

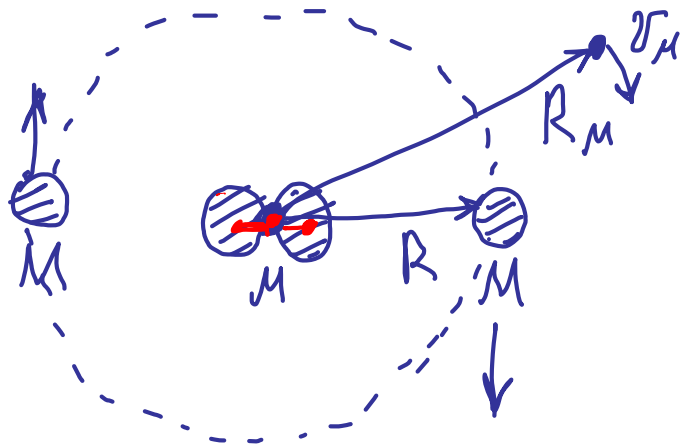
Астрофизика – 2020/2021

семинар N10 (18 ноября 2020г., 13:00)

группа N2

преподаватель – доц. Думин Юрий Викторович

Семинар 9, задача 4. Оценка максимальной частоты гравитационных волн при слияниях чёрных дыр в ньютоновском приближении.



$$M = \frac{M^2}{2M} = \frac{M}{2}$$

$$\frac{v_M^2}{R_M} = \frac{GM}{2R_M^2} = \frac{1}{R_M} \left(\frac{2\pi R_M}{T} \right)^2$$

$$T^2 = \frac{8\pi^2 R_M^3}{GM} = \frac{8^2 \pi^2 R^3 \cancel{2c^2}}{\cancel{GM} 2c^2}$$

$$R_{1,2} = \frac{M}{2M} R_M = \frac{1}{2} R_M$$

$$R_M = 2R$$

$$= \frac{2 \cdot 8^2 \pi^2 R^3}{c^2 R_g} = \frac{2 \cdot 8^2 \pi^2 R_g^2}{c^2}$$

$R = R_g$ — усл. слияния 4.2.

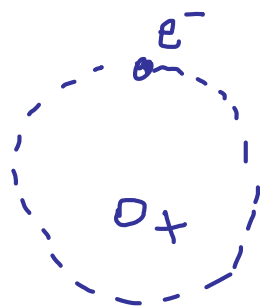
Если $M = 10 M_\odot \Rightarrow 30 \text{ км} \Rightarrow$

$$v_{2.6} \approx \frac{1}{8\pi} \frac{\cancel{300.000 \text{ км}}}{c \cdot \cancel{30 \text{ км}}} \approx \frac{200 \text{ Гц}}{400 \text{ Гц}}$$

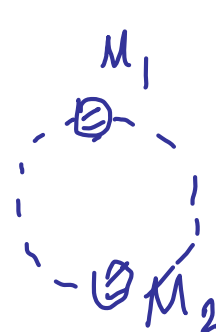
$$v_{2.6} \approx \frac{c}{8\pi \cdot R_g}$$

Почему гравитационные волны излучаются на удвоенной частоте вращения системы?

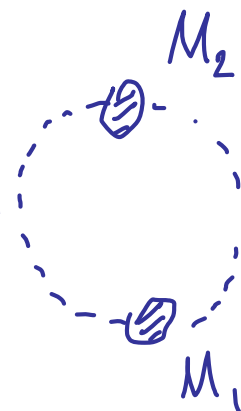
$T, \omega \Rightarrow$ эл.-магн. волна $\omega_b = \omega$



$\frac{T}{2}$



$\frac{T}{2}$



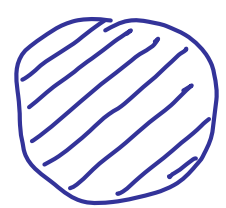
$$T_{изл.} = \frac{T}{2}$$

$$\omega_{изл.} = 2\omega_{сист.}$$

1. Вывод температуры испаряющейся чёрной дыры.

Эфр Хокинга 1974 / 75_{2.2}

4.D.



$$\frac{\text{grad} |\vec{F}_{\text{грав.}}|}{|\vec{F}_{\text{грав.}}|} \approx \frac{1}{R_g}$$

$$\lambda_k = \frac{h}{mc}$$

$$\lambda_k = \frac{h}{mv} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

$$E = h \cdot \nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{h^2 c^2 m}{h} = mc^2$$

