

Астрофизика – 2020/2021

семинары №14-15 (9 декабря 2020г., 13:00)

группа №2

преподаватель – доц. Думин Юрий Викторович

1. Уравнения Фридмана.

$$\frac{\ddot{R}}{R} = - \frac{4\pi G}{3c^2} \epsilon + \frac{c^2}{3} \Lambda \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon + \frac{c^2}{3} \Lambda - k c^2 \frac{1}{R^2}$$

$$k = \begin{cases} +1 & - \text{замкн. пр-во с поз. крив} \\ 0 & - \text{бескон. плоск. пр-во} \\ -1 & - \text{бескон. пр-во с отриц. крив.} \end{cases}$$

Нерел. в-во: $\rho = 0$, $\epsilon \propto \frac{1}{R^3}$

Ультрарел. в-во (излучение): $\rho = \frac{\epsilon}{3}$, $\epsilon \propto \frac{1}{R^4}$

2. Уравнение состояния вакуумной ("тёмной") энергии. Общая параметризация уравнения состояния.

$$\Lambda \propto \varepsilon_\Lambda = \text{const}$$

1-е начало термодин.: $\Delta E = \cancel{\Delta Q} - p \cdot \Delta V$

$$\underbrace{d\left(\varepsilon_\Lambda \cdot \frac{4\pi}{3} R^3\right)}_{\text{red arrow}} = -p_\Lambda \cdot 4\pi R^2 \cdot dR, \quad \varepsilon_\Lambda \cdot \cancel{4\pi R^2 dR} = -p_\Lambda \cdot \cancel{4\pi R^2 dR}$$

$$\boxed{p_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda}$$

$$\boxed{p = w \cdot \varepsilon},$$

$$w = \begin{cases} 0 - \text{нерел. б-во, } \varepsilon(R) \propto \frac{1}{R^3} \\ 1/3 - \text{ультарел. б-во (излучение), } \varepsilon \propto \frac{1}{R^4} \\ -1 - \text{вакуум, } \varepsilon = \text{const} \end{cases}$$

3. Решение уравнения Фридмана для нерелятивистского вещества.

$$\Lambda=0, \quad k=0 \quad \left| \quad \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \cdot \frac{\epsilon_0 R_0^3}{R^3}, \quad \frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{8\pi G \epsilon_0 R_0^3}{3c^2}} R^{-3/2} \right. \quad C_1$$

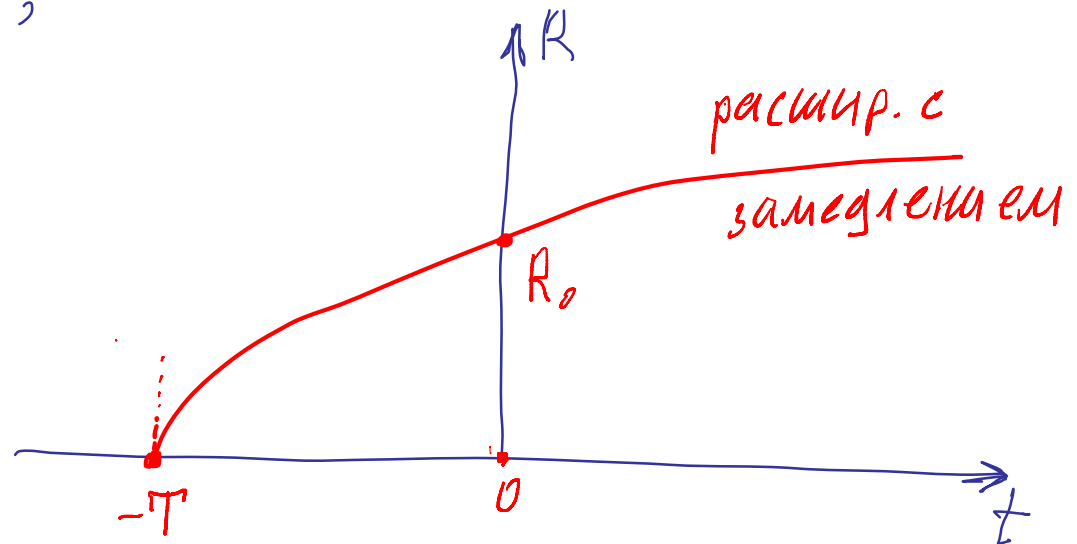
$$w=0$$

$$\frac{dR}{dt} = C_1 \cdot R^{-1/2} \Rightarrow \int R^{1/2} \cdot dR = \int C_1 \cdot dt \Rightarrow \frac{2}{3} R^{3/2} = C_1' \cdot t + \text{const}$$

