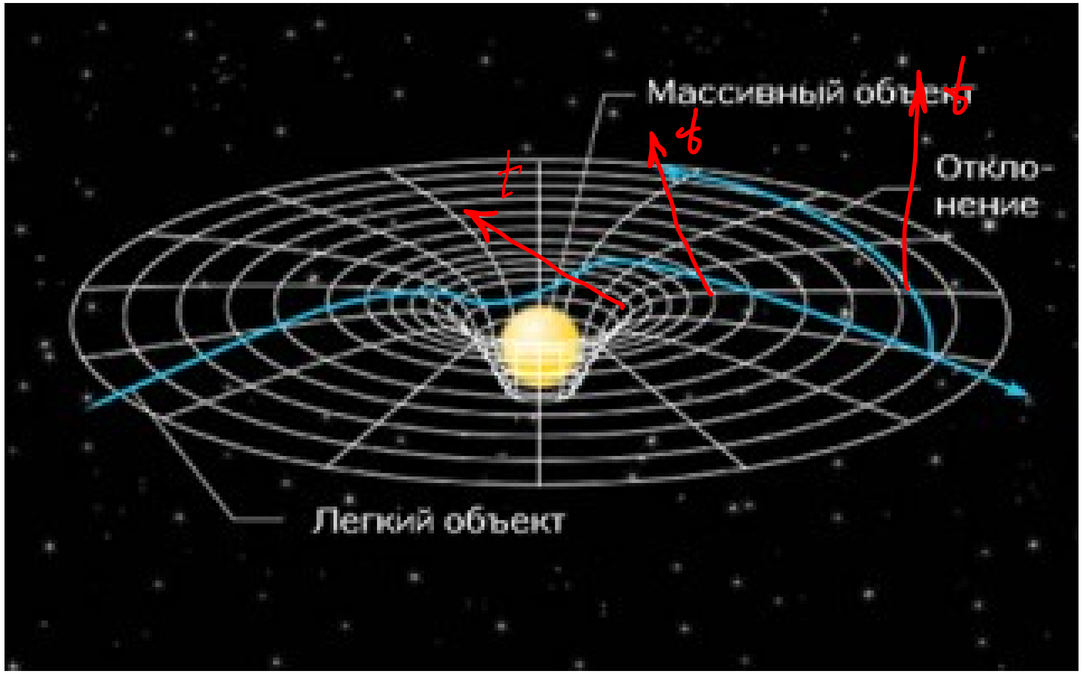
Астрофизика – 2020/2021

семинары *N*12-13 (2 декабря 2020г., 13:00)

группа *N*2

преподаватель – доц. Думин Юрий Викторович

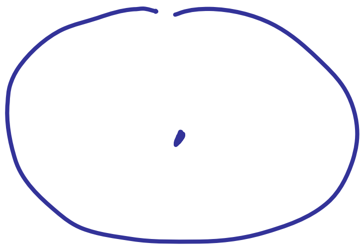
1. Основная идея Общей теории относительности – описание гравитации в терминах искривлённого пространства-времени.



1. Массивн. тело деформир. пр-во

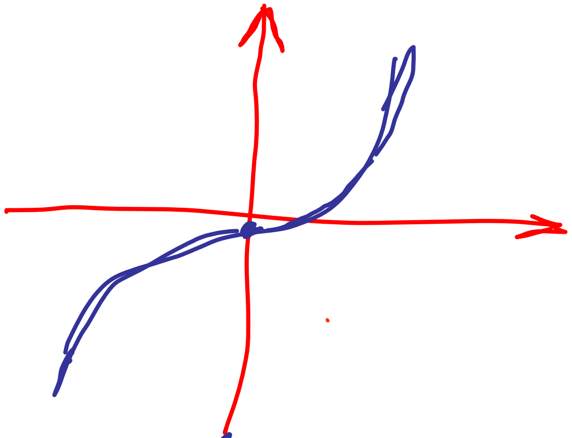
2. Деформ. пр-во изменяет траектории пробн. тел.

2. Основные типы пространств, рассматриваемые в космологии: замкнутое пространство с положительной кривизной, бесконечное пространство с нулевой кривизной, бесконечное пространство с отрицательной кривизной.

