# Астрофизика – 2020/2021

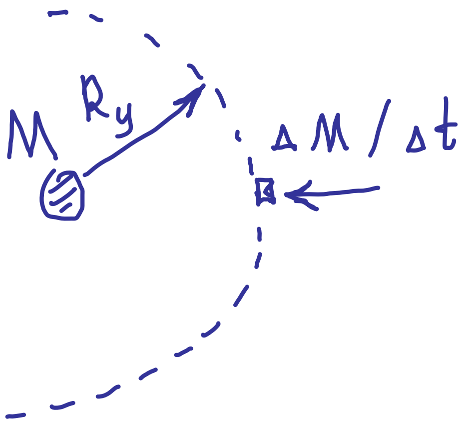
семинар *N*11  (25 ноября 2020г., 13:00)

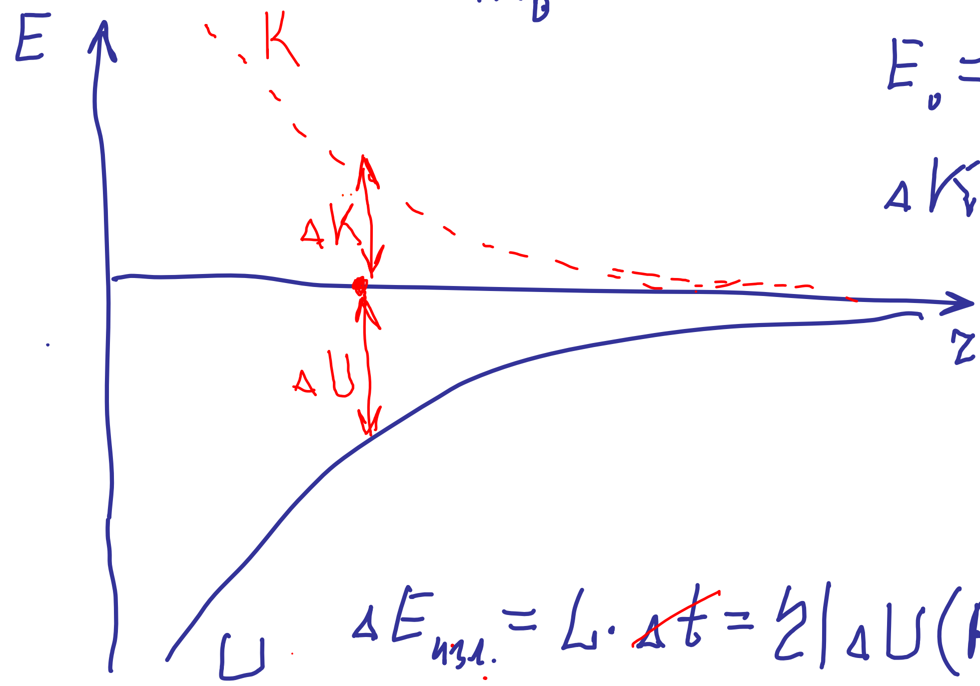
группа *N*2

преподаватель – доц. Думин Юрий Викторович

**1.** Считая, что при аккреции на чёрную дыру эффективность энерговыделения составляет 50% (т.е., половина потенциальной энергии падающего вещества высвечивается), рассчитайте необходимый темп аккреции, чтобы чёрная дыра с массой 100 млн масс Солнца вышла на предельную (эддингтоновскую) светимость. Считайте, что энерговыделение происходит на последней устойчивой орбите невращающейся (шварцшильдовской) чёрной дыры.

$M = 10^8 M_\odot,\ \eta = 0{,}5,\ L_э = 10^{38}\frac{M}{M_\odot}\frac{эрг}{c}$




$E_0 = E(\infty) = 0$

$\Delta K = |\Delta U|$

$R_y = 3R_g$

$R_g = 3\frac{M}{M_\odot}$ км

$\Delta E_{изл.} = L\cdot\cancel{\Delta t} = \eta|\Delta U(R_y)| = \eta G\frac{M\cdot\Delta M}{R_y\Delta t}$

$L = \eta G\frac{M\cdot\dot{M}}{R_y} = L_э \Rightarrow \boxed{\dot{M} = \frac{L_э R_y}{\eta G M}}$

$$\boxed{\dot M = \frac{L_э R_у}{2GM}} \qquad \dot M = 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \frac{эрг}{с} \cdot 3 \cancel{\frac{M}{M_\odot}} \cdot 10^5 см \cdot 2 \cdot \frac{1}{G \cdot M_\odot \cancel{\frac{M}{M_\odot}}}$$

$$\frac{v^2}{R_з} = \frac{GM_\odot}{R_з^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi R_з}{T_з}\right) \frac{1}{\cancel{R_з}} = \frac{GM_\odot}{R_з^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$GM_\odot = \frac{4\pi^2 R_з^3}{T_з^2}$$