$$\lambda_k \approx R_g$$

$$\lambda_k \ll R_g$$



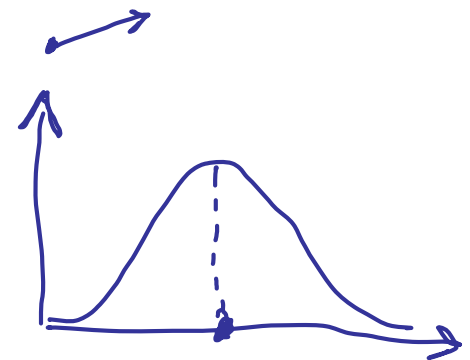
$$\lambda_k \gg R_g$$



$$E \approx \frac{hc}{R_g} = \frac{hc^3}{2GM}$$

$$T_H \approx \frac{hc^3}{2k \cdot GM}$$

~ 20



$$T_H \propto \frac{h c^3}{2 k G M}$$

$$T_H = ?$$

Пусть $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}_2$

$$h = 7 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

$$G = 7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{2 \cdot \text{с}^2}$$

$$k = 1,4 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{К}}$$

$$T_H \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ К}$$

$$T \approx 300 \text{ К} \Rightarrow M_{\text{яд}} = M_\odot / 10^8 \approx 2 \cdot 10^{25}_2$$

$$\rho = 2 \div 3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \Rightarrow R_{\text{яд}} = ?$$

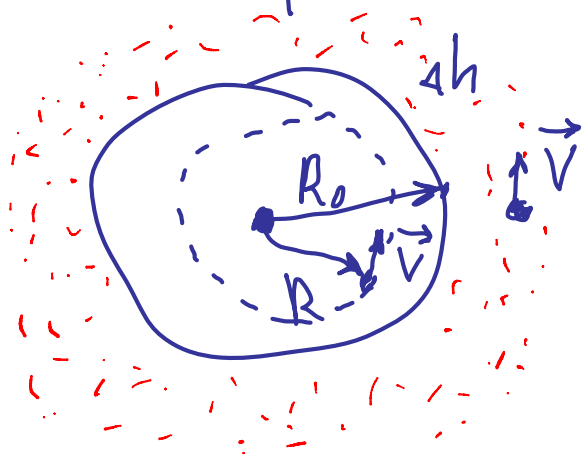
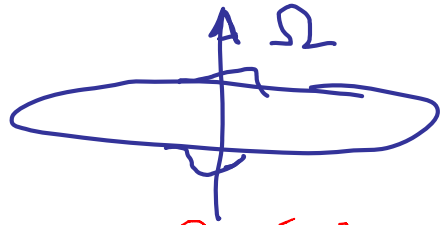
$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \Rightarrow R \approx 2000 \text{ км}$$

2. Оценить ход плотности по кривой вращения. Рассмотреть два участка:
 а) скорость растет с расстоянием от центра (можно взять линейный рост)
 б) скорость постоянна.

$$\frac{1}{2} \sum_i m \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \left| \sum_{j>i} \sum_i U(\vec{r}_{ij}) \right| - \text{теор. Вирсала}$$

$T_{\text{эфф}}, \bar{K}$ $\bar{U} \rightarrow \left. \begin{matrix} M_{\text{дин}} \\ M_{\text{киг}} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{расх. 6 500 раз!} \\ \text{Убикки, 1937г.} \end{matrix}$

Крив. вращ. галактик, начало 1970-х гг.



$$\frac{v^2}{R} \approx \frac{G}{R^2} \int_0^R \rho \cdot \Delta h \cdot 2\pi \cdot z \cdot dz \Rightarrow$$

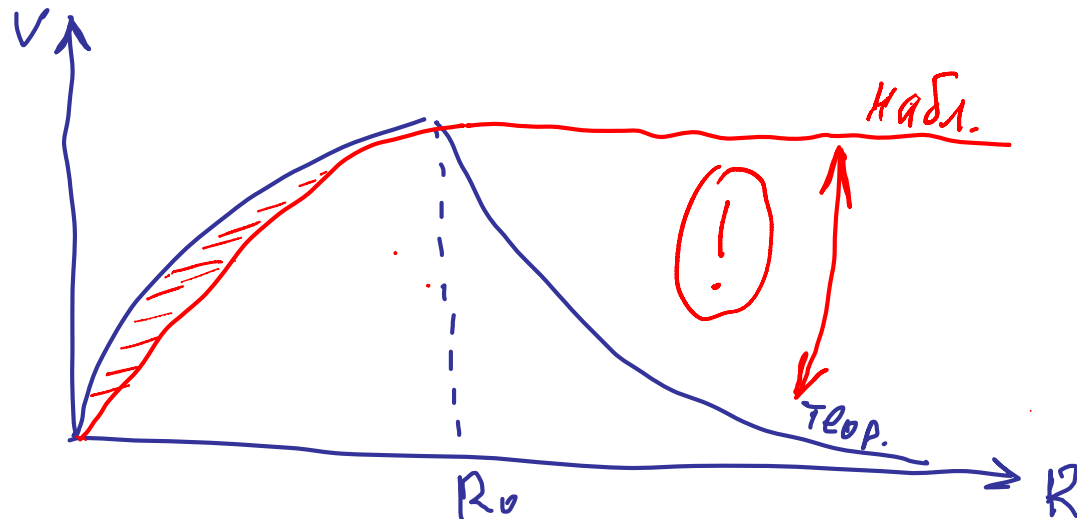
$$v^2 = \frac{G \cdot \Delta h \cdot 2\pi}{R} \int_0^R \rho(z) \cdot z \cdot dz$$

$$\text{Если } \rho = \rho_0 \Rightarrow v^2 = \frac{2\pi G \Delta h}{R} \rho_0 \cdot \frac{R^2}{2} \propto R$$