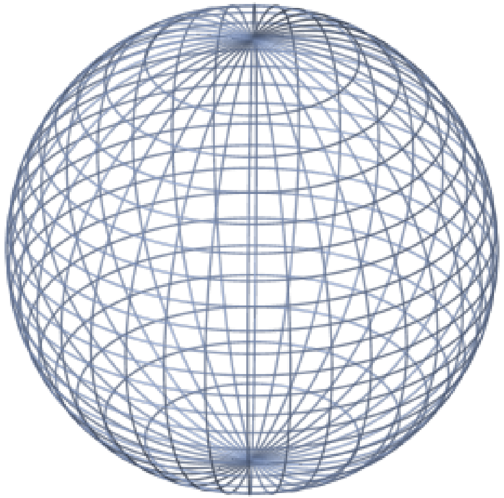


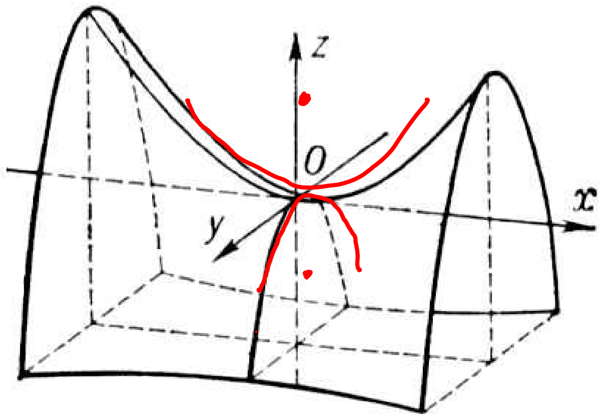
пр-во – огран
с пол. кр

пр-во – бескон.
плоское

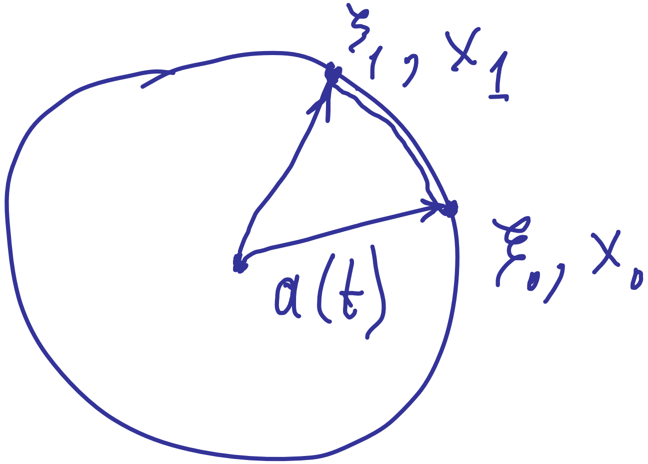


пр-во – бескон.
с отр. кр.





3. Расширяющееся пространство. Сопутствующие и “физические” координаты. Хаббловские и пекулярные скорости. Закон Хаббла.



$$\Delta x = a(t)\cdot\Delta\xi$$

$$(\Delta x)^{\cdot} = \dot a\cdot\Delta\xi = \dot a\,\frac{\Delta x}{a} = \frac{\dot a}{a}\cdot\Delta x$$

$\frac{\dot a}{a}$ — $H(t)$

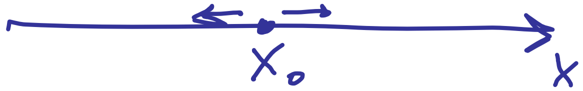
$$\boxed{v = (\Delta x)^{\cdot} = H\cdot\Delta x}$$ — зак. Хаббла

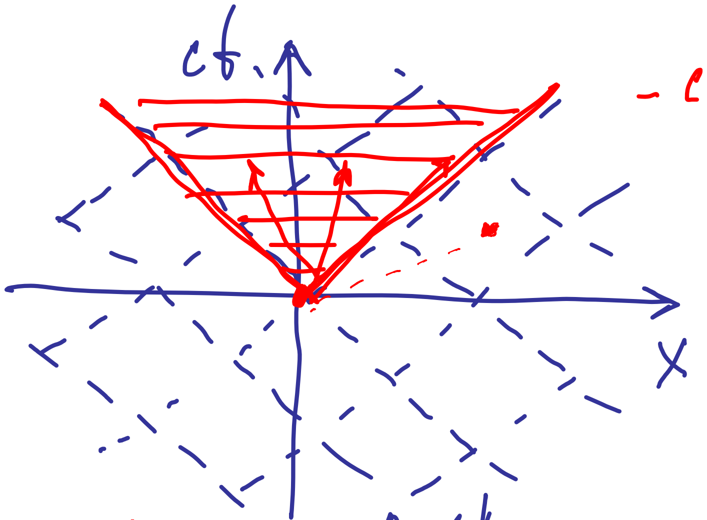
$$\vec v = H\,\Delta\vec r$$

4. Распространение света в плоском и искривлённом пространстве. Конформное время. Конусы причинности.

