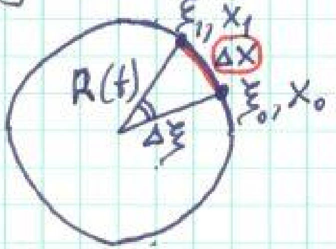
# Семинар №12-13

## Хаббловское расширение на примере 1-мерной модели:




$\xi$ — сопутств. коорд. (угол)

$x$ — физическая коорд.

$\Delta x = R\cdot\Delta\xi$

$(\Delta x)^{\cdot} = \dot R\cdot\Delta\xi = \dot R\,\dfrac{\Delta x}{R} = \underbrace{\dfrac{\dot R}{R}}_{H}\Delta x$

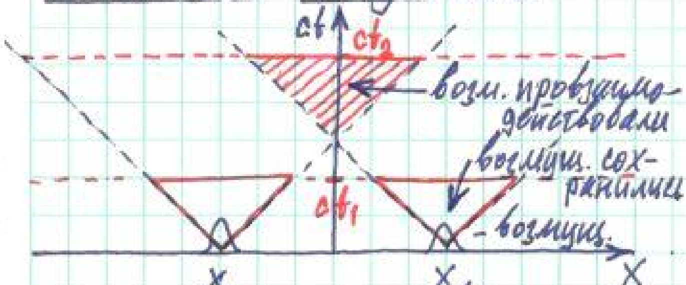
$\boxed{v = H\cdot\Delta x}$ — зак. Хаббла

$H = \dot R/R = (\Delta x)^{\cdot}/\Delta x$

## Движ. свет. луча в плоском пространстве:

$dx = \pm c\cdot dt \Rightarrow \boxed{x = x_0 \pm c\cdot t}$


## Релаксация возмущений:





## Движ. свет. луча в искривлённом пр-ве:

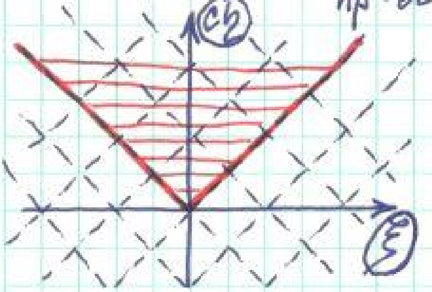
физич. расст. $dl = R(t)\cdot d\xi = \pm c\cdot dt \Rightarrow$

$d\xi = \pm\dfrac{c\,dt}{R(t)}$, | $\eta = \displaystyle\int \frac{dt}{R(t)}$ — конформное время

$d\xi = \pm c\cdot d\eta$ | $d\eta = \dfrac{dt}{R(t)}$

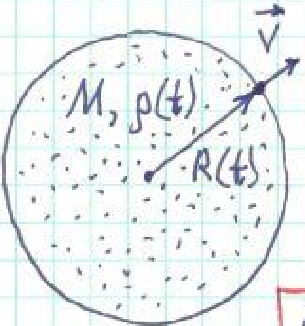
# Семинар № 12-13

$\boxed{\xi = \xi_0 \pm c\cdot\eta}$ – ур-ние светового луча в искривл. пр-ве




В конформ. координатах световой конус вновь будет представляться прямыми линиями.

Вывод ур-ния Фридмана (в ньютоновском приближении):




$$\boxed{\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}}$$ – ур-ние тягот. Ньютона

$$M = \frac{4\pi}{3}R^3(t)\cdot\rho(t)$$

$$\frac{\ddot R}{R} = -\frac{G}{\cancel{R^2}}\cdot\frac{4\pi}{3}\cancel{R^3}\cdot\rho, \quad \rho = \frac{\varepsilon}{c^2}$$

$$\boxed{\frac{\ddot R}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{c^2}{3}\Lambda}$$ – ур-ние Фридмана

вакуумн. энергия, $\Lambda = const$

Умножим обе части на $2R\dot R$

$$2\dot R\ddot R = -\frac{8\pi G}{3c^2}\overbrace{\varepsilon R^3}^{=const}\frac{\dot R}{R^2} + \frac{c^2}{3}\Lambda\cdot 2R\dot R$$

$$(\dot R^2)^{\cdot} = +\frac{8\pi G}{3c^2}\underbrace{\varepsilon R^3}_{const}\left(+\frac{1}{R}\right)^{\cdot} + \frac{c^2}{3}\Lambda(R^2)^{\cdot} \to \int\ldots dt$$

