уравнений (1.98) и (1.101) следует, что скорость газа u в точке касания M в точности равна местной скорости звука ($u = c$ в точке M ; напомним, что в точке A $u_0 > c_0$, а в точке B $u_1 < c_1$).

Найдем величину максимума энтропии $S_{\max}$ из условия касания адиабаты Пуассона с $S = S_{\max}$ и прямой AB . Как мы сейчас увидим, величина $S_{\max} - S_0$ пропорциональна $(V_1 - V_0)^2$ или $(p_1 - p_0)^2$, поэтому уравнения семейства адиабат $p(V, S)$ и прямой запишем в виде разложения около точки A , опуская члены третьего порядка малости (в таком приближении адиабаты S_0 и S_1 совпадают; см. § 18). Уравнение адиабаты имеет вид:

$$p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_A} (V - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V - V_0)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{V_A} (S - S_0).$$

Уравнение прямой:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} (V - V_0) = \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_A} (V - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0) (V - V_0). \end{aligned}$$

Условие касания выражается равенством $(\partial p / \partial V)_{\text{адиаб}} = (\partial p / \partial V)_{\text{прям}}$, которое дает уравнение для определения объема V_M в точке касания M . Вычисление показывает, что точка M находится как раз посередине между точками A и B : $V_M - V_0 = 1/2 (V_1 - V_0)$. Подставляя это выражение в уравнение прямой, найдем давление в точке M , а подставляя затем найденное значение давления p_M и объем V_M в уравнение адиабаты и разрешая его относительно энтропии, получим энтропию в точке M :

$$S_M - S_0 = S_{\max} - S_0 = \frac{1}{8} \frac{(\partial^2 p / \partial V^2)_{S_A}}{(\partial p / \partial S)_{V_A}} (V_1 - V_0)^2.$$

Таким образом, максимальное изменение энтропии внутри фронта ударной волны при учете одной лишь теплопроводности есть величина второго порядка малости относительно амплитуды $V_0 - V_1$ для $p_1 - p_0$, в отличие от полного скачка энтропии $S_1 - S_0$, который третьего порядка малости относительно амплитуды. Это ясно и из геометрических соображений: наибольшее удаление прямой AB от адиабаты Пуассона $S = S_0$ на плоскости p, V пропорционально $(V_1 - V_0)^2$ или $(p_1 - p_0)^2$. Так, разность между давлениями в точке M и на адиабате S_A (или S_B) при том же самом объеме V_M равна

$$\begin{aligned} p_M(V_M) - p_{S_A}(V_M) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_M - V_0) (V_1 - V_M) = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0)^2 \quad (1.102) \end{aligned}$$

(разность давлений между точками на адиабатах S_B и S_A при одинаковом объеме V_M есть величина третьего порядка малости).

Наличие максимума энтропии внутри фронта свидетельствует о том, что профиль температуры $T(x)$ в точке, где энтропия максимальна, имеет перегиб, так что распределения температуры и энтропии в слабой ударной волне с одной лишь теплопроводностью изображаются кривыми, показанными на рис. 1.41. Это следует из энтропийного уравнения (1.97), которое в отсутствие вязкости принимает вид

$$\rho u T \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \kappa \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (1.103)$$

(в слабой волне температура меняется мало, так что коэффициент теплопроводности можно считать постоянным). Существование максимума энтропии связано с тем, что теплопроводность перекачивает тепло из области с более высокой температурой в область с более низкой. Поэтому газ, втекающий в волну, сначала нагревается за счет теплопроводности (с возрастанием энтропии), а затем охлаждается (с убыванием энтропии). В конечном счете по сравнению с начальным значением энтропия, конечно, возрастает.

Рис. 1.41. Распределения температуры и энтропии во фронте слабой ударной волны без учета вязкости.

Δx — эффективная ширина фронта.

Это иллюстрируется рис. 1.41: продвижение вдоль оси x со скоростью $u(x)$ соответствует тому, что мы следим за изменением состояния заданной частицы газа во времени.

Оценим теперь ширину фронта волны. Для этого разделим уравнение (1.103) на M и проинтегрируем его по x от начального состояния $A(x = -\infty)$, где $dT/dx = 0$, до какой-либо точки x в волне (при этом воспользуемся тем, что $\rho u = \rho_0 u_0 = \text{const}$):

$$\rho_0 u_0 (S - S_0) = \kappa \int_{-\infty}^x \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dx^2} dx = \kappa \left\{ \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} + \int_{T_0}^T \frac{dT}{dx} \frac{1}{T^2} dT \right\}. \quad (1.104)$$

Применим это уравнение к точке конечного состояния B ($x = +\infty$), где $dT/dx = 0$. При этом первый член в фигурных скобках исчезает и

$$\rho_0 u_0 (S_1 - S_0) = \kappa \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx} dT.$$

Определим эффективную ширину фронта ударной волны Δx ; при наличии одной лишь теплопроводности равенством

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = \left| \frac{dT}{dx} \right|_{\max},$$

геометрический смысл которого ясен из рис. 1.41. Полагая для оценки интеграла $dT/dx \sim (T_1 - T_0)/\Delta x$, найдем

$$\rho_0 u_0 (S_1 - S_0) \sim \kappa \frac{1}{T_0^2} \frac{(T_1 - T_0)^2}{\Delta x}.$$

Выражая скачок температуры через скачок давления, получим:

$$T_1 - T_0 = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s (p_1 - p_0) = \frac{V_0}{c_p} (p_1 - p_0),$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении; воспользовавшись формулой (1.89) для скачка энтропии и имея ввиду приближенные равенства

для газов $(\partial^2 V / \partial p^2)_S \sim V_0 / p_0^2$, $\kappa \sim \rho_0 c_p / l c_0$, а также то, что $u_0 \approx c_0$, получим из (1.104) оценку ширины фронта:

$$\Delta x \sim l \frac{p_0}{p_1 - p_0}. \quad (1.105)$$

Ширина фронта обратно пропорциональна амплитуде волны, причем масштабом ее служит длина пробега молекул l .

Из уравнения (1.104) можно оценить и величину максимального приращения энтропии. В точке максимума энтропии $dS/dx = 0$ градиент dT/dx максимален. При этом основную роль в фигурной скобке (1.104) играет первый член, который пропорционален $\Delta T / \Delta x \sim \Delta p / \Delta x \sim (\Delta p)^2$, тогда как второй член пропорционален $(\Delta T)^2 / \Delta x \sim (\Delta p)^3$. Отсюда видно, что $S_{\max} - S_0 \sim (\Delta p)^2$, тогда как $S_1 - S_0 \sim (\Delta p)^3$.

Рассматривая внутреннюю структуру фронта ударной волны с учетом одной лишь теплопроводности, можно утверждать только то, что температура в волне меняется непрерывным образом. Что касается других величин: плотности, скорости, давления, то они, вообще говоря, могут испытывать разрыв. И действительно, рассмотрение структуры ударных волн без учета вязкости показывает, что при достаточно большой амплитуде построить непрерывное распределение для всех величин в волне невозможно. Эта трудность была отмечена еще Рэлеем (подробно об этом см. § 3, гл. VII). Она указывает на принципиальную роль вязкости в осуществлении необратимого ударного сжатия вещества в волне. Рассмотрим теперь второй частный случай.

2) *Есть вязкость, а теплопроводности нет:* $\kappa = 0$.

При этом следует сохранить общее уравнение импульса (1.99). На плоскости p, V точка, описывающая состояние в волне, пробегает путь от точки A до точки B уже не вдоль прямой AB , а вдоль некоторой кривой линии, изображенной на рис. 1.42 пунктиром. Из энтропийного уравнения без члена теплопроводности

$$\rho u T \frac{dS}{dx} = \eta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \quad (1.106)$$

следует, что энтропия в волне монотонно возрастает от начального значения $S_0 = S_A$ до конечного $S_1 = S_B$, так что пунктирная линия целиком заключена между адиабатами Пуассона S_0 и S_1 (см. рис. 1.42).

Поскольку адиабаты обращены выпуклостью вниз $((\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0)$, пунктирная линия лежит целиком ниже прямой AB ^{*}.

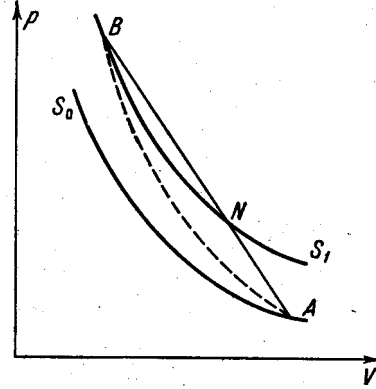


Рис. 1.42. Диаграмма p, V применительно к задаче о структуре фронта ударной волны без учета теплопроводности.

Состояние в волне меняется вдоль пунктирной кривой AB .

^{*}) В самом деле, вертикальное расстояние между адиабатами S_1 и S_0 пропорционально $S_1 - S_0 \sim (p_1 - p_0)^3$, тогда как вертикальное расстояние между точками A и B есть $p_1 - p_0$. Поэтому участок прямой AN , на котором пунктирная линия в принципе могла бы пройти выше прямой, есть величина малая по сравнению с основной частью прямой NA .