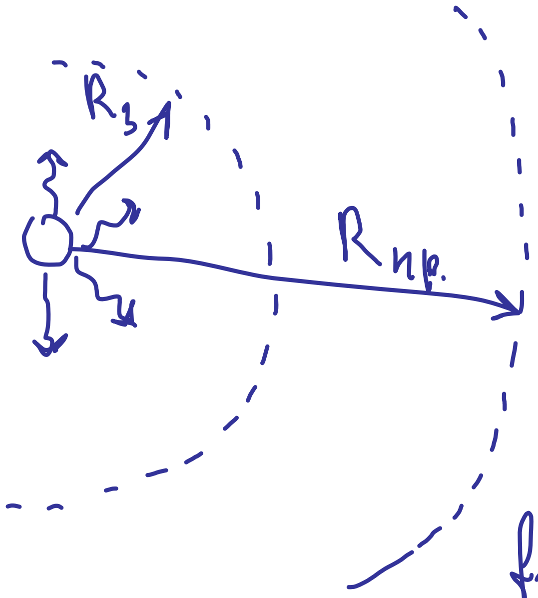
$$\dot M = 6\cdot 10^{43} \frac{M}{M_\odot} \frac{эрг\cdot см}{с} \cdot \frac{T_з^2}{4\pi^2 R_з^3} = \frac{1}{6}\cdot 10^{51} \frac{T_з^2}{R_з^3} \frac{г\cdot см^3}{с^3}$$

$$T_з = 3\cdot 10^7 с, \quad R_з = 1{,}5\cdot 10^{13} см, \quad M_\odot = 2\cdot 10^{33} г$$

$$\dot M = \frac{10^{51}\cdot 3^2\cdot 10^{14} \cancel{с^2}\cdot 2\cdot \cancel{см^3}}{6\cdot (1{,}5)^3\cdot 10^{39} \cancel{см^3}\cdot с^3} \approx \boxed{0{,}5\cdot 10^{26} \frac{г}{с}}$$

$$\frac{M_\odot}{T_з} = \frac{2\cdot 10^{33} г}{3\cdot 10^7 с} \approx 10^{26} \frac{г}{с} \qquad \boxed{\dot M \approx \frac{M_\odot}{20\,y}}$$

**2.** Звезда имеет светимость, равную солнечной. Рассчитайте параллакс звезды на расстоянии, на котором звезда имеет видимую звёздную величину, соответствующую предельной при наблюдении невооружённым глазом.



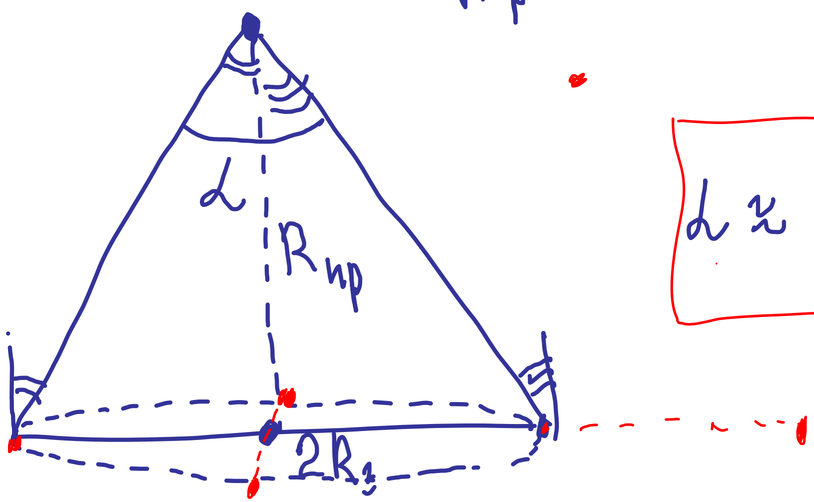

$$L_\odot = \cancel{4\pi} R_з^2 \cdot f_з = \cancel{4\pi} \cdot R_{пр}^2 \cdot f_{пр}$$

$$R_{пр}^2 = R_з^2 \frac{f_з}{f_{пр}}, \qquad \frac{f_1}{f_2} = 100^{-\frac{(m_1 - m_2)}{5}}$$

$$m_\odot = -26,7 \; ; \quad m_{пр} = 6$$

$$\frac{f_з}{f_{пр}} = 100^{\frac{(26,7+6)}{5}} = 100^{6,54} \approx 10^{13} \Rightarrow$$

$$\boxed{R_{пр} \approx 3 \cdot 10^6 R_з}$$




$$\boxed{\alpha \approx \frac{2R_з}{R_{пр}} \,(рад.)} = \frac{\cancel{2R_з}}{\cancel{3} \cdot 10^6 \cancel{R_з}} \approx 10^{-6} рад$$

$$\approx 0,2''$$

**3.** Звезда имеет массу вдвое меньше, чем у Солнца. Рассчитайте её абсолютную звёздную величину.

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\odot / 2, \quad M_\odot = 4{,}8$$