Распр. свет. лучей в плоском пр-ве.

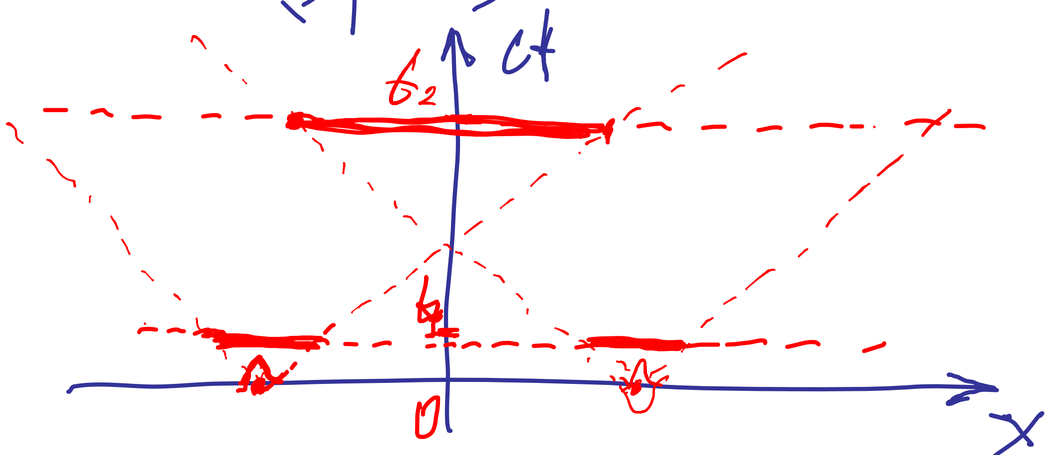
$$dx = \pm c \cdot dt \Rightarrow x = x_0 \pm ct$$

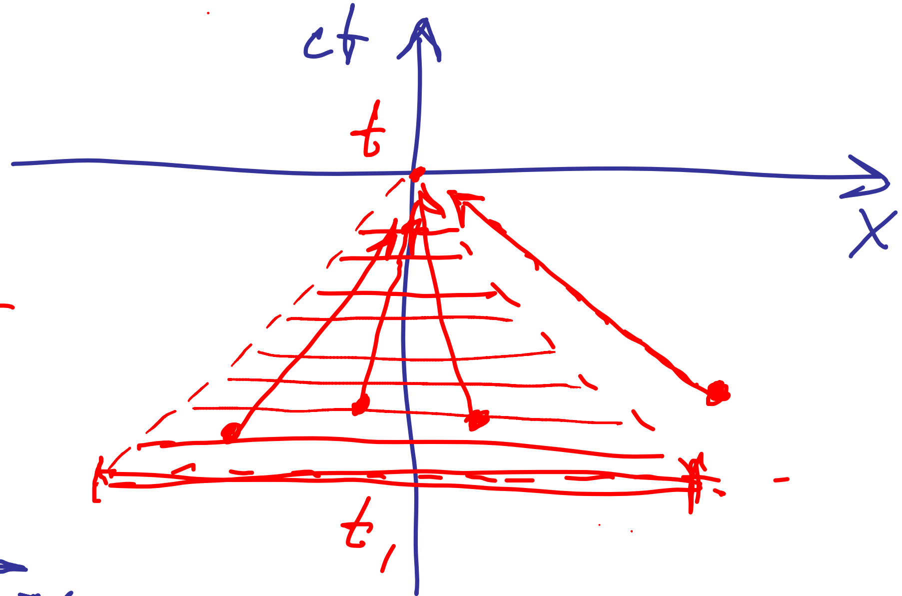


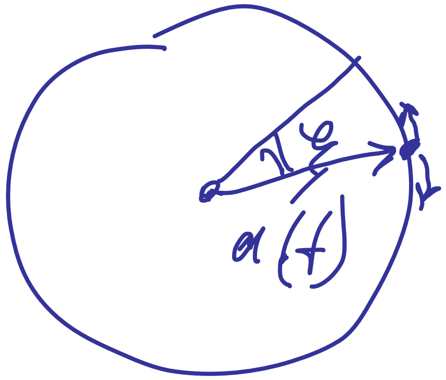


- свет. конус (конус причинности)