Уравнение кривой, вдоль которой происходит переход от точки A в точку B , есть

$$p = p_0 + \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{V}{V_{01}}\right) + \frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx}. \quad (1.107)$$

Поскольку кривая целиком лежит ниже прямой, во всех точках внутри волны $du/dx < 0$. Если ось x направлена в сторону движения газа, то $u > 0$, т. е. газ в волне только тормозится, а следовательно, монотонно сжимается. Таким образом, и рассмотрение структуры фронта ударной волны с учетом

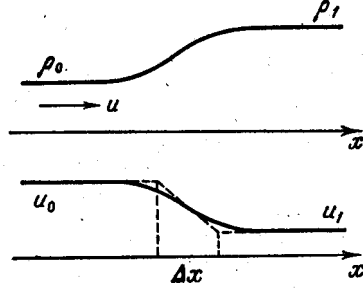


Рис. 1.43. Профили плотности и скорости во фронте ударной волны; Δx — эффективная ширина волны.

вязкости приводит к тому, что при $(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$ возможно только сжатие газа в ударной волне. Профили скорости и плотности в волне имеют вид, изображенный на рис. 1.43.

Определим эффективную ширину фронта Δx ; равенством^{*)}

$$\frac{u_0 - u_1}{\Delta x} = \left| \frac{du}{dx} \right|_{\max}^*, \quad (1.108)$$

аналогично предыдущему. Геометрический смысл его ясен.

Максимальная абсолютная величина градиента $|du/dx|_{\max}$ определяется согласно (1.107) максимальным вертикальным отклонением прямой AB от пунктирной линии, т. е. от адиабат Пуассона S_0 или S_1 . Это отклонение, как мы уже знаем, соответствует середине отрезка AB и дается формулой (1.102). Таким образом,

$$\frac{4}{3} \eta \left| \frac{du}{dx} \right|_{\max} = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0)^2.$$

Подставляя это выражение для $|du/dx|_{\max}$ в (1.108), замечая, что $\eta = \rho_0 \nu \sim \rho_0 l \bar{\nu} \sim \rho_0 l c_0$ (ν — кинематическая вязкость), а также, что

$$u_0 - u_1 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)} \sim \sqrt{(p_1 - p_0)^2 \left| \frac{\partial V}{\partial p} \right|} \sim \frac{p_1 - p_0}{p_0} c_0, \\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S \sim \frac{p_0}{V_0^3},$$

придем к формуле (1.105) для ширины фронта:

$$\Delta x \sim l \frac{V_0}{V_0 - V_1} \approx l \frac{p_0}{p_1 - p_0}.$$

Ширину фронта можно оценить и с помощью энтропийного уравнения (1.106) аналогично тому, как это было сделано в первом случае:

$$\rho_0 u_0 T_0 \frac{S_1 - S_0}{\Delta x} \sim \eta \frac{(u_0 - u_1)^2}{\Delta x^2}.$$

Подставляя сюда выражение (1.89) для скачка энтропии и проделывая простые преобразования, придем к прежней формуле для Δx . При построении непрерывного решения с одной только вязкостью никаких трудностей,

^{*)} Δx называют иногда шириной фронта по Прандтлю.

подобных тем, которые появляются при учете одной лишь теплопроводности, не возникает. Это обстоятельство, как уже отмечалось, имеет глубокое физическое основание и свидетельствует о принципиальной роли вязкости в осуществлении ударного сжатия. Именно вязкость является тем механизмом, благодаря которому происходит необратимое превращение в тепло части кинетической энергии набегающего на разрыв потока, т. е. трансформация энергии направленного движения молекул газа в энергию хаотического движения за счет рассеяния их импульса. Теплопроводность в этом отношении играет косвенную роль, так как она приводит лишь к переносу энергии хаотического движения молекул из одного места, в другое, но не влияет непосредственно на направленное движение.

Если рассматривать ударные волны не слишком большой амплитуды в обычном газе, в котором транспортные коэффициенты — кинематическая вязкость ν и температуропроводность χ — примерно одинаковы и определяются одной и той же длиной пробега молекул l ($\nu \approx \chi \sim lc$), то мы по-прежнему получим формулу (1.105) для ширины фронта. В этом легко убедиться, рассматривая общее энтропийное уравнение (1.98) с учетом как вязкости, так и теплопроводности.

Формула (1.105) показывает, что при скачке давления в волне порядка величины самого давления перед фронтом ширина фронта порядка длины пробега молекул. При дальнейшем увеличении амплитуды волны, если пользоваться той же формулой, ширина становится меньше пробега. Этот результат, конечно, не имеет физического смысла. Если газодинамические величины сильно меняются на расстояниях порядка пробега молекул, то теряет силу гидродинамическое рассмотрение вязкости и теплопроводности, в основе которого лежит предположение о малости градиентов. Ширина сколь угодно сильной ударной волны, конечно, не может стать меньше пробега молекул, о чем свидетельствует рассмотрение, основанное на использовании кинетического уравнения для газа (см. гл. VII).

В некоторых условиях возможно значительное уширение фронта сильных ударных волн до расстояний, измеряемых многими пробегами, и разделение его на области плавного и резкого изменения величин. В частности, это происходит в газе с замедленным возбуждением некоторых степеней свободы молекул или при протекании обратимой химической реакции в волне. Эти вопросы, так же как и целый ряд других, возникающих при более детальном изучении внутреннего строения фронта ударных волн, будут рассмотрены подробно в гл. VII.

4. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ

§ 24. Распространение произвольного разрыва

Газодинамические величины по обе стороны фронта ударной волны не независимы. Они связаны определенными соотношениями, выражающими законы сохранения массы, импульса и энергии. При этом разрыв, ударная волна сжатия в веществах с нормальными термодинамическими свойствами, распространяется по веществу как некое устойчивое образование, не расплываясь.

Между тем возможна такая постановка задачи, когда в начальный момент в газе имеется поверхность разрыва, по обе стороны которой газо-

динамические величины никак не связаны между собою, совершенно произвольны. Такие разрывы называют произвольными.

Приведем несколько практических примеров, показывающих, как возникают произвольные разрывы. Представим себе трубу, разделенную тонкой перегородкой (заслонкой). Труба наполнена газом, причем плотность и давление, а вообще говоря, и сорт газа по правую сторону заслонки, — одни, а по левую — другие. Пусть в некоторый момент заслонка быстро удаляется. В этот момент в месте, где была заслонка, соприкасаются две обла-

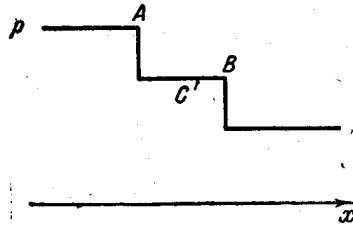


Рис. 1.44. Профиль давления в системе следующих друг за другом двух небольших скачков сжатия.

Волна A бежит по газу, находящемуся перед ней, со скоростью, большей скорости звука c' в этом газе. Волна B бежит по газу, находящемуся за нею, с дозвуковой скоростью, меньшей c' . Поэтому скачок A в конце концов догоняет скачок B .

ти, два покоящихся газа с совершенно произвольно задаваемыми плотностями и давлениями. Если давления в обоих газах различны, то после удаления заслонки газы под действием перепада давления придут в движение. Вторым пример. Предположим, что до трубы, наполненной газом, с обоих концов запущены ударные волны с произвольно задаваемыми амплитудами. В момент столкновения обеих волн где-то посередине трубы возникает поверхность, разделяющая газы с произвольными давлениями, скоростями и температурами (возможные различия в плотностях в этом примере несколько ограничены; скажем, если обе волны очень сильные, то плотности в них одинаковы и равны предельным).

После столкновения волн движение газа

как-то изменится. Третий пример. К теории ударных волн мы подошли, рассматривая движение газа под действием поршня, начавшего вдвигаться в газ с постоянной скоростью. В этом случае ударная волна образуется непосредственно у поршня, в начальный момент, и распространяется по газу с постоянной скоростью. В действительности, конечно, поршень, обладая конечной массой, не может мгновенно приобрести конечную скорость и набирает ее, постепенно ускоряясь под действием приложенной к нему силы. При этом ударная волна образуется не сразу и вдали от поршня.

