

Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Гравитационное неустойчивость течения субдвоя.

(r, φ, z) , полярные координаты, тонкий горизонтальный диск с самогравитацией

$$\rho = K r^{1+\frac{1}{n}}, \quad v_\varphi = v_\Omega, \quad \Omega^2 z = -\frac{d\Phi}{dz}.$$

возмущения $\delta v_\varphi, \delta v_r, \delta v_z$ $e^{-i\omega t + i k r}$ осевыми, с $K\Omega \gg 1$.

1) переходим к безразмерным уравнениям.

$$a) \frac{d\rho}{\rho} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{dr}{r} \quad r^{\frac{1}{n}} \equiv dH; \quad dH = (n+1) K r^{\frac{1}{n}} \equiv H \text{ этакже.}$$

$$\Omega^2 = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{H}{n} \quad (*)$$

$$\delta) \begin{cases} 2\delta\vec{v} + (\vec{v}\vec{v})\delta\vec{v} + (\delta\vec{v}\vec{v})\vec{v} = -\vec{v}\delta H, \\ 2\delta r + \vec{v}(r\delta\vec{v}) + \vec{v}(\delta r\vec{v}) = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{v} \equiv \vec{v} + \delta\vec{v} \\ \Phi \equiv \Phi + \delta\Phi \\ H \equiv H + \delta H \end{array} \right\}$$

распишем, учитывая, что оператор $(\vec{v}\vec{v})\vec{v}$, если представить $\vec{v} = \vec{v} + \delta\vec{v}$, имеет вид:

$$(\vec{v}\vec{v})\vec{v} = \left\{ v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{2} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{2}, \right. \\ \left. v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_z v_\varphi}{2}, \right. \\ \left. v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{2} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\}.$$

$$\delta*) \begin{cases} 2\delta\vec{v} + (\vec{v}\vec{v})\delta\vec{v} = -\vec{v}\delta H, \\ 2\delta r + \vec{v}(r\delta\vec{v}) = 0. \end{cases}$$

1) z -модуль:

(39)

$$\partial_4 \delta u_z = -\partial_z \delta u = 0 \quad \text{поскольку } \delta u_z(t=0)=0, \text{ тогда и всегда } \delta u_z=0.$$

$$\text{А: } \delta u_{z\varphi} \sim e^{-i\omega t + ikr}$$

$$\delta u \sim e^{-i\omega t + ikr} \rightarrow \text{зависит только от } r, \text{ но не от } z \text{ во все моменты времени.}$$

$$2) \partial_4 \delta u_z - z \Omega \delta u_\varphi = -\partial_z \delta u$$

$$\partial_4 \delta u_\varphi + \delta u_z \frac{d\Omega}{dz} + \delta u_z \Omega = -\partial_\varphi \delta u = 0.$$

$$\frac{\delta u_z}{2} \frac{d}{dz} (\Omega r^2)$$

$$\left\| \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\Omega r^2) = \frac{r^2}{2\Omega} \right\|$$

$x = \Omega$ где всегда!

$$3) \partial_4 \delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (2\rho \delta u_z) = 0.$$

$$\frac{1}{2} \rho \delta u_z + \frac{1}{2} \delta \rho \delta u_z + \rho \partial_z \delta u_z \quad \text{ведущий член, т.е. } kr \gg 1.$$

$$\partial_4 \delta \rho + \rho \partial_z \delta u_z = 0.$$

$$4) \text{ для возмущения: т.к. } \zeta^2 = \frac{d\rho}{d\varphi}, \text{ то } \boxed{\delta \rho = \zeta^2 \delta \varphi} \text{ а } \boxed{\delta u = \frac{\delta \varphi}{\rho}}$$

$$\cancel{\left(\frac{\delta \rho}{\zeta^2} + \frac{\delta \rho}{\zeta^2} + \frac{\delta \rho}{\zeta^2} \right)} \quad \delta \rho = \frac{\rho \delta u}{\zeta^2}$$

$$\frac{\rho}{\zeta^2} \partial_4 \delta u + \rho \partial_z \delta u_z = 0, \quad \int d\varphi - ? \leftarrow$$



