

Уравнение коагуляции (Smoluchowski, M. V. 1916, Z. Phys., 17, 557):

$$\frac{\partial n(m)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^m A(m', m-m') n(m') n(m-m') dm' - n(m) \int_0^\infty A(m', m) n(m') dm',$$

где ядро

$$A(m_1, m_2) = P(m_1, m_2, \Delta v) \Delta v(m_1, m_2) \sigma(m_1, m_2).$$

- Учтен только процесс слияния, но еще возможна фрагментация.
- Сравнить: уравнение Больцмана для рассеяния фотонов на электронах

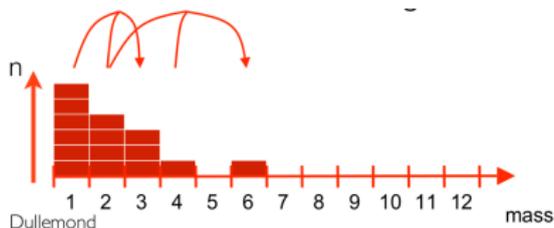
$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & \int w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{p}) \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3} - \\ & N_{\mathbf{k}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') f(\mathbf{p}) \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3} + \\ & N_{\mathbf{k}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}'} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

(Железняков, монография)

Дискретная формулировка уравнения коагуляции:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} A_{ij} n_i n_j - n_k \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} n_i.$$

В каждый момент времени существует n_k тел массы km :



Уравнение коагуляции решается совместно с уравнениями, описывающими динамику всех сортов частиц.

A_{ij} — ??...

Результаты экспериментов.

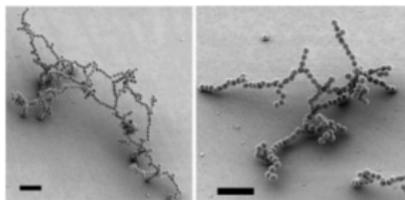
Бременская башня, параболические полеты, МКС (Blum, Wurm & co., 2000).

- Микронные частицы слипаются во фрактальные агрегаты:

$$m \propto s^{D_f},$$

где $1.4 \leq D_f \leq 1.8$.

$$v_{rel} \sim 10^{-2} - 10^0 \text{ см/с.}$$



Blum (2000).

- Столкновения агрегатов до мм-размеров — эволюция пористости: $\phi = \rho_{agg} / \rho_m$.

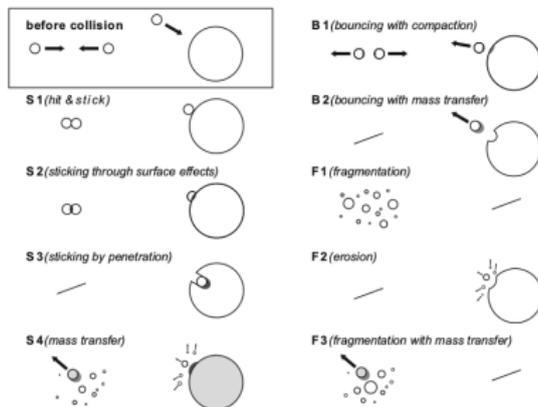
$$\phi = \phi_{max} - \Delta\phi e^{-n/\nu},$$

где $\Delta\phi = \phi_{max} - \phi_0$,

$\phi_0 = 0.15$, $\phi_{max} = 0.365$,

$\nu = 700$.

$$v_{rel} \sim 10 - 30 \text{ см/с.}$$



Guttler et al. (2010).

Результаты экспериментов.

Бременская башня, параболические полеты, МКС (Blum, Wurm & co., 2000).

$$m\Delta v^2 \leq \frac{\Delta E_{stick}}{1-f}.$$

- Слипание происходит сначала за счет ' E'_{stick} ', затем за счет ' f' '.
- Пороговая скорость фрагментации слабо зависит от размера частиц $\Delta v_{frag} \sim 1 - 2$ м/с (при столкновении частиц одинакового размера).