св. конус прошлого







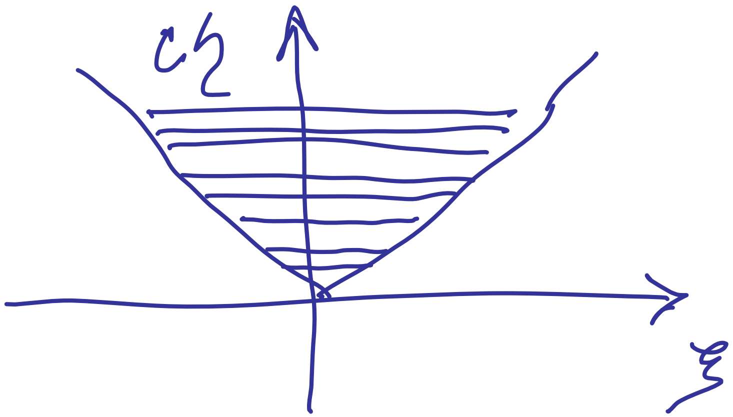
$$dx = \pm c \cdot dt \Rightarrow$$

$$a(t) \cdot d\xi = \pm c \cdot dt$$

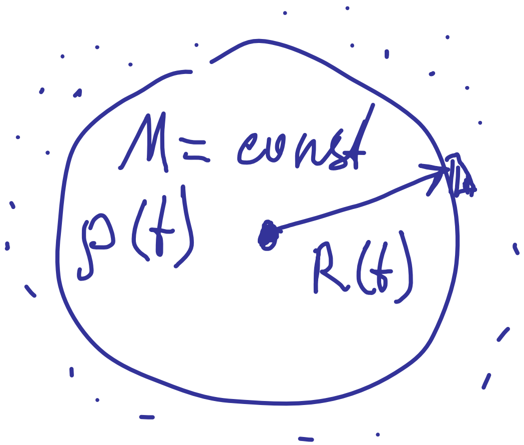
$$d\xi = \pm \frac{c \cdot dt}{a(t)}$$

$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$ – конформное время, $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$

$$\boxed{d\xi = \pm c \cdot d\eta} \qquad \xi = \xi_0 \pm c \cdot \eta$$



5. Уравнение Фридмана: вывод в квази-ньютоновском приближении и обобщение на случай произвольного уравнения состояния вещества. Космологическая постоянная (лямбда-член).



$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM\,\frac{4\pi}{3}R}{R^2\,\frac{4\pi}{3}R} = -\frac{4\pi}{3}G\rho R$$

$$\varepsilon = \rho\cdot c^2$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\,\varepsilon\cdot R$$

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\,\varepsilon + \frac{c^2\Lambda}{3}}$$

– частный случай ур-ния Фридмана.

$$\frac{\ddot R}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{c^2\Lambda}{3} \quad \Big| \; 2R\dot R$$

$$2\dot R\ddot R = -\frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\overbrace{R^3\cdot\varepsilon}^{const}}{R^2}\cdot\dot R + \frac{c^2\Lambda}{3}\cdot 2R\dot R$$

$$(\dot R^2)^{\cdot} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\varepsilon R^3)\left(\frac{1}{R}\right)^{\cdot} + \frac{c^2\Lambda}{3}(R^2)^{\cdot} \qquad \int \ldots dt$$

$$\dot R^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon R^{\cancel{3}\,2}\frac{1}{\cancel{R}} + \frac{c^2\Lambda}{3}R^2 - kc^2, \quad \underline{k = const}$$

$$\boxed{H^2 \equiv \left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(R) + \frac{c^2\Lambda}{3} - kc^2\frac{1}{R^2}}$$

– ур. Фридмана.

$$\boxed{H = \dot a / a}$$

$$k = \begin{cases} +1 & \text{– замкн 3D пр-во с пол. кр.} \\ 0 & \text{– бескон. плоск. пр-во} \\ -1 & \text{– беск. 3D пр-во с отр. крив.} \end{cases}$$

$$\boxed{H = \frac{\dot a}{a} = \frac{\dot R}{R}} \quad v = \dot R = H\cdot R$$

$\varepsilon(R) = ?$ для разных типов в-ва.