5) Тошмик подпропилов грел:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\Omega^2 z \rightarrow u = \frac{1}{2} (\Omega h)^2 \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \text{ где } u(h) = 0.$$

$$\boxed{\zeta^2 \sim \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right); \rho \sim \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)^n} \quad (*)$$

интервалы:

$$\int_{-h}^{+h} p dz \equiv \Sigma = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} p_c(z=0) \int_{-h}^{+h} \frac{p}{a^2} dz = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} \frac{p_c(z=0)}{a^2}$$

т.к. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, то $\int_{-h}^{+h} p dz / \int_{-h}^{+h} \frac{p}{a^2} dz = \frac{n a_s^2(z=0)}{n+1/2}$

$\tilde{\zeta}_s^2 \equiv \frac{n a_s^2(z=0)}{n+1/2}$ - "связующее" сечение звезде.

1) 2D-уравнения.

$$\begin{cases} -i\omega \delta u_z - 2\Omega \delta v_\varphi = -iK \delta \Pi \\ -i\omega \delta v_\varphi + \frac{2\Omega^2}{\Omega} \delta u_z = 0 \\ -i\omega \delta \Pi + \tilde{\zeta}_s^2 iK \delta v_\varphi = 0 \end{cases}$$

2) уравнение Гроссмана.

$\varphi = \varphi + \delta\varphi$

$-\frac{\partial \delta\varphi}{\partial z}$

← $-iK \delta\varphi$ из уравнения.

Предположим, что пробная поле есть иная гравитация, т.е. если $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$
 / где став гравитация поперечно $\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho$ /

$\nabla^2 \delta\varphi = \partial_{zz} \delta\varphi + (iK)^2 \delta\varphi = 4\pi G \delta(\rho) \delta z$, где $\delta z \equiv \int \delta\rho dz$

ign $z \neq 0$: $\delta\varphi = C e^{-|Kz|}$ C - ?

$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \nabla^2 \delta\varphi dz = 4\pi G \delta z \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(z) dz$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\partial_{zz} \delta\varphi$ вообще не дает.

(плотность поперечно по z от φ).

получаем: $\frac{d\delta\phi}{dz} \Big|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = 4\pi G\delta\Sigma \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$

(41)

$$= C(-|K| - |K|) = 4\pi G\delta\Sigma \rightarrow C = -2\pi G\delta\Sigma |K|^{-1}$$

$$\delta\phi_{z=0} = -\frac{2\pi G\delta\Sigma}{|K|}$$



3) Связи между $\delta\Sigma$ и δH :

$$\delta\rho = \frac{\rho\delta H}{\zeta^2} \int dz :$$

$$\delta\Sigma = \sqrt{\pi} \frac{\rho(n)}{\rho(n+\frac{1}{2})} \frac{\rho_c}{\zeta_c^2} \quad \delta H = \delta H \sqrt{\pi} \frac{\rho(n)}{\rho(n+\frac{1}{2})} \zeta_c^{-3} \frac{\sum \rho(n+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi} \rho(n+1)} =$$

$$= \frac{\delta H \Sigma}{\zeta_c^2} \frac{n+\frac{1}{2}}{n} = \sum \frac{\delta H}{\tilde{\zeta}_s^2}$$

Итак $\boxed{\frac{\delta\Sigma}{\Sigma} = \frac{\delta H}{\tilde{\zeta}_s^2}} \quad (*)$



4) Дисперсионное соотношение

$$\begin{cases} i\omega\delta v_2 + 2R\delta v_p = iK\delta H + iK\delta\phi, \\ i\omega\delta v_p = \frac{x^2}{2R}\delta v_2, \\ i\omega\delta H = \tilde{\zeta}_s^2 iK\delta v_2, \\ \frac{\delta\Sigma}{\Sigma} = \frac{\delta H}{\tilde{\zeta}_s^2}, \quad \delta\phi = -\frac{2\pi G\delta\Sigma}{|K|}. \end{cases}$$



$$-i\omega + 2\Omega \frac{x}{2\Omega(i\omega)} \delta u_2 - \left[ik + ik \left(-\frac{2\alpha G}{|k|} \frac{\Sigma}{\tilde{\zeta}^2} \right) \right] \delta u = 0 \quad (42)$$