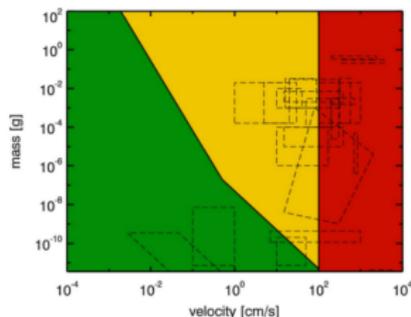


Fig. 3 The results of laboratory experiments with respect to the outcome of mutual collisions of equal sized dust aggregates. Green areas indicate sticking collisions, yellow bouncing ones, and red corresponds to fragmentation of the aggregates. The collision experiments correspond to the areas within the dashed lines. Courtesy: Jürgen Blum

Численные расчеты.

1) Микроскопическое моделирование.

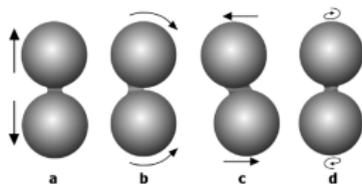


Fig. 4 Schematic view of the different type of interactions between two individual spherical monomers. These correspond to a) Compression/Adhesion, b) Rolling, c) Sliding, and d) Twisting. Courtesy: Alexander Seizinger

Kley (2017).

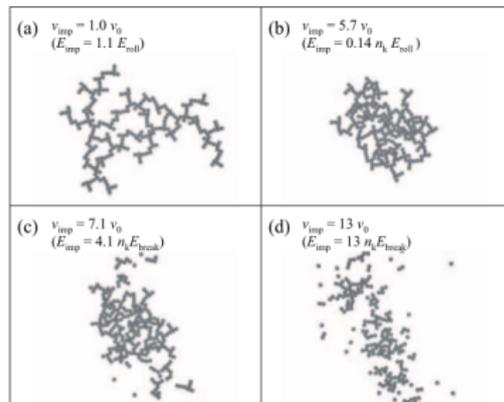


FIG. 5.—Examples of collisional outcomes for various impact velocities v_{imp} . Each case results in (a) visible restructuring, (b) maximum compression, (c) loss of a fraction of particles, or (d) catastrophic disruption. In all cases shown here, the initial aggregate consists of 128 quartz particles with $\xi_{\text{crit}} = 2 \text{ \AA}$, as shown in Fig. 4. See text for v_0 , E_{roll} , E_{break} , and n_k .

Wada (2007).

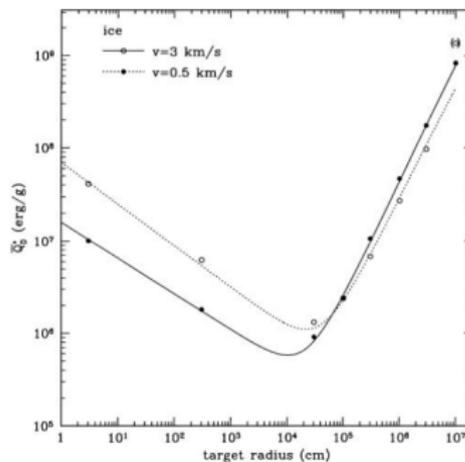
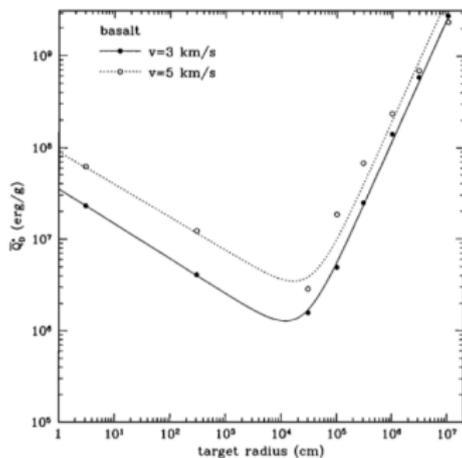
$$\nu_0 = 30 \text{ cm/c.}$$

Численные расчеты.

2) Макроскопическое моделирование.

- Сталкивающиеся тела рассматриваются в рамках механики сплошных сред и теории упругости.
- Численный метод 'сглаженных' частиц (SPH).