$$R^{3/2} = C'(t + T), \quad \text{при } t = -T \rightarrow R = 0, \quad \text{где } T - \text{возраст Всел.}$$

$$R(t) = \frac{R_0}{T^{2/3}} (t + T)^{2/3}, \quad t = 0 \rightarrow R(0) = R_0$$

$$R = R_0 \left(\frac{t + T}{T} \right)^{2/3}$$

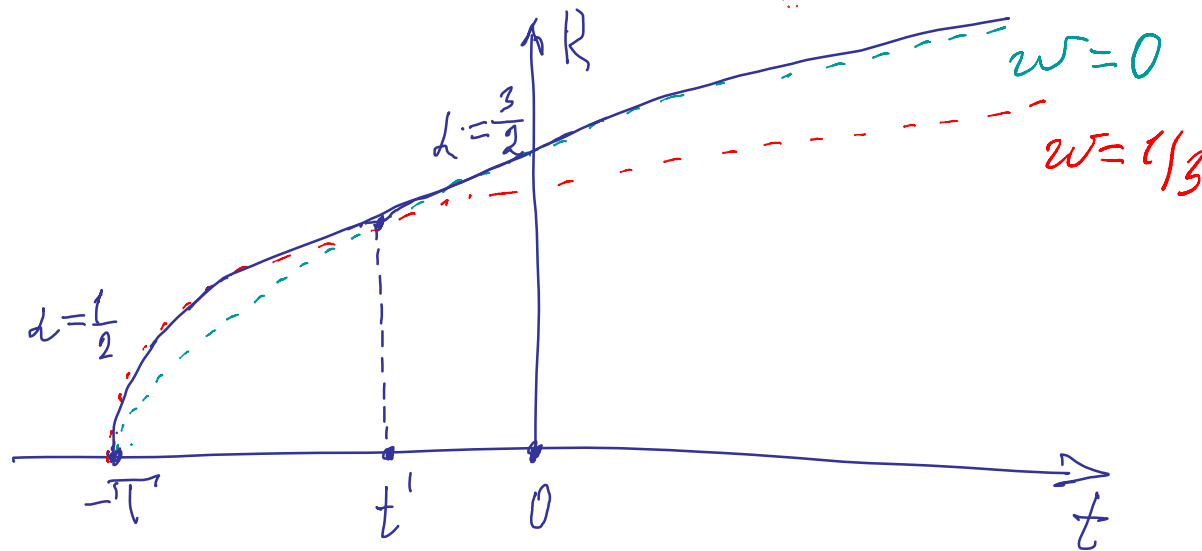


4. Решение уравнения Фридмана для ультрарелятивистского вещества (излучения).

$$w = \frac{1}{3} \quad \left| \quad \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\epsilon_0 R_0^4}{R^4}, \quad \frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{8\pi G \epsilon_0 R_0^4}{3c^2}} \frac{1}{R^2}$$

$$\frac{dR}{dt} = c_2 \cdot R^{-1}, \quad \int R \cdot dR = \int c_2 \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{2} R^2 = c_2' t + \text{const}$$

$$R^2 = c_2'(t + T), \quad R = \frac{R_0'}{T^{1/2}} (t + T)^{1/2}, \quad \boxed{R = R_0' \left(\frac{t + T}{T} \right)^{1/2}}$$



5. Возможность перехода от расширения к сжатию. Критическая плотность энергии.

Если $k \neq 0$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(R) - k c^2 \frac{1}{R^2}$$

$\downarrow \frac{1}{R^3} \text{ или } \frac{1}{R^4}$

становится доминирующим
при увеличении R

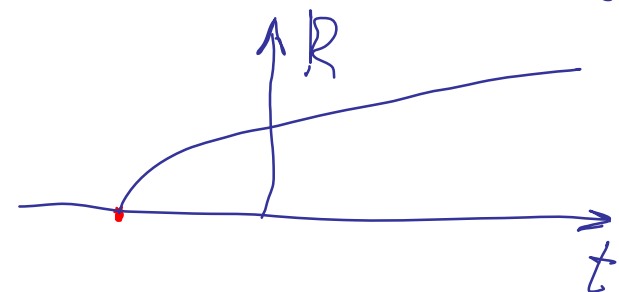
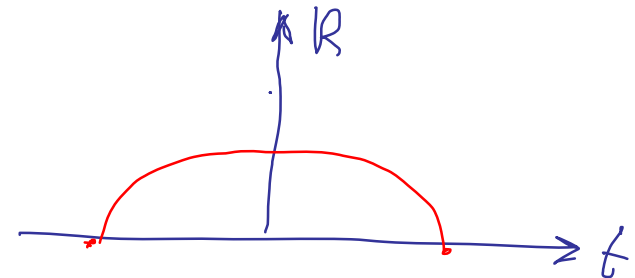
(проблема формир. плоского
вр-ва)

Возможно ли достижение экстремума $R(t)$, т.е. переход
от расширения к сжатию?