$$\tilde{\zeta}^2 ik \delta u_2 - i\omega \delta u = 0$$



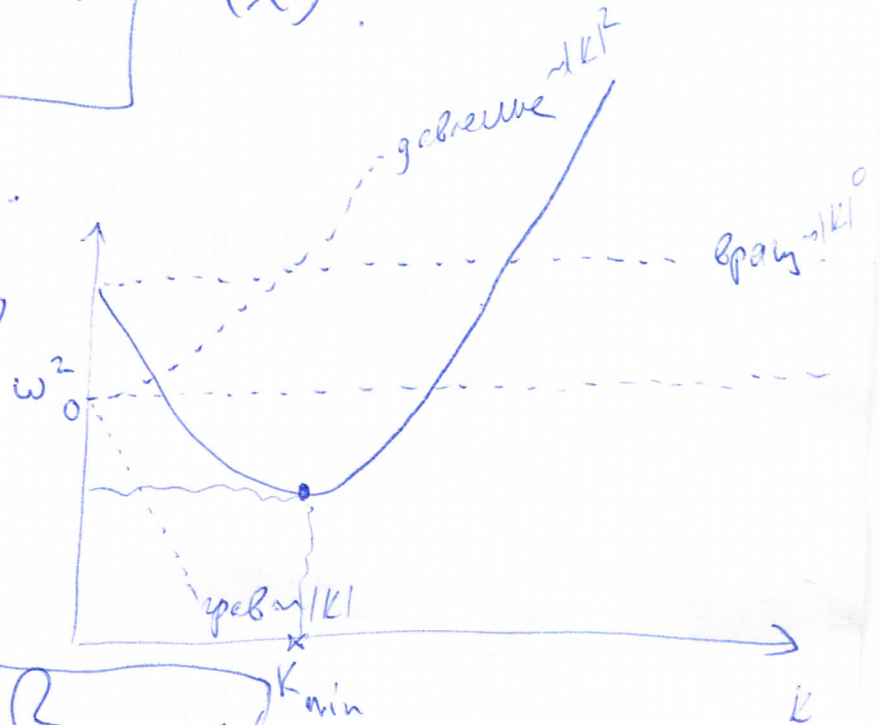
$$[-\omega^2 + x^2] - \tilde{\zeta}^2 \left[-k^2 - k^2 \left(-\frac{2\alpha G}{|k|} \frac{\Sigma}{\tilde{\zeta}^2} \right) \right] = 0$$

$$\omega^2 = x^2 + \tilde{\zeta}^2 k^2 - 2\alpha G \Sigma |k| \quad (*)$$

5) Устойчивость: $\omega^2 < 0$.

$$\frac{d\omega^2}{dk} = 0:$$

$$k_{min} = \frac{\alpha G \Sigma}{\tilde{\zeta}^2} \quad (*)$$



если $\omega^2(k_{min}) = 0$: неуст.

→ где $x^2 \approx \Omega^2$ имеем:

$$Q = \frac{\tilde{\zeta}^2 \Omega}{\alpha G \Sigma} < 1 \quad (*)$$



всплеск Гоммре.

При α малом и равновесном Σ $\tilde{\zeta}$ - не растет (возрастает в α !),
а Σ - растет.

$\tilde{\zeta}$ - не растет (возрастает в α !),



$$Q = (h_p k_{min})^{-1} \quad (*)$$

$$h_p \approx \frac{\tilde{\zeta}^2}{\Omega} \quad (*)$$

При $Q \approx 1$: $h_p \approx k_{min}^{-1}$



гидродинамическая длина при $\alpha \rightarrow 0$.

Масса пакетызмат из гравитационной неустойчивости
 характерного сгустка в пылу. (43)

$$m_p \approx \sigma \lambda^2 \Sigma_p \approx \sigma \left(\frac{v_{th}}{k_{min}} \right)^2 \Sigma_p = \sigma \left(\frac{2\sigma^2}{G \Sigma_p} \right)^2 \Sigma_p = 1/Q = 1/2$$

$$\approx \sigma \left(2 \frac{\sigma^2 G \Sigma_p^2}{\Omega^2 G \Sigma_p} \right)^2 \Sigma_p = 4\sigma^5 G^2 \frac{\Sigma_p^3}{\Omega^4}$$

$$m_p \approx 4\sigma^5 G^2 \frac{\Sigma_p^3}{\Omega^4} \quad (*)$$

Круто растет на периферии.
 Если учесть сферическую пылю
 — тем более!