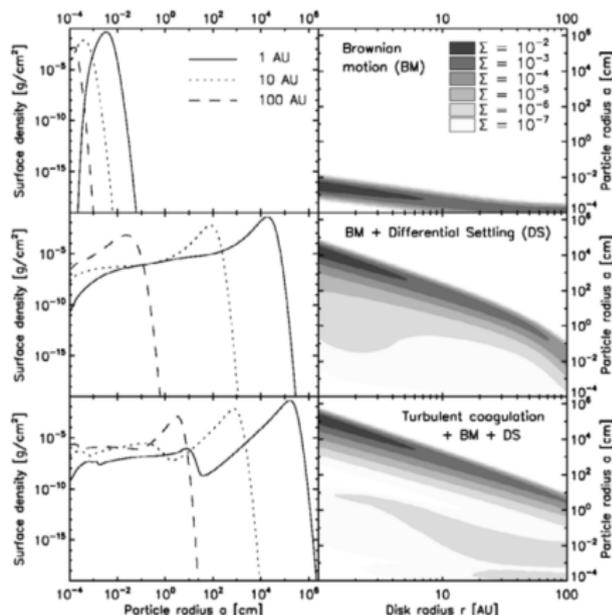
Benz & Asphaug (1999).



Brauer et al. (2008).

- Детальный расчет роста дисперсной фазы.
- Диск со структурой $\Sigma \propto r^{-0.8}$ и $T \propto r^{-1/2}$ и массой $M_d = 0.01 M_\odot$.
- Учет относительного движения частиц за счет броуновского движения, оседания, радиального дрейфа и турбулентности для всех сортов частиц с дискретным распределением масс.
- Решение уравнения коагуляции с ядром, реалистично описывающим вероятность коагуляции или фрагментации.
- Не учитывается вероятность отскока при столкновениях.

Возраст диска 1 млн. лет., $f = 0.01$.

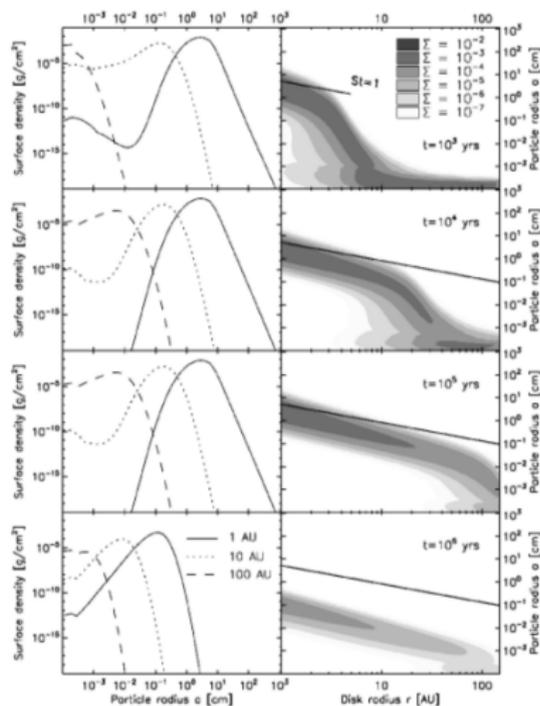


Brauer et al. (2008).

Учтены все процессы, кроме фрагментации.

$f = 0.01$.

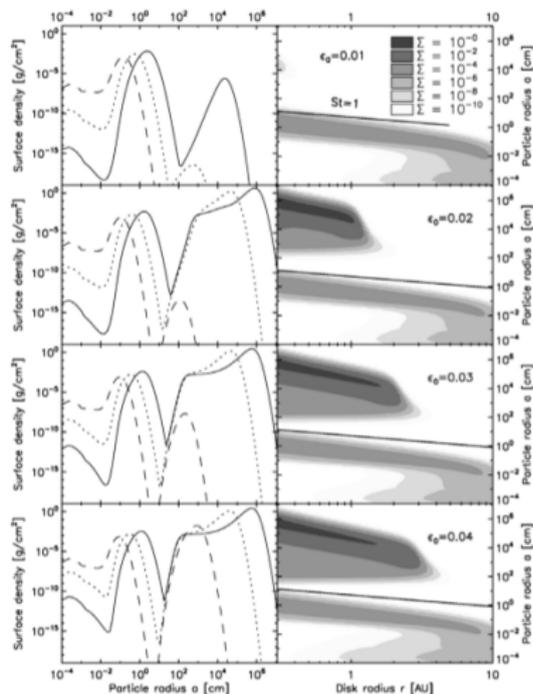
Проблема “метрового рубежа”.