# Семинар № 12-13

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon R^{\cancel{3}\,2}\frac{1}{\cancel{R}} + \frac{c^2}{3}\Lambda R^2 - kc^2, \quad k = const \text{ — пост. интегрир.}$$

$$\boxed{H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{c^2}{3}\Lambda - kc^2\frac{1}{R^2}}$$ — другая форма ур-ния Фридмана

Путём преобразования $R \to \alpha R$ можно выбрать $k = +1, 0$ или $-1$,

Если ур-ние Фридмана выводится из Общей теории относительности Эйнштейна, то:

1) $\varepsilon$ – плотность энергии произвольной материи (вещества и излучения),
2) $k$ – знак глобальной кривизны 3-мерного пространства.

$$k = \begin{cases} +1 & \text{– замкнутое пр-во с положит. кривизной} \\ 0 & \text{– бесконечное плоское пр-во} \\ -1 & \text{– бесконечное пр-во с отрицат. кривизной} \end{cases}$$

Уравн. состояния нерелятивистского („пылевидного") вещества:

$\varepsilon = \rho \cdot c^2$

$p = nkT \approx n \cdot mv^2 = \rho v^2$

Т.к. $\boxed{v \ll c}$, то $p \ll \varepsilon \Rightarrow \boxed{p \approx 0}$

# Семинар №12-13



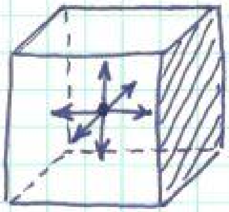
Уравн. состояния ультрарелятивистского вещества ($v \approx c$) или излучения:

$$\underset{\text{давл.}}{p} = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta t \cdot \Delta S}$$ ← импульс, $\quad P_1 = \frac{E_1}{c}$ ← энергия одной частицы

импульс одной частицы

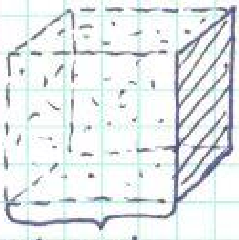
изменение импульса при ударе

$$p = \frac{2P_1 \cdot \Delta N}{\Delta t \cdot \Delta S}$$ ← кол-во частиц, сталкивающихся со стенкой за время $\Delta t$



$\Delta S$

Если $n$ – полная концентрация частиц, то концентрация частиц летящих в направл. стенки: $\frac{1}{6}n$



$\Delta S$

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \cdot (c \cdot \Delta t) \cdot \Delta S$$

$$p = \frac{\cancel{2}\overbrace{E_1 \cdot n}^{\varepsilon}\cancel{c \cdot \Delta t \cdot \Delta S}}{\cancel{c} \cdot \cancel{6}_{3} \cdot \cancel{\Delta t} \cdot \cancel{\Delta S}} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Delta l = c \cdot \Delta t$

(условие, что частица успеет долететь до стенки за время $\Delta t$)

$$\boxed{p = \frac{\varepsilon}{3}}$$

Как изменяется $\varepsilon(R(t))$ в процессе расширения?

Из 1-го начала термодинамики: $\Delta E = \cancel{\Delta Q} - p \cdot \Delta V$

потоков тепла нет в силу однородности пр-ва

$$\boxed{dE = -p \cdot dV}, \quad E = \frac{4\pi}{3} R^3 \varepsilon$$

# Семинар №12-13

а) нерелятивистская материя:

$\boxed{p=0} \Rightarrow d\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right)=0 \Rightarrow R^3\varepsilon = const \Rightarrow$

$$\boxed{\varepsilon(t)\propto\frac{1}{R^3(t)}}$$

б) ультрарелятивистская материя (излучение)

$$\boxed{p=\frac{\varepsilon}{3}} \Rightarrow \underbrace{d\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right)}_{E} = -\underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{p}\cdot\underbrace{4\pi R^2\cdot dR}_{dV}$$

$$\cancel{4\pi}R^2 dR\cdot\varepsilon+\frac{\cancel{4\pi}}{3}R^3\cdot d\varepsilon=-\frac{\cancel{4\pi}}{3}R^2\cdot dR\cdot\varepsilon$$

$$\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{R^2}\cdot dR\cdot\varepsilon+\frac{1}{\cancel{3}}R^{\cancel{3}}\cdot d\varepsilon=0$$

$$R\cdot d\varepsilon=-4\varepsilon\cdot dR\,,\quad \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=-4\frac{dR}{R}\,,\quad d\ln\varepsilon=-4d\ln R$$

$$\ln\varepsilon=\ln\frac{1}{R^4}+const$$

$$\boxed{\varepsilon(t)\propto\frac{1}{R^4(t)}}$$