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^4 \Rightarrow L = \frac{1}{16} L_\odot$$

$$\frac{f_1}{f_2} = 100^{-\frac{(m_1 - m_2)}{5}} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = 100^{-\frac{(M_1 - M_2)}{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{16} = 10^{-\frac{(M - M_\odot)}{2{,}5}} \Rightarrow +\frac{M - M_\odot}{2{,}5} = +\lg 16$$

$$M = M_\odot + 2{,}5 \cdot \lg 16 = 4{,}8 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}2 = 7{,}8$$

**4.** На стадии формировании нейтронной звезды происходит усиление её магнитного поля. Энергия поля черпается из энергии вращения. Считая, что 10% энергии вращения может пойти на усиление поля, рассчитайте необходимый начальный период вращения нейтронной звезды для достижения поля $10^{14}$ Гс (считать, что поле равномерно заполняет объём нейтронной звезды).

$$\xi = 0{,}1, \quad M = 2M_\odot, \quad R = 10^6\ \text{см}, \quad M_\odot = 2\cdot 10^{33}\ \text{г}$$

$$E = \frac{B^2}{\cancel{8\pi}_{2}} \cdot \frac{\cancel{4\pi}}{3} R^3 = \xi \cdot \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \xi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{5} M R^2 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2$$

$$B^2 = \xi \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \frac{4\pi^2}{P^2} \frac{M}{R} \Rightarrow P^2 = 4\pi^2 \xi \frac{M}{R \cdot B^2} \Rightarrow$$

$$P \approx \sqrt{\frac{M}{R}} \cdot \frac{1}{B} \approx \sqrt{\frac{4\cdot 10^{33}}{10^6}} \cdot 10^{-14}\ \text{с} \approx 1\ \text{с}$$

**5.** Рассчитайте полное энерговыделение при слиянии (взаимном падении друг на друга) двух белых карликов с массами по 0.5 масс Солнца.


$0,5M_\odot + 0,5M_\odot \qquad\qquad M_\odot$

$M = 0,5M_\odot = 10^{33}$ г

$R_\odot = 7\cdot 10^{10}$ см

$R = 5\cdot 10^{8}$ см

$$|U_1| = 2\cdot\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$$

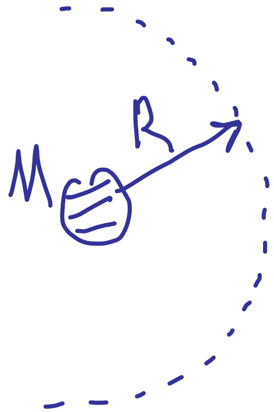
$M' = 2M$, $V' = 2V \Rightarrow R' = \sqrt[3]{2}\,R$ (если $\rho = const$)

$$|U_2| = \frac{3}{5}G\frac{(2M)^2}{\sqrt[3]{2}\,R} = \underbrace{2}\cdot\underbrace{\frac{3}{5}}\underbrace{G}\cdot 2^{2/3}\underbrace{\frac{M^2}{R}} = 2^{2/3}|U_1|$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = |U_1| - |U_2| = |U_1| - 1,6|U_1| = -0,6|U_1|$$

$$\Delta E_{изл} = 0,6\cdot\frac{6}{5}\frac{GM^2}{R} = \frac{\cancel{0,6}\cdot\cancel{1,2}\cdot\cancel{7}\cdot 10^{-8}\,\text{см}^3\cdot 10^{66}\,\cancel{\text{г}^2}}{\cancel{2}\cdot\text{с}^2\cdot\cancel{5}\cdot 10^{8}\,\cancel{\text{см}}} \approx 10^{50}\ \text{эрг.}$$