Brauer et al. (2008).

Учтены все процессы, кроме фрагментации.

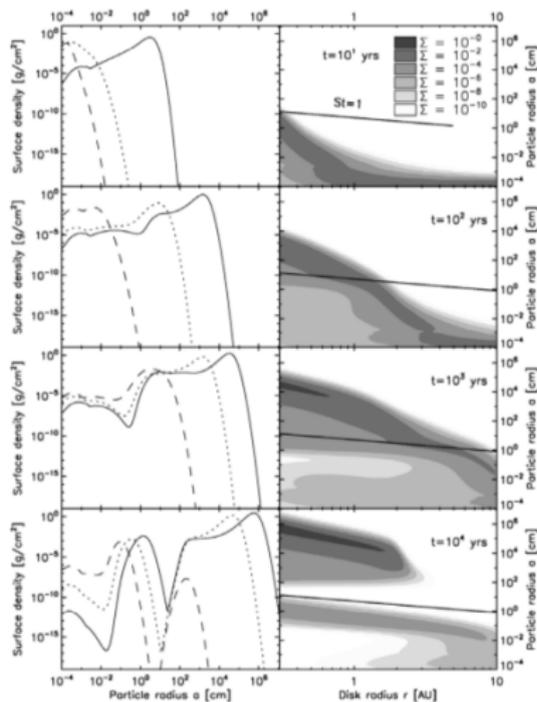
Возраст диска 10^4 лет, но варьируется f .



Brauer et al. (2008).

Учтены все процессы, кроме
фрагментации.

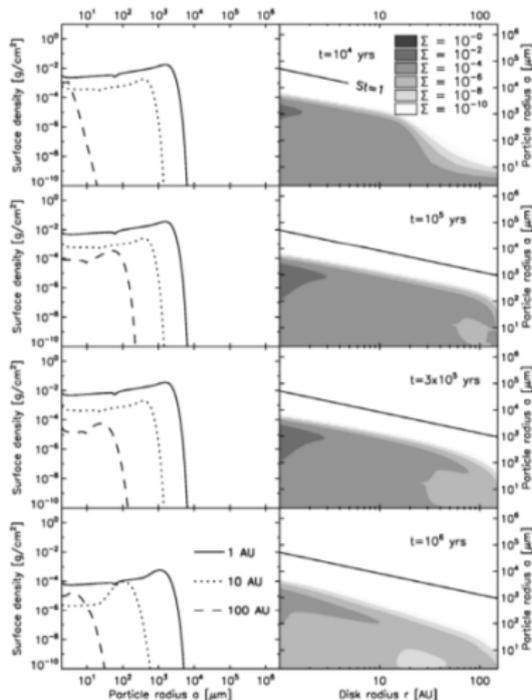
$$f = 0.03.$$



Brauer et al. (2008).

Учтены все процессы, включая фрагментацию.

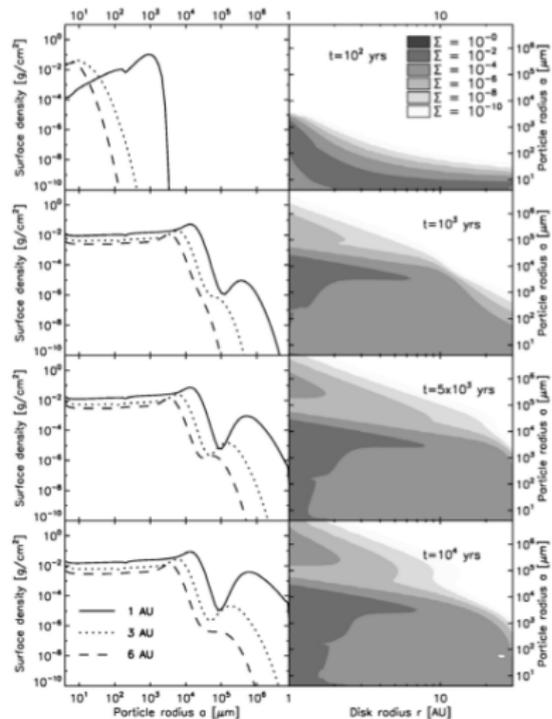
$$f = 0.01, \Delta v_{frag} = 10 \text{ м/с.}$$



Brauer et al. (2008).