Можно заменить плавный закон изменения скорости поршня со временем $U(t)$ некой ступенчатой кривой, разбивая время на мельчайшие промежутки и полагая, что в каждом таком промежутке времени скорость поршня постоянна, а по истечении его меняется скачком на небольшую величину. При этом линия движения поршня на плоскости x, t изобразится ломаной кривой, состоящей из маленьких прямолинейных отрезков. В течение каждого небольшого отрезка времени, на протяжении которого скорость поршня постоянна, поршень посылает вперед возмущение — волну сжатия, т. е. слабую ударную волну. Эта волна бежит по газу со скоростью, чуть превышающей скорость звука, тогда как предыдущая слабая ударная волна, возникшая от предыдущего скачка скорости поршня, распространяется относительно движущегося за нею газа со скоростью чуть меньше звуковой, как показано на рис. 1.44. Поэтому каждая последующая ударная волна нагоняет предыдущую и несомые ими сжатия накапливаются. Если провести на плоскости x, t характеристики, выходящие с линии движения поршня, то они будут пересекаться (рис. 1.45). Можно задать такой закон ускорения поршня, чтобы все эти слабые ударные волны нагоняли друг друга в один момент и в одной точке. При этом все многочисленные маленькие импульсы

сжатия кумулируются в один большой скачок. (Все характеристики пересекаются в одной точке.)

Состояние газа в этом скачке-разрыве меняется от невозмущенного до конечного почти адиабатически. В самом деле, если все сжатие исходного газа до давления p мы разбили на n этапов — га слабых ударных волн со скачком давления $\Delta p = (p - p_0)/n$, то в каждом из них прирост энтропии ΔS пропорционален $(\Delta p)^3 \sim 1/n^3$ и полное приращение энтропии при кумуляции n волн пропорционально $n\Delta S \sim 1/n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, состояния газа по обе стороны возникшего в результате кумуляции разрыва связаны адиабатой Пуассона. Между тем в ударной Гволне состояния по обе стороны разрыва связаны между собою не адиабатой Пуассона, а адиабатой Гюгонио. Следовательно, величины по обе стороны разрыва не удовлетворяют законам сохранения и разрыв является произвольным.

Обобщая случаи, представленные приведенными примерами, поставим идеализированную задачу об отыскании движения газа, в котором возник произвольный разрыв. Пусть в начальный момент $t=0$ в плоскости $x=0$ терпят разрыв все величины: давление, плотность, скорость, температура. По обе стороны разрыва все эти величины постоянны. Сорта газов по обе стороны также могут различаться. Чем больше то расстояние от поверхности разрыва, на котором Параметры газа можно еще считать постоянными, тем дольше в времени будет справедливо решение, к которому мы придем (эта задача была впервые решена Н. Е. Кочиным [3]).

Поскольку в условиях задачи не содержится характерных длин и времен, следует искать движение, зависящее только от отношения x/t . В § 11 было показано, что автомодельное плоское течение газа может описываться решениями только двух типов: возможны центрированные простые волны разрежения и движения, в которых все газодинамические величины постоянны. Кроме того, могут возникать разрывы — ударные волны.

Таким образом, искомое движение следует конструировать из трех элементов: волн разрежения, областей постоянного течения и ударных разрывов. Совокупность возможных движений ограничивается тем, что в одну сторону не может двигаться более одной волны (все равно какой — разрежения или ударной).

В самом деле, ударная волна распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью, а по сжатому в ней — с дозвуковой. Волна разрежения бежит по газу со скоростью звука. Если, например, по газу вправо идет ударная волна, то следующая за нею в том же направлении волна разрежения, а тем более ударная волна, непременно догонит ее через некоторое время. Но в силу автомодельности обе волны выходят из одной точки $x=0$ в один и тот же момент $t=0$. Поэтому одна волна как бы уже догнала другую в самый начальный момент и обе они распространяются в виде одной. Точно так же невозможно следование второй волны за волной разрежения. Ударная волна догнала бы волну разрежения, а вторая волна разрежения двигалась бы за первой на фиксированном расстоянии, которое

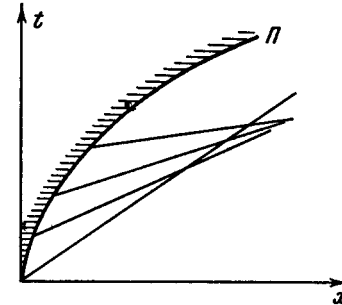


Рис. 1.45. Пересечение характеристик при сжатии газа ускоряющимся поршнем. Π — линия поршня.

в силу автомодельности равно нулю, так что различие между обеими волнами исчезает.

Итак, искомое решение может быть построено только в виде какой-либо комбинации из двух волн, ударных и разрежения, распространяющихся в противоположные стороны от начального разрыва и разделенных областями постоянного течения. Этих областей, вообще говоря, две. Они разграничены плоскостью, разделяющей те газы, которые в начальный момент располагались по обе стороны произвольного разрыва. Поскольку в гидродинамике идеальной жидкости диффузия молекул не принимается во внимание, взаимного проникновения газов друг в друга нет, и граница между ними будет

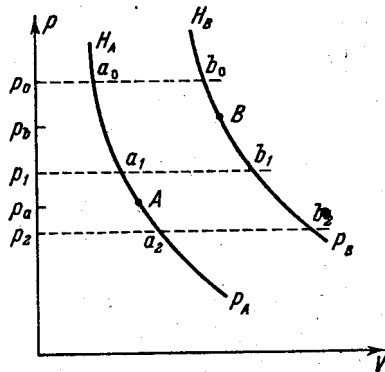


Рис. 1.46. p, V -диаграмма, иллюстрирующая различные случаи распада произвольного разрыва.

Точки A и B описывают начальные состояния газов A и B ; $H_A A$ и $H_B B$ — ударные адиабаты; AP_A , BP_B — адиабаты Пуассона газов A и B .

сохраняться, как-то передвигаясь в пространстве вместе с газами. Случай, когда газы одного сорта, очевидно, не представляет принципиального отличия (представим себе мысленно, что молекулы газа по одну сторону начального разрыва «окрашены»). Эта плоская граница между двумя газами, которая может быть названа контактной границей или контактным разрывом, обладает особыми свойствами. Очевидно, давления и скорости газов по обе стороны контактного разрыва совпадают друг с другом. В противном случае около него возникло бы движение и области газа по обе стороны перестали бы быть областями постоянного течения. Плотности же, температуры и энтропии газов по обе стороны контактного разрыва могут оставаться произвольными в соответствии

с произволом в начальных значениях. Различие этих величин при равенстве давлений и скоростей никак не может привести газы в относительное движение (разумеется, в предположении об отсутствии диффузии и теплопроводности, к влиянию которых мы вернемся несколько ниже).

Контактный разрыв покоится относительно газов и не посылает возмущений, которые могли бы повлиять на бегущие в обе стороны от него волны (ударные и разрежения).

Перечислим возможные движения газа после возникновения произвольного разрыва, как говорят, случаи распада разрыва, составляя различные комбинации из волн разрежения и ударных. Именно, может представиться три типичных случая: 1) в обе стороны от разрыва распространяются ударные волны, 2) в одну сторону бежит ударная волна, а в другую — волна разрежения, и 3) в обе стороны бегут волны разрежения.

Разберем эти случаи более подробно. Для этого удобно воспользоваться диаграммой p, V (рис. 1.46). Прежде всего зафиксируем на диаграмме начальные состояния газов. Точка A представляет газ слева от разрыва, точка B — справа. Пусть для определенности давление в точке $A(p_a)$ меньше, чем p_b . Проведем из этих точек вверх адиабаты Гюгонио, описывающие сжатие газов в ударных волнах, а вниз — адиабаты Пуассона, вдоль которых происходит расширение газов в волнах разрежения. После распада разрыва давления в обоих газах в областях, подвергшихся воздействию волн, выравниваются.

1. Пусть это новое давление p_0 больше начальных p_a и p_b . В этом (первом) случае и вправо и влево от произвольного разрыва (или от контактной поверхности) идут ударные волны сжатия (рис. 1.47, а).

Газы за ними находятся в состояниях a_0 и b_0 с одинаковыми давлениями p_0 и скоростями. Газ в состоянии a_0 движется относительно исходного газа в состоянии A влево, а газ b_0 относительно газа B — вправо. Поскольку газы a_0 и b_0 движутся с одинаковой скоростью, необходимо, чтобы газы A и B в начальный момент двигались навстречу друг другу. Две ударные волны образуются при столкновении двух газов, движущихся навстречу друг другу с большой скоростью (вспомним второй пример). Чем меньше скорость столкновения, тем ниже получается давление p_0 в ударных волнах.