$v \propto \sqrt{R}$ - внутри диска галактики

$$\frac{v^2}{R} \approx \frac{GM}{R^2} \Rightarrow v \propto \frac{1}{\sqrt{R}} - \text{вне диска галактики}$$

M - масса диска



3. Оценить массу Sgr A*, взяв параметры звезды SO2. Орбитальный период - 15.2 года, полуось орбиты - 0.005 пк.



4. Соотношение масса - светимость.

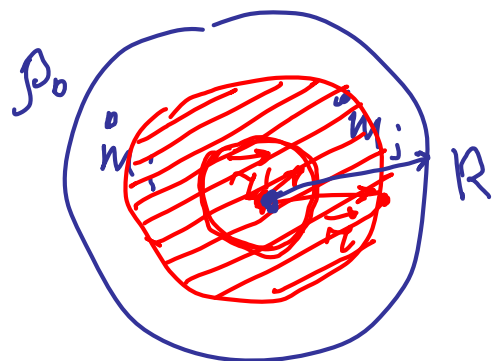
$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 0.23 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.3} \quad (M < 0.43M_{\odot})$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4 \quad (0.43M_{\odot} < M < 2M_{\odot})$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 1.5 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} \quad (2M_{\odot} < M < 20M_{\odot})$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 3200 \frac{M}{M_{\odot}} \quad (M > 20M_{\odot})$$

5. Гравитационная энергия однородного шара.



$$|U| = \sum_{j>i} \sum_i \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \rightarrow \iiint \dots$$

$$U = \iiint d\vec{r} d\vec{r}' U(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\begin{aligned} |U| &= \int_0^R \frac{G \cdot \underbrace{(4\pi)}_{(3)} r^3 \cdot \underbrace{(\rho_0)}_r \cdot \underbrace{(4\pi)}_{(3)} r^2 \cdot dr \cdot \underbrace{(\rho_0)}_{(3)}}{\underbrace{(3)}} = \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 \right) 4\pi \rho_0 \cdot G \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr = \\ &= \underbrace{\left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 \right)}_{(3)} \cdot \underbrace{3 \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 \right)}_{(3)} \cdot G \cdot \underbrace{\frac{R^5}{5}}_{(3)} = \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \Rightarrow |U| = \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \end{aligned}$$

6. Магнитная и вращательная энергия нейтронных звёзд.

$$M \approx 2 M_{\odot}$$

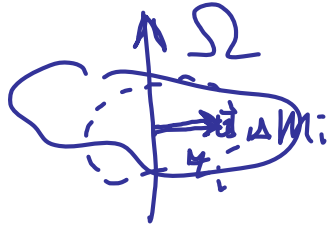
$$R \approx 10 \text{ км}$$

$$E_{\text{маг.}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

в сист. СГС

$$[B] = 1 \text{ Гаусс} = 10^{-4} \text{ Т}$$

$$E_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \cdot \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \Omega^2 \cdot r_i^2 =$$



$$v_i = \Omega \cdot r_i$$

$$= \frac{1}{2} \Omega^2 \cdot \underbrace{\sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2}_I = \frac{1}{2} I \Omega^2$$

$\uparrow$
 $\frac{1}{2} m v^2$

I - момент инерции



$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Домашнее задание №3

1. Считая, что при аккреции на черную дыру эффективность аккреции составляет 50% (т.е., половина потенциальной энергии падающего вещества высвечивается), рассчитайте необходимый темп аккреции, чтобы черная дыра с массой 100 млн масс Солнца вышла на предельную (эддингтоновскую светимость). Считайте, что энергосвечение происходит на последней устойчивой орбите невращающейся (шварцшильдовской) черной дыры.
2. Звезда имеет светимость равную Солнечной. Рассчитайте параллакс звезды на расстоянии, на котором звезда имеет видимую звездную величину, соответствующую предельной при наблюдении невооруженным глазом.
3. Звезда имеет массу вдвое меньше, чем у Солнца. Рассчитайте ее абсолютную звездную величину.
4. На стадии формирования нейтронной звезды происходит усиление ее магнитного поля. Энергия поля черпается из энергии вращения. Считая, что 10% энергии вращения может пойти на усиление поля, рассчитайте необходимый начальный период вращения нейтронной звезды для достижения поля 10^{14} Гс (считать, что поле равномерно заполняет объем нейтронной звезды).
5. Рассчитайте полное энергосвечение при слиянии (взаимном падении друг на друга) двух белых карликов с массами по 0.5 масс Солнца.