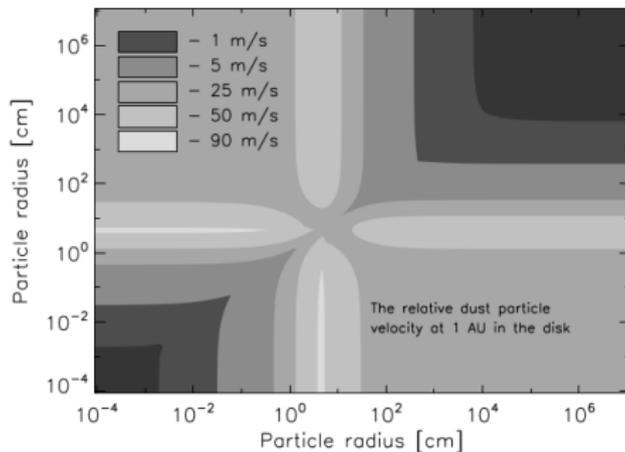
Учтены все процессы, включая фрагментацию.

$$f = 0.03, \Delta v_{frag} = 30 \text{ м/с.}$$

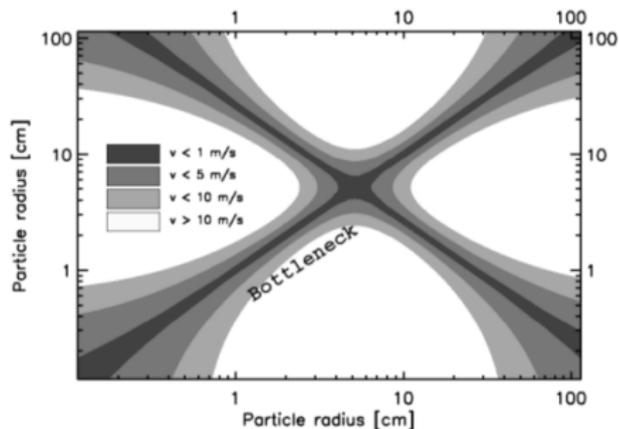


Brauer et al. (2008).

Средние относительные скорости частиц на 1 а.е. при учете броуновского движения, оседания и турбулентности.



Brauer et al. (2008).



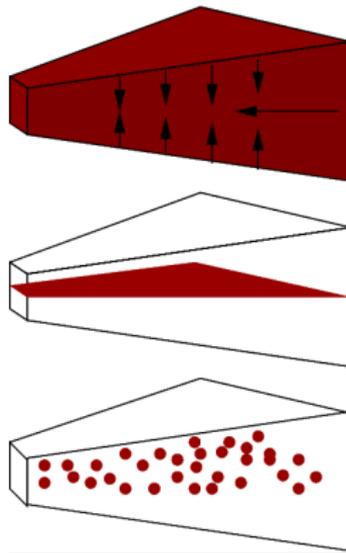
Бутылочное горлышко

Общий вывод:

образование планетезималей невозможно только путем коагуляции,
и на какой-то стадии должен включаться некий коллективный механизм.

Сафронов (1969), Goldreich & Ward (1973).

* В физике галактик — критерий Тоомре (1964).



Сафронов (1969), Goldreich & Ward (1973).

* В физике галактик — критерий Тоомре (1964).