на 1 а.е. при $\Sigma_p = 10^4 \text{ г/см}^2$:

$$m_p = 4 \cdot 3^5 \cdot (6.7 \cdot 10^{-8})^2 \frac{10^3}{(2.3/3 \cdot 10^7)^4} = 3 \cdot 10^{3-16+3+28} = 3 \cdot 10^{18} \text{ г.}$$

при $\rho_m \sim 3 \text{ г/см}^3$: $V \approx 10^{18} \text{ см}^3$; $r_p \approx 10^6 \text{ см} \approx 10 \text{ км}$.

Оценки времени образования пакетызмат.

При $Q=1$: $\lambda_p = \frac{\sigma}{\Omega} = \frac{\sigma \Omega}{\Omega^2} \approx \frac{G \Sigma_p}{\Omega^2}$;

$$\rho \sim \frac{\Sigma_p}{h_p} = \frac{\Omega^2}{G}$$

$$t_{gr} \sim (G\rho)^{-1/2} = \Omega^{-1}$$

$$t_{gr} \sim \Omega^{-1} \quad (*)$$



Оценим $\frac{h p}{h}$ где $Q \approx 1$.

$$\frac{h p}{h} = \frac{\sigma}{\Omega h} = \frac{\sigma \Omega}{\Omega^2 h} = \frac{\Phi \epsilon \Sigma_p}{\Omega \zeta_s}$$

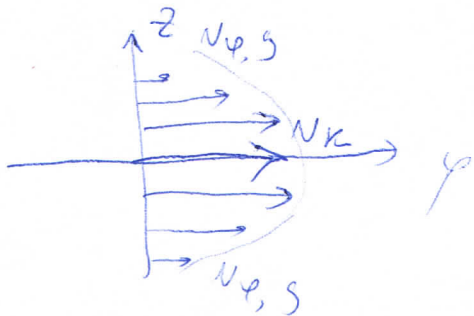
$$\Sigma_p \approx 10^2 / \text{cm}^2; \quad \Omega \approx 1 \text{ a.u.}; \quad \zeta_s \approx 10^5 \text{ cm/e.}$$

$$\frac{h p}{h} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 10}{2 \cdot 8 / 10^2 \cdot 10^5} = 10^{1-8+7+5+1} = 10^{-4} \quad (\otimes)$$

соотв. обрешетка на-тб:

$$\rho_p \sim \Sigma_p / h_p \quad \vee \quad \rho_g \sim \Sigma / h$$

$$\frac{\rho_p}{\rho_g} \sim \frac{\Sigma_p}{\Sigma} \frac{h}{h_p} \sim F \cdot \left(\frac{h_p}{h} \right)^{-1} \sim 10^2 !$$



$$\frac{\partial v_{\varphi, s}}{\partial z} - \text{значительно.}$$

Проблема динамической устойчивости
свирного течения в поле тяжести.

+ естествен. вращение по z - но это не поможет
(оно будет стабилизировать поток, уменьш. R_{crit} ...)



Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

(45)

Устойчивость Кельвина-Гельмгольца

Тангенциальный разрыв:

$$(\vec{\nabla} \delta \vec{U}) = 0$$

$$\partial_z \delta \vec{U} + N \frac{\partial \delta \vec{U}}{\partial x} = - \frac{\vec{\nabla} \delta p}{\rho} \quad (\times \vec{E}_0)$$

$$0 = \Delta \delta p \quad (1)$$

z — направление ^{по z} поверхности разрыва в возмущенном потоке

$$\frac{d\delta p}{dz} = \delta U_z = \partial_z \delta p + N \partial_x \delta p$$

Ищем $\delta p = f(z) e^{i(Kx - \omega t)}$

из (1): $\partial_{zz} f - K^2 f = 0 \Rightarrow f = C e^{-Kz} \quad (\text{считаем } z > 0)$