**6.** Оценить массу Sgr A*, взяв параметры звезды SO2. Орбитальный период - 15,2 года, полуось орбиты – 0,005 пк.




$$\frac{v^2}{\cancel{R}} = \frac{GM}{R^{\cancel{2}}} \Rightarrow \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{(2\pi)^2} R^3 = \cancel{G} M T^2 \\ \cancel{(2\pi)^2} R_{\text{з}}^3 = \cancel{G} M_\odot T_{\text{з}}^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{R}{R_{\text{з}}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{\text{з}}}\right)^2 \frac{M}{M_\odot} \Rightarrow M = M_\odot \left(\frac{R}{R_{\text{з}}}\right)^3 \left(\frac{T_{\text{з}}}{T}\right)^2$$

$R_{\text{з}} = 1$ а.е., 1 пк $= 2\cdot 10^5$ а.е., $R = 10^3$ а.е.

$$M = M_\odot \cdot 10^9 \frac{1}{(15,2)^2} \approx 4,3 \cdot 10^6 M_\odot$$

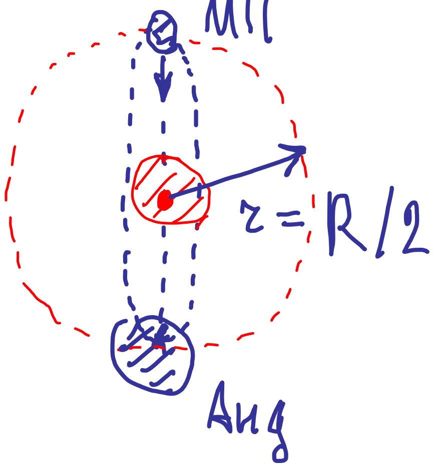
**7.** Рассчитать время до столкновения М31 (туманности Андромеды) и Млечного пути.

$$M_м = 4{,}8 \cdot 10^{11} M_\odot$$

$$M_A = 8 \cdot 10^{11} M_\odot$$

$$R = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ св. лет} = 7{,}7 \cdot 10^5 \text{ пк} = 16 \cdot 10^{10} \text{ а.е.}$$

$$\frac{v^2}{\cancel{r}} = G \frac{M_A}{r^{\cancel{2}}} \qquad \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{G M_A}{r}$$



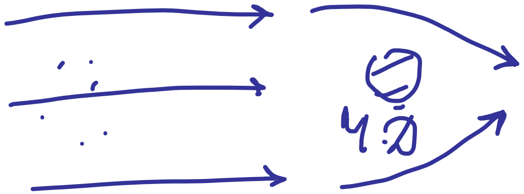

$$\begin{cases} \cancel{(2\pi)^2}\, r^3 = \cancel{G} M_A T^2 \\ \cancel{(2\pi)^2}\, R_з^3 = \cancel{G} M_\odot T_з^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{r}{R_з}\right)^3 = \frac{M_A}{M_\odot}\left(\frac{T}{T_з}\right)^2 \Rightarrow T = T_з \left(\frac{M_A}{M_\odot}\right)^{-1/2} \left(\frac{r}{R_з}\right)^{3/2}$$

$$\Delta t_{пад} = T/2, \quad r = R/2 \Rightarrow \Delta t_{пад} = \frac{1}{2} T_з \cdot \left(\frac{M_A}{M_\odot}\right)^{-1/2} \left(\frac{R}{2R_з}\right)^{3/2} =$$

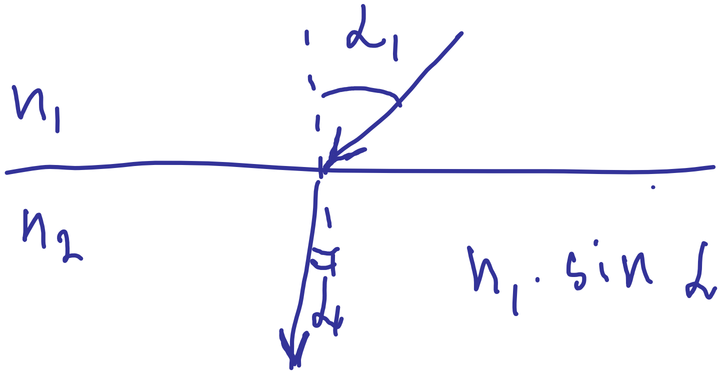
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ год} \left(10^{12}\right)^{-1/2} \cdot \left(8 \cdot 10^{10}\right)^{3/2} = \cancel{\frac{1}{2}}\, 10^{-6} \cdot \cancel{20}\,10 \cdot 10^{15} \text{ лет} = 10^{10} \text{ лет} = 10 \text{ млрд. лет}$$

**8.** Эффективный показатель преломления света при линзировании чёрной дырой (в приближении слабого поля).




$$\boxed{n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_g}{r}}}}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$$




$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\varepsilon = \mu = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$$

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$$

$$g_{00} = 1 - \frac{R_g}{r}$$