Базовая модель (гидродинамическое приближение):

- устойчивость тонкого политропного дифференциально вращающегося диска с самогравитацией

$$\rho = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad \mathbf{v} = \{0, r\Omega, 0\}, \quad \Omega^2 r = -\frac{d\Phi}{dr}$$

- относительно малых возмущений

$$\propto \exp[i(kr - \omega t)]$$

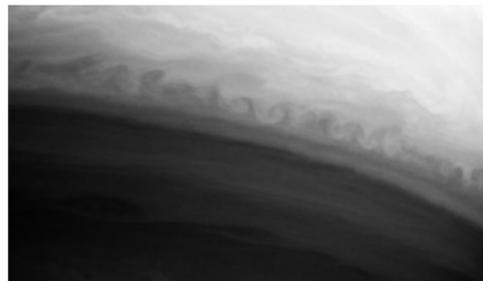
- в локальном пределе:

$$kr \gg 1$$

дает дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \kappa^2 + \sigma^2 k^2 - 2\pi G\Sigma |k|.$$

- $Q \sim 1$ требует чрезвычайно малых $h_p/h \sim 10^{-4} \Rightarrow f \sim 10^2$.
- Как следствие, пылевой субдиск вращается со строго кеплеровской скоростью v_K .
- Непосредственно над ним газ вращается с меньшей скоростью $v_{\varphi, g} = v_K - \eta v_K$.
- \Rightarrow тангенциальный разрыв скорости потока.



<http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA06502>

Сдвиговые потоки конечной ширины.

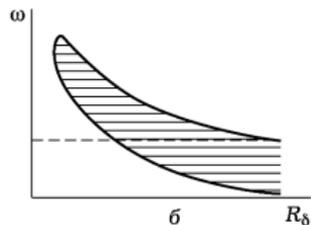
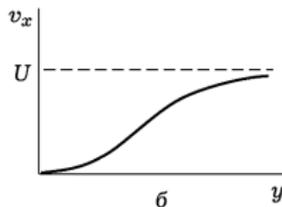
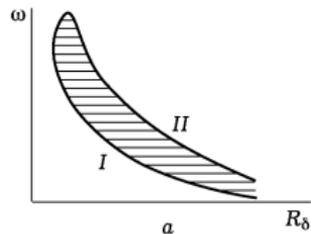
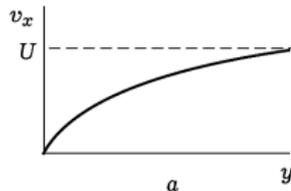
Ландау & Лифшиц, т. "Гидродинамика".

Неустойчивость сдвиговых потоков:

$$\Im(\omega) \propto dv/dz.$$

Причина 1: диссипация моды с отрицательной канонической энергией.

Причина 2: взаимодействие мод с канонической энергией разных знаков (Точка перегиба и критерий Рэлея).



Профиль скорости.

Область неустойчивости.

Сдвиговой поток в поле силы тяжести.

Необходимое условие неустойчивости — критерий Ричардсона:

$$Ri \lesssim 0.25 \frac{\gamma^2}{(\gamma + \beta/2 + 3/2)^2} \left(\frac{\delta}{0.05} \right)^{-2} \left(\frac{h_p/h}{0.0125} \right)^2,$$

где принято, что в диске $\Sigma \propto r^{-\gamma}$, $T_c \propto r^{-\beta}$.

- Вращение диска может заметно уменьшить это значение.
- Повышенная концентрация частиц за счет радиального дрейфа пыли \Rightarrow возрастание $\Sigma_p \Rightarrow$ возрастание h_p/h , соответствующего $Q \simeq 1$.

Численный расчет оседания щебенки ~ 1 см:

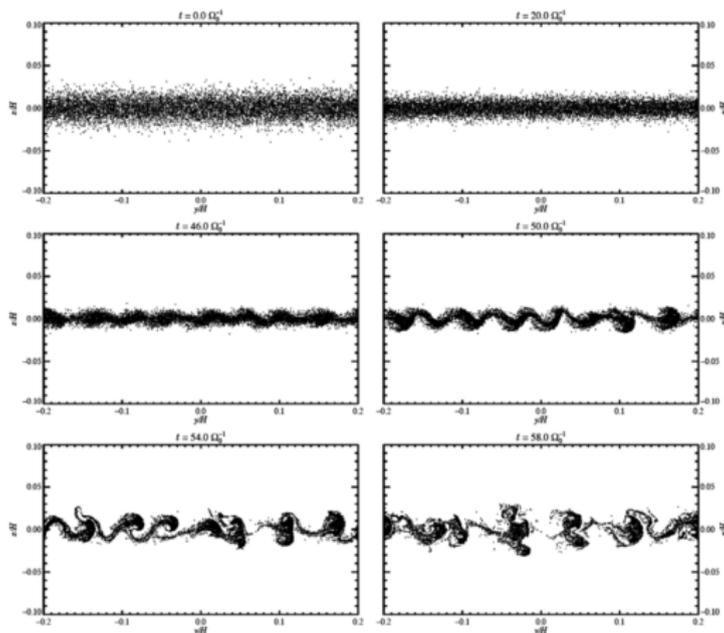
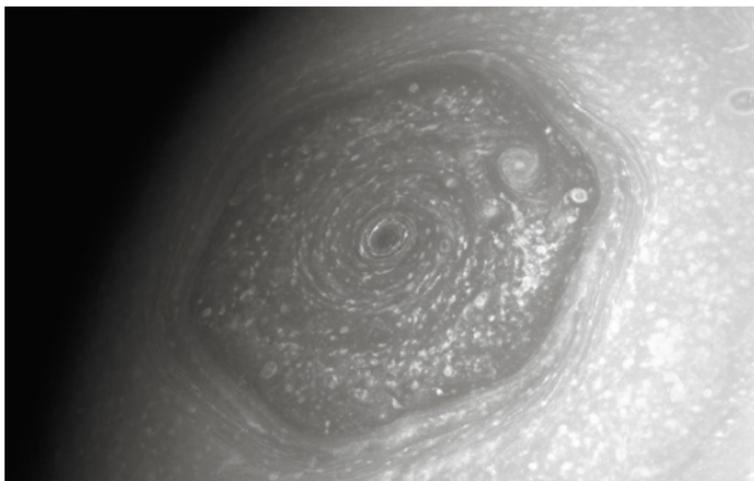


Fig. 11. The onset of the Kelvin-Helmholtz instability for centimeter-sized pebbles with $\Omega_0 t_f = 0.02$. The initial Gaussian particle distribution falls towards the mid-plane of the disk on the characteristic time-scale of $t_{\text{sett}} = 1/(G_0^2 \tau_f) \approx 50\Omega_0^{-1}$. The increased vertical shear in the gas rotation velocity eventually makes the disk unstable to the KH, forming waves that finally break as the turbulence goes into its non-linear state.

Klahr (2008).

(i) Концентрация пыли в антициклонических турбулентных вихрях.

Иллюстрация, вероятно, родственного явления на Сатурне.



Cassini satellite.

Характерное время дрейфа частиц в локальный максимум давления шириной Δr в $(r/\Delta r)^2$ раз меньше.

(ii) Пучковая неустойчивость (streaming instability) газо-пылевой смеси: Youdin & Goodman (2005).

Возникает за счет положительного динамического отклика пылевой жидкости на газ.

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{V}_p) = 0$$

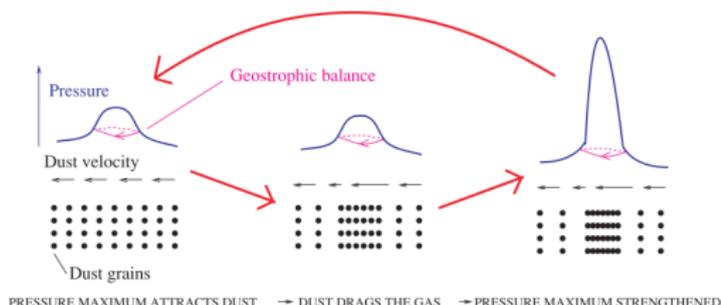
$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{V}_g) = 0$$

$$\mathcal{D}_p \mathbf{V}_p = -\Omega^2 \mathbf{R} - \frac{\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_g}{t_{\text{stop}}}$$

$$\mathcal{D}_g \mathbf{V}_g = -\Omega^2 \mathbf{R} + \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_g}{t_{\text{stop}}} - \frac{\nabla P}{\rho_g}$$

$$s = f_p t_{\text{stop}}^3 \left[(f_p - f_g) g_e \frac{k k_x}{k_z} \right]^2$$

Jacquet et al. (2011).



PRESSURE MAXIMUM ATTRACTS DUST → DUST DRAGS THE GAS → PRESSURE MAXIMUM STRENGTHENED

Jacquet et al. (2011).