$\delta p_1 = C e^{i(Kx - \omega t)} e^{-Kz} \quad (z > 0)$

из z -уравн.: $(-i\omega + iNK) \delta U_z = \frac{K}{\rho} \delta p_1$

$$\delta U_z = \frac{K \delta p_1}{i\rho(KN - \omega)}$$

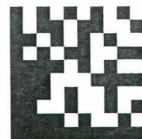
$$\delta U_z = i\delta p_1 (KN - \omega)$$

$$\delta p_1 = - \frac{\rho (KN - \omega)^2}{K} \quad (*)$$

С другой стороны от пов-ти разрыва: $z < 0 \quad f \sim e^{+Kz}$, а $N=0$
 $\rightarrow$ значит $\delta p_2 = + \frac{\rho \omega^2}{K} \quad (**)$

$\delta p_1 = \delta p_2 \Rightarrow \omega^2 + (KN - \omega)^2 = 0$
 $\omega = KN \left(\frac{1 \pm i}{2} \right)$

т.е. $\forall K \exists \text{Im} \omega > 0$
 неустойчивость.



Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Оценочный вывод критерия Рихардсона.

(46)

Уточн, см стр. (45): $I_{mw} \leq K_{max} \Delta v$, где K_{max} — максимальное волновое число вдоль пов-ти разрыва, коэф-т изотропности $\rightarrow$ и $K_{max} \sim l_p^{-1}$, где l_p — ширина зазора.

Δv — разность скоростей в зазоре

~~т.р.~~
$$I_{mw} \leq \frac{\Delta v}{\sqrt{2}} \quad (*)$$

Стабилизация — за счет устойчивой стратификации в поле тяжести звёзд: $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = g_z$



Как оценить частоту колебаний жидкого ядра за счёт возвращающей силы = сила тяжести + сила Архимеда?

~~т.р.~~

Рассмотрим малые сферич. частицы по z (как в камнях):

$$\rho = K e^{\gamma s} \rightarrow d\rho = \rho ds + \gamma \rho ds \rightarrow d\rho = \frac{d\rho}{\gamma^2} - \frac{\rho}{\gamma} ds$$

и чем играет на масштабах огулов атмосферы, γ — может и $\gamma = 0$ (конечно) $\rightarrow$ т.к. $h_p/h \ll 1$ выполняется отлично!

В частице $s = \text{const} \rightarrow$ считаем $\Delta \rho \approx 0$.

В окружающем среде $\Delta \rho \approx -\frac{\rho}{\gamma} ds$

Более сжато: сила на единицу объема: $\frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot g_z = \rho \gamma^2$

Отсюда $\omega^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} g_z \equiv \kappa^2$ частота плавучести.

Пер. №

страница

из

Критерий изотропности:

$$\frac{\kappa^2}{(I_{mw})^2} \lesssim 1$$

Рихардсона ("1/4" вместо "1")

Критерий Ритардаци в цитоплазматическом слое (42)

Урок,

$$Ri \equiv \frac{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} g_z}{\left| \frac{dV_p}{dz} \right|^2} < \frac{1}{4} \quad \text{у-мбо в потоке.}$$

(справа по 2 не утало!)

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{ds} = h^{-1} p \Rightarrow h^{-1}, \text{ на котором равенство выполняется.}$$

$$g_2 = \Omega^2 h_p,$$

$$\frac{dN\varphi}{d\beta} = (ch. \exp(22)) / \frac{Nk}{2} (\beta + \beta \frac{1}{2} + \frac{3}{2}) \left(\frac{h}{2}\right)^2 h^p.$$

$$R_i = \frac{\cancel{\Omega^2}^2}{\cancel{\Omega^2}^2} \left(\frac{2}{h}\right)^4 \hbar^2 \frac{4\gamma^2}{(\gamma + \beta/2 + 3/2)^2} = \frac{4\gamma^2}{(\gamma + \beta/2 + 3/2)^2} \delta^{-2} \left(\frac{\hbar p}{h}\right)^2 =$$

$$= \frac{1^2}{(1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}))^2} \cdot 0.25 \cdot \left(\frac{8}{0.05}\right)^{-2} \left(\frac{h p / h}{0.0125}\right)^2 \quad (*)$$