2. При некоторой малой скорости столкновения возникает новый режим, в котором давление p_1 еще больше давления p_a , но меньше, чем p_b . В этом (втором) случае по газу A после распада разрыва распространяется ударная волна, а по газу B — волна разрежения (рис. 1.47, б). В частности, такой режим осуществляется, когда начальные скорости обоих газов, A и B , одинаковы и равны нулю, т. е. когда в начальный момент в покоящихся газах имеется разрыв давления, как в примере с заслонкой. Вещество начинает двигаться в сторону падения давления. Этот случай имеет важные практические применения. На этом принципе основано устройство ударной трубы, в которой получают в лаборатории сильные ударные волны, нагревающие исследуемый газ A до высокой температуры. Ударная труба разделена тонкой перегородкой (диафрагмой). По одну сторону диафрагмы в трубе содержится исследуемый газ A при низком давлении, по другую — в так называемую камеру высокого давления нагнетается рабочий газ B . После разрыва диафрагмы газ B расширяется в сторону камеры низкого давления, посылая в газ A сильную ударную волну. Возникающий режим, изображенный на рис. 1.47, б, будет более подробно рассмотрен в гл. IV при изучении работы ударной трубы. Соответствующим выбором газов A и B перепада давлений добиваются получения возможно более сильной ударной волны и нагревания исследуемого газа до весьма высоких температур. Одним из способов получения еще более высоких температур служит осуществление первого режима — столкновения двух ударных волн. Частным случаем первого режима является отражение ударной волны от торца ударной трубы, которое также используется для достижения в лаборатории высоких температур. Отражение ударной волны от твердой стенки действительно представляет собой частный случай столкновения двух газовых потоков. Если друг на друга налетают два совершенно одинаковых потока, то после столкновения контактный разрыв покоится, т. е. положение такое же, как

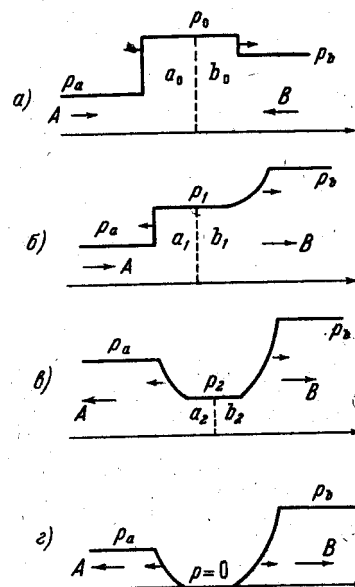


Рис. 1.47. Профили давления в различных случаях распада разрыва.

Большими стрелками с буквами A и B указаны начальные скорости газов A и B до распада разрыва. Маленькие стрелки показывают направления распространения волн по массе газа (направление распространения в пространстве может быть в некоторых случаях и иным).

будто вместо контактного разрыва имеется неподвижная твердая стенка. Вопросы столкновения ударных волн и отражения их от стенки также будут рассмотрены в гл. IV.

3. Если после распада давление p_2 меньше p_a и p_b , получим две волны разрежения, разбегающиеся вправо и влево по обоим газам. Этот режим, изображенный на рис. 1.47, в, осуществляется, если в начальный момент газы A и B двигались в противоположные стороны от разрыва с достаточно большой скоростью.

Если относительная скорость, с которой в начальный момент двигались друг от друга газы A и B , очень велика, а именно, больше суммы максимальных скоростей истечения газов A и B в вакуум, $2c_a/(\gamma_a - 1) + 2c_b/(\gamma_b - 1)$,

где c_a и c_b — начальные скорости звука, а γ_a и γ_b — показатели адиабаты газов A и B (см. § 11, формулу (1.60)), то между газами образуется пустота, $p = 0$. Этот режим, который можно рассматривать как предел третьего случая, изображен на рис. 1.47, г.

При конкретных расчетах, связанных с распадами произвольных разрывов, наряду с p , V -диаграммами очень удобны так называемые p , u -диаграммы, на которых по осям отложены давления p и скорости газов u в лабораторной системе координат. Ударную адиабату газа $p_H(V)$ можно представить в виде зависимости давления за фронтом волны от скачка скорости газа, т. е. от скорости движения сжатого газа относительно невозмущенного. Аналогичным образом, в волне разрежения давление однозначно связано со скоростью условием постоянства инварианта Римана (см. § 10, 11). Удобство p , u -диаграмм в задаче о распаде разрыва связано с тем, что в конечном состоянии давление и скорость обоих газов одинаковы, т. е. конечные состояния изображаются одной и той же точкой на p , u -диаграммах.

p , u -диаграммы для случаев распада, изображенных на рис. 1.47, а — г, показаны на рис. 1.48, а — г соответственно.

Выяснив характер движений, возникающих при распаде произвольного разрыва, можно проверить исходное допущение о том, что движение зависит только от комбинации x/t . При рассмотрении волны разрежения в § 11 это допущение обосновывалось тем, что с течением времени ширина волны разрежения, которая является масштабом длины в задаче без учета диссипативных процессов, растет как $x \sim ct$.

Роль вязкости и теплопроводности, пропорциональная $1/x$, с течением времени уменьшается и в макроскопических течениях, когда $x \gg 1$, нич-

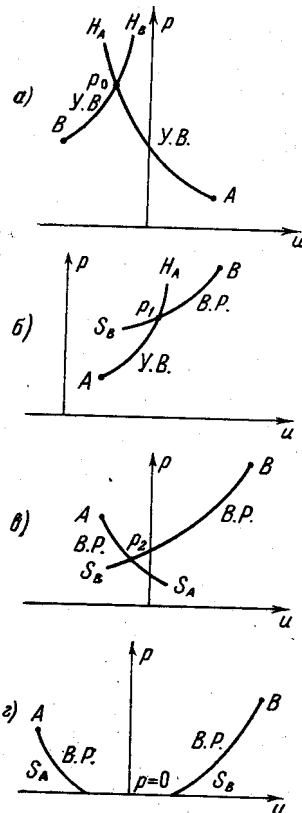


Рис. 1.48. p , u -диаграммы для различных случаев распада разрыва, изображенных на рис. 1.47.

Кривые H — ударные адиабаты в переменных p , u , кривые S — адиабаты Пуассона в переменных p , u . $U.B.$ означает ударную волну; $B.P.$ — волну разрежения.

тожно мала. Следовательно, исчезает и единственный постоянный масштаб размерности длины в газе — длина пробега молекул.

При течениях с ударными волнами вязкость и теплопроводность, носящие в уравнение масштаб длины l , действуют фактически только в тонком слое фронта волны, ширина которого порядка l . Мала также и ширина контактного разрыва. Размытие его происходит вследствие процессов диффузии молекул и теплопроводности. Оба процесса приводят к ширине разрыва порядка $\Delta x \sim \sqrt{\chi t} \sim \sqrt{Dt}$, где D — коэффициент диффузии, который близок к коэффициенту температуропроводности $D \sim \chi \sim lc$.

Расстояние, пробегаемое ударными волнами и волнами разрежения за время t , порядка $x \sim ct$, так что $\Delta x \sim \sqrt{l}x$. Таким образом, отношение размеров области, в которой действуют диссипативные силы, к размерам всей области, охваченной движением для ударной волны, порядка l/x , а для контактного разрыва $\sim \sqrt{l/x}$. Обе

величины малы в макроскопическом течении с $x \gg l$. Вернемся к третьему примеру, приведенному в начале этого параграфа, и посмотрим, какой режим возникает при распаде разрыва, который образуется в результате кумуляции волн сжатия, посылаемых ускоряющимся поршнем. В момент соединения отдельных волн с одной стороны разрыва будем иметь невозмущенный газ A , с другой — газ в состоянии B , подвергшийся практически адиабатическому сжатию. Можно показать, что скорость движения, которую приобретает газ при последовательном сжатии большим числом ударных волн,

меньше скорости, приобретаемой при однократном ударном сжатии до того же давления. Отсюда следует, что разрыв распадается как в случае 2). По сжатому газу к поршню пойдет волна разрежения, а по невозмущенному — ударная волна. Давление p окажется ниже, чем созданное на поршне давление p_b . Однако вследствие роста энтропии в ударной волне это более низкое давление отвечает более высокой температуре, так что газ в ударной волне нагреется но сравнению с почти адиабатическим нагреванием от кумуляции слабых волн. На рис. 1.49 представлены распределения p и T после распада разрыва, образовавшегося в результате кумуляции волн при сжатии воздуха поршнем, скорость которого постепенно достигла $4,44 c_0 = 1500$ м/сек, так

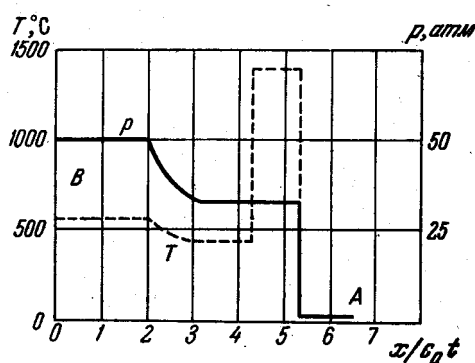


Рис. 1.49. Распространение разрыва, возникшего после столкновения совокупности последовательных волн сжатия. Температура в возникающей ударной волне значительно выше максимальной температуры, достигнутой при наложении мелких волн сжатия, а давления ниже, так как навстречу волнам сжатия идет волна разрежения. Профиль давления показан сплошной линией, профиль температуры — пунктиром.

что давление на поршне достигло $p_b = 50 p_a = 50 \text{ атм}$. Координата и время на рисунке отсчитываются от точки и момента кумуляции.

Рассмотренный случай представляет значительный интерес для теории возникновения детонации, ибо полученный результат объясняет, каким образом пламя, действуя на газ подобно поршню, может постепенным сжатием вызвать появление ударной волны на большом расстоянии от пламени (поршня). Постепенно сжимая газ до невысокой температуры (630°С на рисунке), можно осуществить резкое нагревание до 1450°С на значительном расстоянии в момент кумуляции, осуществить «дистанционное зажигание».