1) Нерелятив (пылеобразное) в-во.

$\varepsilon = \rho \cdot c^2$, $\underbrace{p = 0}$

$$\underbrace{v \ll c}$$

$p = n \cdot kT \approx n \cdot mv^2 = \rho \cdot v^2 \ll \varepsilon$

$E = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \varepsilon = const \Rightarrow \varepsilon_0 \cdot R_0^3 = \varepsilon(t) \cdot R^3(t)$

$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3$

2) Ультрарелятив. в-во (излучение)

$$\boxed{p = \frac{\varepsilon}{3}}$$

$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta t \cdot \Delta S}$

$E_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$

$v \ll c$

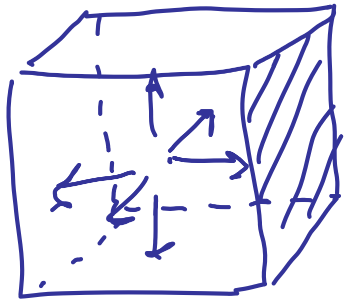
$v \to c \quad E_1 \to \infty$: $\boxed{E \gg mc^2}$

2) Ультрарелятив. в-во (излучение)

$$\boxed{p = \frac{\varepsilon}{3}}$$

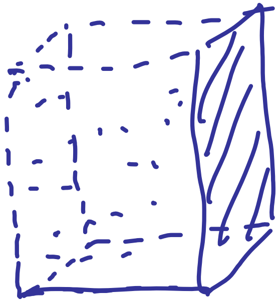
$$\underbrace{p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta t \cdot \Delta S}}$$

n



$\frac{1}{6} n$ $\quad P_1 = \frac{E_1}{c}$, $\quad \Delta P = 2 P_1$

$$p = \frac{\cancel{2} E_1 \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{\Delta t} \cdot \cancel{\Delta S} \cdot n}{\cancel{c} \cdot \cancel{6}\, 3 \cdot \cancel{\Delta t} \cdot \cancel{\Delta S}} = \frac{\varepsilon}{3}$$



ΔS

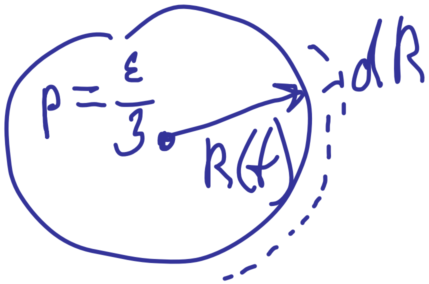
$c \cdot \Delta t$

$c \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot \frac{n}{6}$ – кол-во частиц, которые столкнутся со стенкой

$\varepsilon(R) = ?$

Из 1-го начала термодинамики

$\boxed{dE = -p \cdot dV}$ (при $\delta Q = 0$)



$$d\left(\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \varepsilon\right) = -\frac{\varepsilon}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot dR$$

$$\cancel{\frac{4\pi}{3}}\, 3R^2 dR \cdot \varepsilon + \cancel{\frac{4\pi}{3}} R^3 \cdot d\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{\cancel{3}}\, \cancel{4\pi} R^2 \cdot dR$$

$$R^{\cancel{3}} \cdot d\varepsilon = -4 \cancel{R^2} \cdot dR \cdot \varepsilon$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -4 \frac{dR}{R} \Rightarrow d \ln \varepsilon = \cancel{-4}\, d \ln R^{-4}$$

$$\ln \varepsilon = \ln R^{-4} + \text{const} \Rightarrow \varepsilon = \frac{C}{R^4}, \quad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4}$$

$$\boxed{\cancel{H^2} = \left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{c^2\Lambda}{3} - \cancel{kc^2\frac{1}{R^2}}}$$

$R(t) = ?$

$$k = \begin{cases} 1, \\ 0, \\ -1. \end{cases}$$

нерел. в-во (пыль): $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$

ультрарел. в-во (изл.): $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$

Частные случаи

1) $\Lambda = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$ – нерел. в-во

2) $\Lambda = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$ – излучение

3) $\varepsilon = 0$, $\Lambda = const \neq 0$ – вакуумн. эн. („тёмн. энергия“)