По-видимому, таков механизм возникновения детонации в газах в ряде случаев.

§ 25. Сильный взрыв в однородной атмосфере

Идеализированная задача о сильном взрыве в однородной атмосфере представляет собой типичный пример класса движений газа, называемых автомодельными, когда газодинамические величины меняются с течением времени таким образом, что распределения их по координате Остаются всегда подобными самим себе.

Автомодельная задача о сильном взрыве была сформулирована и решена Л. И. Седовым. Остроумным способом, путем использования интеграла энергии, Л. И. Седову удалось найти точное аналитическое решение уравнений автомодельного движения (4, 5). Задачу рассматривали также К. П. Станюкович (в диссертации; см. [151] и Тэйлор [6], которые сформулировали и исследовали уравнения, но не получили их аналитического решения.

Мы остановимся на постановке и результатах решения этой задачи, так как они понадобятся нам в дальнейшем, в гл. VIII и IX, при изучении некоторых физико-химических и оптических явлений, сопровождающих сильный взрыв в воздухе.

Пусть в газе плотности ρ_0 который будем считать идеальным, с постоянной теплоемкостью, в небольшом объеме в течение короткого промежутка времени выделяется большая энергия E . От места энерговыделения по газу распространяется ударная волна. Будем рассматривать ту стадию процесса, когда ударная волна уходит на расстояния, очень большие по сравнению с размерами области, где произошло энерговыделение, и движение охватывает массу газа, большую по сравнению с массой продуктов взрыва. При этом энерговыделение с большой точностью можно считать точечным и мгновенным.

В то же время будем считать, что стадия процесса и неслишком поздняя, так что ударная волна уходит от источника не слишком далекой ее амплитуда еще столь высока, что можно пренебречь начальным давлением газа p_0 по сравнению с давлением в ударной волне. Это эквивалентно тому, что можно пренебречь начальной внутренней энергией газа, охваченного движением, по сравнению с энергией взрыва E , и пренебречь начальной скоростью звука c_0 по сравнению со скоростями газа и фронта волны.

Движение газа определяется двумя размерными параметрами: энергией взрыва E и начальной плотностью ρ_0 . Из этих параметров нельзя составить масштабов с размерностями длины или времени. Следовательно, движение будет автомодельным, т. е. будет зависеть только от определенной комбинации координаты r (расстояния от центра взрыва) и времени t . В отличие от

автомодельного движения, рассмотренного в § 11, в задаче нет характерной скорости. Начальная скорость звука c_0 не может характеризовать процесс: в том же приближении, в котором начальное давление p_0 полагается равным нулю, равна нулю и скорость звука c_0 ^{*}). Поэтому автомодельная переменная не есть величина r/t , как в автомодельной волне разрежения (см. § 11).

Единственная размерная комбинация, содержащая длину и время, в данном случае есть E/ρ_0 : $[E/\rho_0] = \text{см}^5 \text{сек}^{-2}$. Поэтому автомодельной переменной служит безразмерная величина:

$$\xi = r \left(\frac{\rho_0}{Et^2} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (1.109)$$

Фронту ударной волны соответствует определенное значение независимой переменной ξ_0 ; закон движения фронта волны $R(t)$ описывается формулой

$$R = \xi_0 \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}. \quad (1.110)$$

Скорость распространения ударной волны равна:

$$D = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5} \frac{R}{t} = \xi_0 \frac{2}{5} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \xi_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{3}{2}}.$$

Параметры фронта выражаются через скорость фронта с помощью предельных формул для сильной ударной волны:

$$p_1 = p_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad p_1 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 D^2, \quad u_1 = \frac{2}{\gamma+1} D. \quad (1.111)$$

Плотность на фронте остается неизменной и равной своему предельному значению. Давление уменьшается с течением времени по закону

$$p_1 \sim \rho_0 D^2 \sim \rho_0 \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{5}} t^{-\frac{6}{5}} \sim \frac{E}{R^3}. \quad (1.112)$$

Легко понять физический смысл закономерностей распространения сильной взрывной волны. К моменту t волна достигает радиуса R , охватывает объем газа $4\pi R^2/3$ и массу $V = \rho_0 4\pi R^3/3$. Давление пропорционально средней энергии единицы объема, т. е. $p \sim E/R^3$. Скорости фронта и газа пропорциональны $D \sim u \sim \sqrt{p/\rho} \sim \sqrt{E/\rho_0 R^3}$. Интегрируя уравнение $dR/dt = D$, найдем зависимость радиуса фронта от времени, $R \sim (E/\rho_0)^{1/5} t^{2/5}$ (с точностью до численного коэффициента ξ_0).

Формула (1.112) демонстрирует закон подобия для перехода от одних энергий взрыва к другим. Давление на фронте имеет заданную величину на расстояниях, пропорциональных $E^{1/3}$, или же в моменты времени, пропорциональные $E^{1/3}$.

^{*}) Это условие фактически определяет границы применимости решения задачи. Предъявляя определенные требования к точности решения, мы сравниваем полученные давления во фронте волны p_1 и скорость распространения волны D с реальными значениями p_0 , c_0 и находим момент, когда приближение $p_1 \gg p_0$ становится слишком грубым. Следует отметить, что на самом деле условие справедливости пренебрежения начальным давлением несколько более жесткое, а именно: $p_1 \gg [(\gamma+1)/(\gamma-1)] p_0$. Это видно из формулы (1.76): при этом условии сжатие в ударной волне равно предельной величине $(\gamma+1)/(\gamma-1)$.

Распределения давления, плотности и скорости газа по радиусу определяются зависимостью от одной безразмерной переменной ξ , которую можно представить в виде $\xi = \xi_0 r/R$. Форма распределений в силу автомодельности не меняется с течением времени, масштабы же величин p , ρ , u зависят от времени точно так же, как и значения этих величин на фронте ударной волны. Другими словами, решение можно представить в форме

$$p = p_1(t) \tilde{p}(\xi), \quad u = u_1(t) \tilde{u}(\xi), \quad \rho = \rho_1(t) \tilde{\rho}(\xi),$$

где $p_1(t)$, $u_1(t)$, ρ_1 — давление, скорость и плотность на фронте ударной волны, которые зависят от времени по законам, описываемым формулами (1.111) и (1.112), а $\tilde{p}(\xi)$, $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{\rho}(\xi)$ — новые, безразмерные функции.

Подставляя эти выражения в уравнения газодинамики, записанные для сферически-симметричного случая, и переходя от дифференцирования по r и t дифференцированию по ξ с помощью соотношения (1.109), подобно тому как это было сделано в §11, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех неизвестных функций p , u , ρ . Решение этой системы должно удовлетворять условиям на фронте волны: при $\xi = \xi_0$, $\tilde{p} = \tilde{u} = \tilde{\rho} = 1$.

Мы не будем здесь излагать ход решения и выписывать окончательные формулы, это можно найти в книгах Л. И. Седова [5] и Л. Д. Ландау и Е. М.

Лифшица [1]. Отметим только, что единственный безразмерный параметр, вошедший в решение ξ_0 , определяется из условия сохранения энергии:

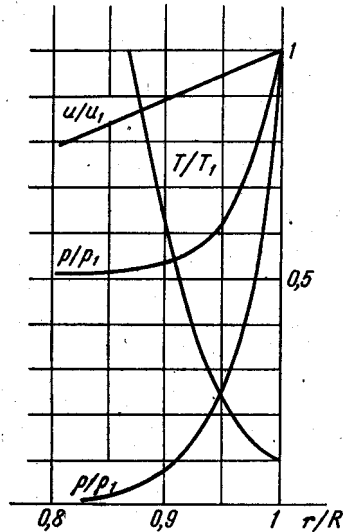
$$E = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, dr \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right), \quad (1.113)$$

если в него подставить найденное решение. Он зависит, так же, как и все решение, от показателя адиабаты γ .

В реальном воздухе показатель адиабаты не является постоянной величиной, он зависит от температуры и плотности вследствие протекающих при высокой температуре процессов диссоциации и ионизации (см. об этом гл. III). Однако приближенно всегда можно выбрать некоторое эффективное значение показателя, считая его постоянным, с тем, чтобы описать решением идеализированной задачи о сильном взрыве реальный процесс. Для воздуха можно принять значения γ равными примерно 1,2—1,3. На рис. 1.50 изображены распределения относительных величин p/p_1 , ρ/ρ_1 , u/u_1 , T/T_1 по относительной координате r/R для $\gamma=1,23$; (фактически на графике отложено не T/T_1 , а $0,1 M/M_1$); параметр ξ_0 при этом равен $\xi_0=0,930$.

Рис. 1.50. Профили давления, плотности, скорости и температуры для сильного точечного взрыва в газе с $\gamma = 1,23$.

Характерно, что при сильном взрыве плотность газа чрезвычайно резко падает от фронта ударной волны к центру. Практически вся масса газа, ранее равномерно заполнявшая сферу радиуса R , теперь собрана в тонкий слой около поверхности фронта. Давление вблизи фронта уменьшается при удалении от фронта к центру в два-три раза, а затем почти во всей сфере остается постоянным. Температура возрастает от фронта к центру, сначала ме-



нее резко, пока давление уменьшается, а затем в области постоянного давления — очень быстро. Возрастание температуры к центру связано с тем, что вблизи центра находятся частицы, которые были нагреты очень сильной ударной волной и обладают большой энтропией. При адиабатическом расширении до одинакового давления температура тем выше, чем больше энтропия частиц, т. е. чем ближе к центру они находятся. Резкое уменьшение плотности при приближении к центру связано с возрастанием температуры (давление постоянно).

Воспользовавшись условием постоянства давления по радиусу в области, не слишком близкой к фронту, можно найти асимптотическое распределение газодинамических величин при $r \rightarrow 0$. Из уравнения движения с $p(r) = \text{const}$, $\partial p / \partial r = 0$, следует, что $\partial u / \partial t + u \partial u / \partial r = 0$, т. е. $u = r/t$.

Чтобы найти асимптотический закон для плотности, перейдем к лагранжевой координате (см. § 2). Будем характеризовать данную частицу газа ее начальным радиусом r_0 (под «частицей» подразумеваем элементарный сферический слой объемом $4\pi r_0^2 dr_0$). В момент прохождения фронта ударной волны давление в ней пропорционально $p_1 \sim R^{-3} = r_0^{-3}$. Начиная с этого момента, частица r_0 расширяется адиабатически, так что в момент t ее плотность равна:

$$\varrho(r_0, t) = \varrho_1 \left[\frac{p(r_0, t)}{p_1(r_0)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Но в данный момент давления во всех частицах, находящихся в «полости» вблизи центра, одинаковы и пропорциональны $p_c(t) \sim t^{-6/5}$. Поэтому асимптотический закон для плотности в лагранжевых координатах есть $\rho \sim r_0^{3/\gamma} t^{-6/5}$. Перейдем к Эйлеровой координате при помощи определения (1.24): $\rho r^2 dr = \rho_0 r_0^2 dr_0$. Подставляя сюда функцию для плотности и интегрируя, получим зависимость эйлерова радиуса данной частицы от времени: $r \sim r_0^{(\gamma+1)/\gamma} t^{2/5}$. Исключая из этого выражения r_0 при помощи функции $\rho(r, t)$, получим искомый асимптотический закон:

$$\varrho \sim r^{-\frac{3}{\gamma-1}} t^{-\frac{6}{5(\gamma-1)}} \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Асимптотический закон для температуры:

$$T \sim \frac{p_c}{\varrho} \sim r^{-\frac{3}{\gamma-1}} t^{-\frac{6}{5} \frac{(2-\gamma)}{(\gamma-1)}} \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

§ 26. Приближенное рассмотрение сильного взрыва

Основные закономерности процесса сильного взрыва можно установить с помощью простого приближенного метода, предложенного Г. Г. Черным [7].

Предположим, что вся масса газа, охваченного взрывной волной, собрана в тонкий слой у поверхности фронта, плотность в котором постоянна и равна плотности на фронте $\rho_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1) \rho_0$. Толщина слоя Δr определяется из условия сохранения массы:

$$4\pi R^2 \Delta r \varrho_1 = \frac{4\pi R^3}{3} \varrho_0; \quad \Delta r = \frac{R}{3} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \frac{R}{3} \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Например при $\gamma = 1,3$ $\Delta r/R = 0,0435$.

Поскольку слой очень тонкий, скорость в нем почти не меняется и совпадает со скоростью газа на фронте u_1 . Положим приближенно, что плотность в слое бесконечно велика, а толщина соответственно бесконечно мала; масса же конечна и равна массе M , первоначально находившейся в сфере

радиуса R : $M = \rho_0 4\pi R^3/3$. Обозначим давление на внутренней стороне слоя через p_c . Пусть оно составляет долю α от давления на фронте волны $p_c = \alpha p_1$.

Запишем второй закон Ньютона для массы M :

$$\frac{d}{dt} M u_1 = 4\pi R^2 p_c = 4\pi R^2 \alpha p_1.$$

Масса $M = 4\pi R^3 \rho_0/3$ сама зависит от времени, так что по времени дифференцируется не скорость, а количество движения $M u_1$. На массу изнутри действует сила $4\pi R^2 p_c$, так как p_c есть сила, действующая на 1 см^2 поверхности; сила, действующая извне, равна нулю, так как начальным давлением газа пренебрегаем. Выражая u_1 и p_1 через скорость фронта $D = dR/dt$ по формулам (1.111), получим

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} R^3 D = \alpha D^2 R^2.$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = D \frac{d}{dR}$$

и интегрируя уравнение, найдем

$$D = \alpha R^{-3(1-\alpha)},$$

где α — постоянная интегрирования. Для определения величин α и a воспользуемся законом сохранения энергии. Кинетическая энергия газа равна $E_{\text{кин}} = M u_1^2/2$. Внутренняя энергия сосредоточена в «полости», ограниченной нашим бесконечно тонким слоем, давление в которой равно давлению p_c (фактически это означает, что нестрого вся масса заключена в слое, а в «полости» также имеется небольшое количество вещества).

Внутренняя энергия равна $E_T = \frac{1}{\gamma-1} \frac{4\pi R^3}{3} p_c$. Таким образом,

$$E = \frac{1}{\gamma-1} \frac{4\pi R^3}{3} p_c + M \frac{u_1^2}{2}.$$

Снова выразив $p_c = \alpha p_1$ и u_1 через D и подставляя D , получим

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \alpha^2 \left[\frac{2a}{\gamma^2-1} + \frac{2}{(\gamma+1)^2} \right] R^{3-6(1-\alpha)}.$$

Поскольку энергия взрыва E есть константа, показатель степени у переменной величины R должен обратиться в нуль. Это дает $\alpha = 1/2$. Получающееся уравнение определяет постоянную a ,

$$a = \left[\frac{3}{4\pi} \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{(3\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из формулы $D \sim R^{-3(1-\alpha)}$ с $\alpha = 1/2$ и формул (1.111) следуют уже известные нам законы:

$$D \sim R^{-\frac{3}{2}}, \quad p_1 \sim R^{-3}, \quad u_1 \sim R^{-\frac{3}{2}}, \quad R \sim t^{\frac{2}{5}}.$$

С помощью выражения для a найдем коэффициент пропорциональности в законе $R \sim t^{\frac{2}{5}}$.

$$R = \left(\frac{5}{2} a \right)^{\frac{2}{5}} t^{\frac{2}{5}} = \left[\frac{75}{16\pi} \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{(3\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{5}} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} = \xi_0 \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}.$$

Сопоставим полученное приближенное решение с точным. В приближенном решении давление в центре равно половине давления на фронте, независимо от показателя адиабаты. В точном — $p_c = 0,35 p_1$ при $\gamma = 1,4$; $p_c = 0,41 p_1$ при $\gamma = 1,2$. Численные коэффициенты ξ_0 в законе распространения ударной волны (1.110) в приближенном решении равны: $\xi_0 = 1,014$ при $\gamma = 1,4$ и $\xi_0 = 0,89$ при $\gamma = 1,2$. В точном решении при тех же значениях γ , $\xi_0 = 1,033$ и $0,89$ соответственно.

Как видим, приближенное решение дает неплохие результаты.

Соображения, по духу близкие приведенным выше, были использованы А. С. Компанейцем [13] для приближенного рассмотрения сильного взрыва в неоднородной атмосфере. См. об этом раздел 5 гл. XII.

§ 27. Замечания о точечном взрыве с учетом противодействия

На поздней стадии распространения взрывной волны, когда давление во фронте ударной волны становится сравнимым с начальным давлением газа (точнее, когда p_1 становится порядка $[(\gamma+1)/(\gamma-1)] p_0$; см. сноску на стр. 84), автомодельное решение задачи о сильном взрыве теряет силу.

Процесс на этой стадии уже не автомоделен, так как в задаче имеются характерные масштабы длины и времени, которые можно составить из величины полной энергии взрыва и начальных параметров газа. Масштабом длины служит радиус сферы, начальная энергия которой сравнима с энергией взрыва $r_0 = (E/p_0)^{1/3}$. Масштабом времени — время, за которое звук пробегает это расстояние $t_0 = r_0/c_0$, где $c_0 = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$. Так, например, при взрыве в воздухе нормальной плотности ($\rho_0 = 1,25 \times 10^{-3}$ г/см³, $p_0 = 1$ атм, $c_0 = 330$ м/сек) для энергии $E = 10^{21}$ эрг, соответствующей примерно энергии, выделяющейся при взрыве 20 000 тонн тротила, масштабы равны $r_0 = 1$ км, $t_0 = 3$ сек.

Решение задачи о распространении ударной волны точечного взрыва с учетом противодействия было получено в ряде работ [8—10] путем численного интегрирования уравнений газодинамики в частных производных. Все результаты расчетов, подробные таблицы и графики распределений газодинамических величин на разные моменты времени можно найти в указанных работах, а также в четвертом издании книги Л. И. Седова [5].

Мы ограничимся здесь лишь некоторыми замечаниями по поводу качественного характера процесса.

С течением времени амплитуда ударной волны становится все меньше и меньше, давление на фронте асимптотически приближается к начальному давлению газа — атмосферному. Соответственно уменьшаются сжатие газа во фронте волны и скорость ее распространения, которая асимптотически приближается к скорости звука c_0 . Закон распространения $R \sim t^{2,5}$ постепенно переходит в закон $R = c_0 t$. Когда давление в центральной области взрывной волны становится близким к атмосферному, расширение газа в этой области прекращается и газ останавливается. Область движения газа выносится вперед, ближе к фронту ударной волны, которая постепенно превращается в сферическую волну типа акустической. За областью сжатия в такой волне следует область разрежения, после чего воздух приходит к своему конечному состоянию. Конечное состояние слоев, далеких от центра, по которым ударная волна прошла, будучи слабой, мало отличается от начального. Распределения давления, скорости и плотности по радиусу в какой-то

поздний момент t имеют вид, изображенный на рис. 1.51. Если проследить за изменением во времени давления на определенном расстоянии от центра взрыва, то получится картина, показанная на рис. 1.52. В момент t_1 , когда к данному месту подходит фронт ударной волны, давление скачком возрастает, затем уменьшается, причем падает до величины ниже атмосферного (положительная и отрицательная фазы давления), а затем возвращается к начальной величине.

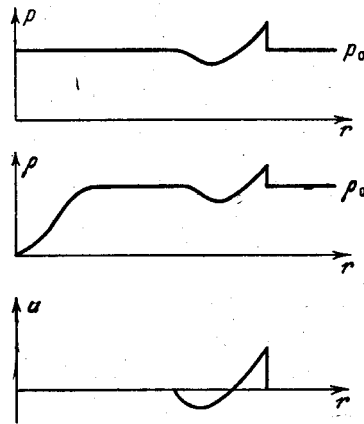


Рис. 1.51. Профили давления, плотности и скорости на поздней стадии взрыва, когда ударная волна становится слабой.

Как уже было сказано, конечное состояние газа на больших расстояниях от центра взрыва почти не отличается от начального. На малых же расстояниях газ в конечном состоянии оказывается сильно разреженным и высоконагретым. Это связано с тем, что через частицы, находящиеся вблизи центра, ударная волна прошла будучи очень сильной, и энтропия этих частиц гораздо выше начальной.

Асимптотические распределения конечных плотности и температуры по радиусу вблизи центра можно найти из условия адиабатического расширения до атмосферного давления частиц, нагретых во фронте сильной ударной волны. Повторяя вычисления, сделанные в конце § 25, но теперь уже без зависимости p_c от t , а полагая $p_c = p_0 = \text{const.}$ найдем те же самые распределения по радиусу при $r \rightarrow 0$, что и в задаче о сильном взрыве $\rho \sim r^{-3/(\gamma-1)}$, $T \sim r^{-3/(\gamma-1)}$.

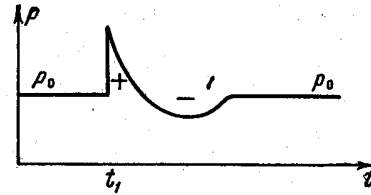


Рис. 1.52. Зависимость давления от времени в определенной точке на большом расстоянии от центра взрыва.

Конечные распределения плотности и температуры (при сильном взрыве) при сильном взрыве (в предположении адиабатичности процессу).

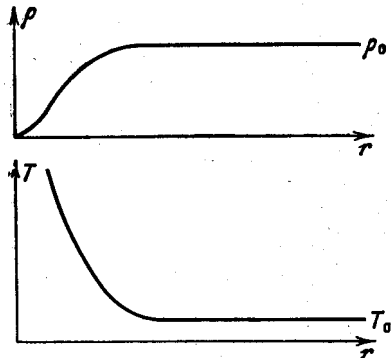


Рис. 1.53. Конечные распределения плотности и температуры ($t \rightarrow \infty$) при сильном взрыве (в предположении адиабатичности процессу).

Это — та энергия, которая пошла на необратимое нагревание газа, связанное с необратимостью процесса ударного сжатия. Остальная энергия уносится вперед вместе с ударной волной и рассеивается в пространстве. О судьбе энергии, «застрявшей» в области центра, речь пойдет в гл. IX (воздух в этой области остывает за счет светового излучения).

Поздняя стадия распространения взрывной волны изучалась теоретически и экспериментально многими авторами. Предельные законы рас-

пространения волны на больших расстояниях были найдены Л. Д. Ландау [11]. Большое практическое значение имеет эмпирическая формула М. А. Садовского [12] для давления на фронте в зависимости от расстояния от центра взрыва. Заметим, что закон подобия $p_1 = f(E^{1/3}/R)$ справедлив и на поздней стадии распространения ударной волны, когда $p_1 \rightarrow p_0 \leq p_0$.

§ 28. Адиабатический разлет в пустоту газового шара

Познакомимся еще с одной газодинамической задачей, с которой вам придется иметь дело в дальнейшем (в гл. VIII), задачей о разлете газа в пустоту.

Представим себе газовый шар, занимающий в начальный момент сферический объем радиуса R_0 . Пусть, для определенности, в начальный момент газ покоится и заполняет объем равномерно с плотностью ρ_0 (полная масса газа $M = \rho_0 4\pi R_0^3/3$). Начальное давление газа также считаем постоянным и равным p_0 , так что полная энергия газа есть $E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{4\pi R_0^3}{3} p_0$ (газ

предполагается идеальным с постоянной теплоемкостью). В момент $t = 0$ убирается заслонка, сдерживающая газ, и последний начинает беспрепятственно расширяться в пустоту.

После удаления заслонки происходит распад разрыва и по газу к центру распространяется волна разрежения. Передние слои газа расширяются в пустоту с максимальной скоростью истечения $u_{\max} = 2/(\gamma - 1) c_0$. Когда волна разрежения доходит до центра, движение — разлет — охватывает все вещество. В процессе адиабатического разлета благодаря совершаемой газом работе расширения вещество разгоняется и его начальная внутренняя энергия E постепенно переходит в кинетическую энергию радиального движения. Можно показать (см. [15]), что при изэнтропическом разлете (а наша задача изэнтропична, так как в начальный момент в силу постоянства давления и плотности по радиусу энтропии всех частиц одинаковы), возмущения из внутренних областей шара не достигают передней границы, так что она движется с постоянной скоростью $u_{\max} = 2/(\gamma - 1) c_0$. Закон движения границы газового шара есть $R = 2/(\gamma - 1) c_0 t + R_0$. Найти точное аналитическое решение поставленной задачи не удастся, так как задача не автомодельна и необходимо решать систему дифференциальных уравнений в частных производных, что удастся сделать аналитически лишь в очень редких случаях. В том, что задача не автомодельна, легко убедиться, замечая, что имеется характерный масштаб длины — начальный радиус шара R_0 .

Однако эта задача обладает той особенностью, что с течением времени движение асимптотически переходит в автомодельное. В самом деле, в стадии большого расширения при $R \gg R_0$ роль начального параметра длины R_0 становится все менее и менее существенной, так как масштаб длины становится очень малым по сравнению с характерным масштабом течения — фактическим радиусом шара R . Движение газа с течением времени как бы «забывает» о начальном радиусе R_0 . Все же движение не полностью «забы-

вает» о начальных условиях, и в этом проявляется существенная неавтономность, заложенная в рассматриваемом процессе.

Рассмотрим асимптотическое поведение решения при $t \rightarrow \infty$. Сила, действующая на единицу массы газа, при этом стремится к нулю. В самом деле, эта сила — $1/\rho \times (\partial p / \partial r)$ по порядку величины равна — $p/\rho R$, где p и ρ — некоторые Средние по массе давление и плотность в момент t . Но среднее давление p пропорционально отношению тепловой энергии всего газа к его объему $p \sim E_{\text{теп}}/R^3$ и во всяком случае меньше, чем E/R^3 . Средняя плотность $\rho \sim 1/R^3$, поэтому сила стремится к нулю во всяком случае не медленнее, чем $1/R$. На самом деле сила убывает при $R \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/R$, так как тепловая часть энергии уменьшается при адиабатическом расширении: $E_{\text{теп}} \sim M\varepsilon \sim M p/\rho \sim \rho^{\gamma-1} \sim R^{-3(\gamma-1)}$. Отсюда $p \sim E_{\text{теп}}/R^3 \sim R^{-3\gamma}$, и сила убывает как $R^{-3\gamma+2} = R^{-1-3(\gamma-1)}$. Уравнение движения в пределе $t \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ приобретает асимптотический вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} \sim \frac{1}{R^{1+3(\gamma-1)}} \rightarrow 0, \quad (1.114)$$

т. е. скорости всех частиц стремятся к постоянным значениям, причем $u = r/t$. При $t \rightarrow \infty$ разлет приобретает инерционный характер.

Это следует, и непосредственно из условия сохранения полной энергии газа E . Полная энергия складывается из тепловой и кинетической, но тепловая часть энергии при расширении асимптотически стремится к нулю, следовательно, кинетическая энергия стремится к E , и средняя скорость газовой массы асимптотически стремится к постоянному предельному значению $u_\infty = \sqrt{2E/M}$, которое находится в определенном отношении со скоростью границы:

$$u_{\max} = \frac{2}{\gamma-1} c_0 = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\varrho_0}} = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma(\gamma-1) \varepsilon_0} = \sqrt{\frac{4\gamma}{\gamma-1} \frac{E}{M}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} u_\infty$$

(например в одноатомном газе $\gamma=5/3$ и $u_{\max} = 2,9 u_\infty$). Подставляя асимптотическое решение для скорости $u = r/t$ в уравнение непрерывности, мы убеждаемся в том, что ему удовлетворяет следующая функция плотности:

$$\varrho = \frac{f\left(\frac{r}{t}\right)}{t^3}, \quad (1.115)$$

где f — совершенно произвольная функция r/t . Поскольку радиус границы шара равен $R = u_{\max} t$, эту формулу можно переписать в виде

$$\varrho = \frac{\varphi(r/R)}{R^3}.$$

Асимптотическое распределение плотности по радиусу не меняется с течением времени; оно лишь растягивается в соответствие с возрастанием R , оставаясь подобным самому себе, автомодельным. Действительно, если в газе не действуют никакие силы и каждая частица летит с постоянной скоростью по инерции, то никакого перераспределения массы не происходит, и профиля плотности остается неизменным.

Однако внутренняя неавтономность задачи сказывается в том, что это асимптотическое распределение плотности не может быть найдено из

уравнений асимптотического движения, которые допускают любое распределение.

Распределение плотности складывается в ранней стадии, когда в газе действуют силы давления. Ко времени, когда газ сильно расширяется, оно как бы «застывает». Распределение плотности зависит от начальных условий и может быть найдено лишь на основе полного решения задачи.

Как уже отмечалось, точное решение задачи с начальными условиями $\rho_0(r) = \text{const}$, $p_0(r) = \text{const}$, $u = 0$ нельзя найти в аналитическом виде. Приближенное решение можно сконструировать, исходя из рассмотрения аналогичной плоской задачи о разлете в пустоту газового слоя конечной массы с постоянными начальными распределениями, которую можно решить. Это приближенное решение приведено в книге К.П. Станюковича [15]; оно имеет вид:

$$\varrho = \frac{A}{R^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}, \quad R = u_{\max} t,$$

причем решение справедливо только для целочисленных значений $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$, которые соответствуют следующему ряду значений показателя адиабаты $\gamma = 3, 5/3, 7/5, 9/7 \dots$

Константу A можно определить из условия сохранения массы, если проинтегрировать функцию плотности по всему объему шара. Соответствующая формула приведена в [15].

§ 29. Автомоделные режимы разлета шара в пустоту

Существует класс решений задачи о разлете газового шара в пустоту, в котором распределения всех газодинамических величин строго автомоделны, т. е. с самого начала зависят от радиуса r в виде отношения r к радиусу границы шара R и не содержат какой-либо иной зависимости от r . К этим решениям приводят не любые начальные распределения величин по радиусу, а только такие, которые удовлетворяют определенному соотношению.

Указанный класс решений характеризуется линейным распределением скорости по радиусу (такие решения были исследованы Л. И. Седовым [5]):

$$u = rF(t) = \dot{R} \frac{r}{R}, \quad (1.116)$$

где функция времени $F(t)$ выражена через скорость границы шара $\dot{R} = dR/dt$. Подставляя эту формулу в уравнение движения, получим соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\varrho r (\dot{F} + F^2), \quad (1.117)$$

которому должны удовлетворять распределения p и ρ по радиусу в течение всего процесса, в том числе и в начальный момент времени. Только при этом условии решение будет принадлежать к рассматриваемому классу.

Рассмотрим два конкретных примера таких решений.

1. Пусть плотность ρ постоянна по всему объему и не зависит от радиуса

$$\varrho = f(t) = \frac{M}{4\pi R^3/3}. \quad (1.118)$$

Легко проверить, что задание функций плотности и скорости в виде (1.118), (1.116) автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности при произвольной зависимости $R(t)$. Подставляя (1.118) в (1.117) и интегрируя, получим параболическое распределение давления по радиусу

$$p = p_0(t) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (1.119)$$

которое должно быть задано с самого начала для того, чтобы выполнялось условие (1.117). Как видим, задача неизэнтропична, так как плотности у всех частиц одинаковые, а давления разные. Подстановка p и ρ в энтропийное уравнение дает связь между неизвестными функциями: давлением в центре $p_0(t)$ и радиусом шара $R(t)$:

$$p_0(t) = A \varrho^\gamma = A \left(\frac{3M}{4\pi} \right)^\gamma \frac{1}{R^{3\gamma}}, \quad (1.120)$$

где A — константа, зависящая от начальной энтропии в центре шара. Подставляя, наконец, (1.118), (1.119), (1.120) в уравнение движения (1.117), получим дифференциальное уравнение второго порядка для закона движения границы шара $R(t)$. Решая его с начальным условием $t = 0$, $R = R_0$, $\dot{R} = \dot{R}_0$, найдем и полное решение задачи. В частности, можно считать, что в начальный момент газ покоится: $\dot{R} = 0$. Если интересоваться асимптотикой $t \rightarrow \infty$, можно сразу положить $\dot{R} = \text{const} = u_1$, где u_1 — предельная скорость границы шара] (решение дифференциального уравнения, естественно, дает $\dot{R} \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$). Величину u_1 можно с помощью радиальных распределений ρ и u вычислить из условия сохранения энергии, имея в виду, что при $t \rightarrow \infty$ вся энергия превращается в кинетическую. Получим таким образом:

$$u_1 = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{2E}{M}} = \sqrt{\frac{5}{3}} u_\infty, \quad (1.121)$$

где u_∞ по прежнему определяется как корень из среднего по массе квадрата скорости $u_\infty = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{2E/M}$.

2. Пусть энтропии всех частиц одинаковы (изэнтропическое движение), т. е. $S(r, t) = \text{const}$, $p/\rho^\gamma = A = \text{const}$ (A — энтропийная константа). Подстановка $p = A\rho^\gamma$ в соотношение (1.117) приводит к следующим профилям давления и плотности:

$$\varrho = \varrho_c \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (1.122)$$

$$p = A \varrho_c^\gamma \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (1.123)$$

которые, естественно, должны быть заданы с самого начала.

Плотность в центре ρ_c можно определить, интегрируя плотность по объему и приравнявая интеграл массе: это дает, как обычно, $\rho_c \sim M/R^3$, с численным коэффициентом пропорциональности, зависящим от γ . Соотношение (1.117) приводит после подстановки (1.122), (1.123) к уравнению второго порядка для $R(t)$. Предельное значение скорости границы u_1 можно получить из условия сохранения энергии:

$$E = \int_0^R \frac{\rho u^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

если подставить в интеграл ρ по формуле (1.122) и $u = u_1 r/R$.

Это дает связь u_1 с $u_\infty = \sqrt{2E/M}$, причем коэффициент пропорциональности также зависит от γ . Оба коэффициента выражаются определенными интегралами, которые вычисляются при помощи гамма-функций. Приведем численные результаты. При $\gamma=5/3$ $\rho_c = 3,4 \bar{\rho}$, $u_1 = 1,64 u_\infty$; при $\gamma=4/3$ $\rho_c = 6,6 \bar{\rho}$, $u_1 = 1,92 u_\infty$, где $\bar{\rho} = M/(4\pi R^3/3)$ — плотность, средняя по объему. В пределе при $t \rightarrow \infty$ $R \approx u_1 t$ *).

Отметим работу В. С. Имшенника [16], в которой рассматривается задача об изотермическом разлете газа в пустоту, и работы И. В. Немчинова [18], исследовавшего разлет в пустоту газа, в котором происходит постепенное выделение энергии. Отметим также работу И. В. Немчинова [19], в которой рассматривается разлет в пустоту трехосного разового эллипсоида.

*) В работе [17] сообщаются некоторые результаты численного решения уравнений газодинамики для задачи об изэнтропическом разлете шара в пустоту при однородных начальных условиях и $\gamma = 5/3$ (при $t = 0$ газ в сфере покоится, плотность и давление его постоянны по радиусу). К сожалению, в работе не приводится асимптотический профиль плотности, но дается график $\rho_c(t)$. Видно, что с течением времени зависимость стремится к $\rho_c \sim 1/t^3$, причем коэффициент в этом предельном законе оказывается всего в 1,22 раза больше, чем в описанном здесь автомоделном решении.