Пусть $\dot{R} = 0$, тогда:

1) если $\underline{k=1}$, то экстремум возможен

2) если $\underline{k=-1}$, то экстремум невозможен



Критическая плотн. энергии

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0^2 \equiv H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_{cr} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{cr} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}}$$

Пусть $k \neq 0$, тогда

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0^2 \equiv H_0^2 \equiv \boxed{\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - kc^2 \frac{1}{R_0^2}} \quad \textcircled{\Lambda=0}$$

Если $\varepsilon_0 > \varepsilon_{cr}$, то $k=1 \Rightarrow$ Всел. замкнута и сущест. конечн. вр.

Если $\varepsilon_0 < \varepsilon_{cr}$, то $k=-1 \Rightarrow$ Всел. бесконечна и сущест. бескон. время.

6. Недостатки классической ("доинфляционной") космологической модели.
 Анализ поведения возмущений в конформных координатах.

Проблемы классич. космол. модели:

- 1) наличие сингулярности при $t = -T$ (?)
- 2) формир. плоского 3D пространства
- 3) очень неустойч. распрсг. в-ва, т.к. возмущ. после в-в. не успевают релаксир. к моменту наблюдения.

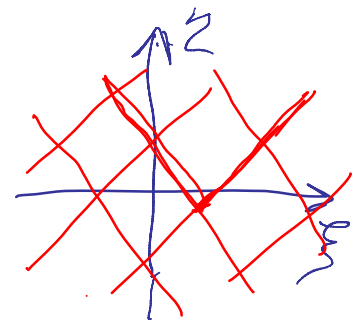
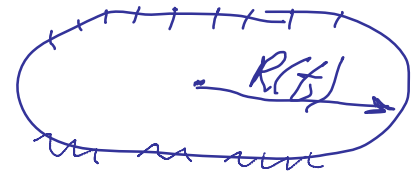
Анализ возмущений в конформных координатах

ξ — возмущ. метр. тенз. в простр. коорд

$$\eta = \int \frac{e \cdot dt}{R(t)} \quad \text{— конформн. время}$$

$$w = \frac{1}{3}, \quad R = R_0 \left(\frac{t+T}{T} \right)^{1/2}$$

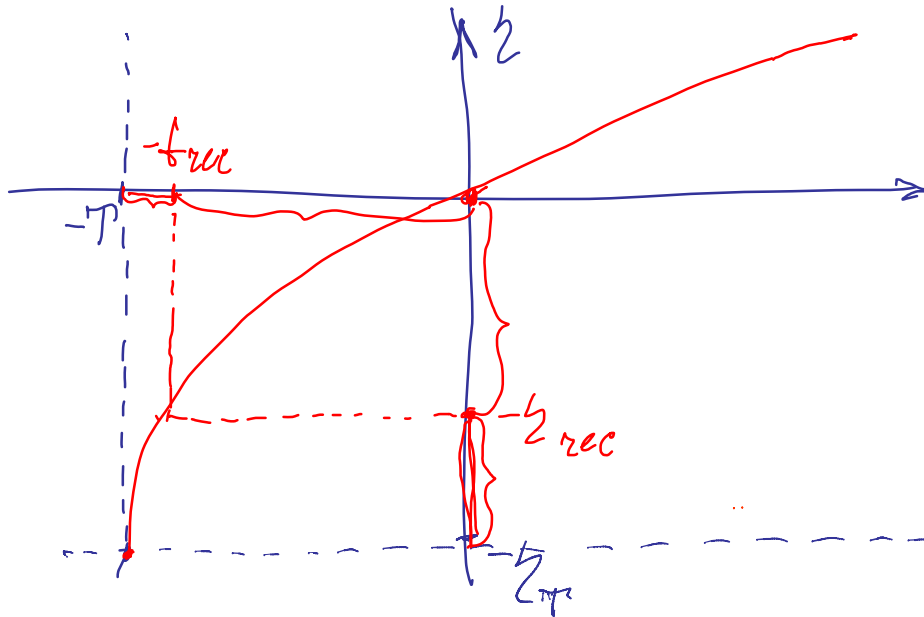
$$h = \frac{\sqrt{T} \cdot c}{R_0} \int \frac{dt}{\sqrt{t+T}} = \frac{2(\sqrt{T})^2 \cdot c}{R_0} \frac{\sqrt{t+T}}{\sqrt{T}} - \zeta_T$$



$$z(t) = z_T \left(\sqrt{\frac{t+T}{T}} - 1 \right)$$

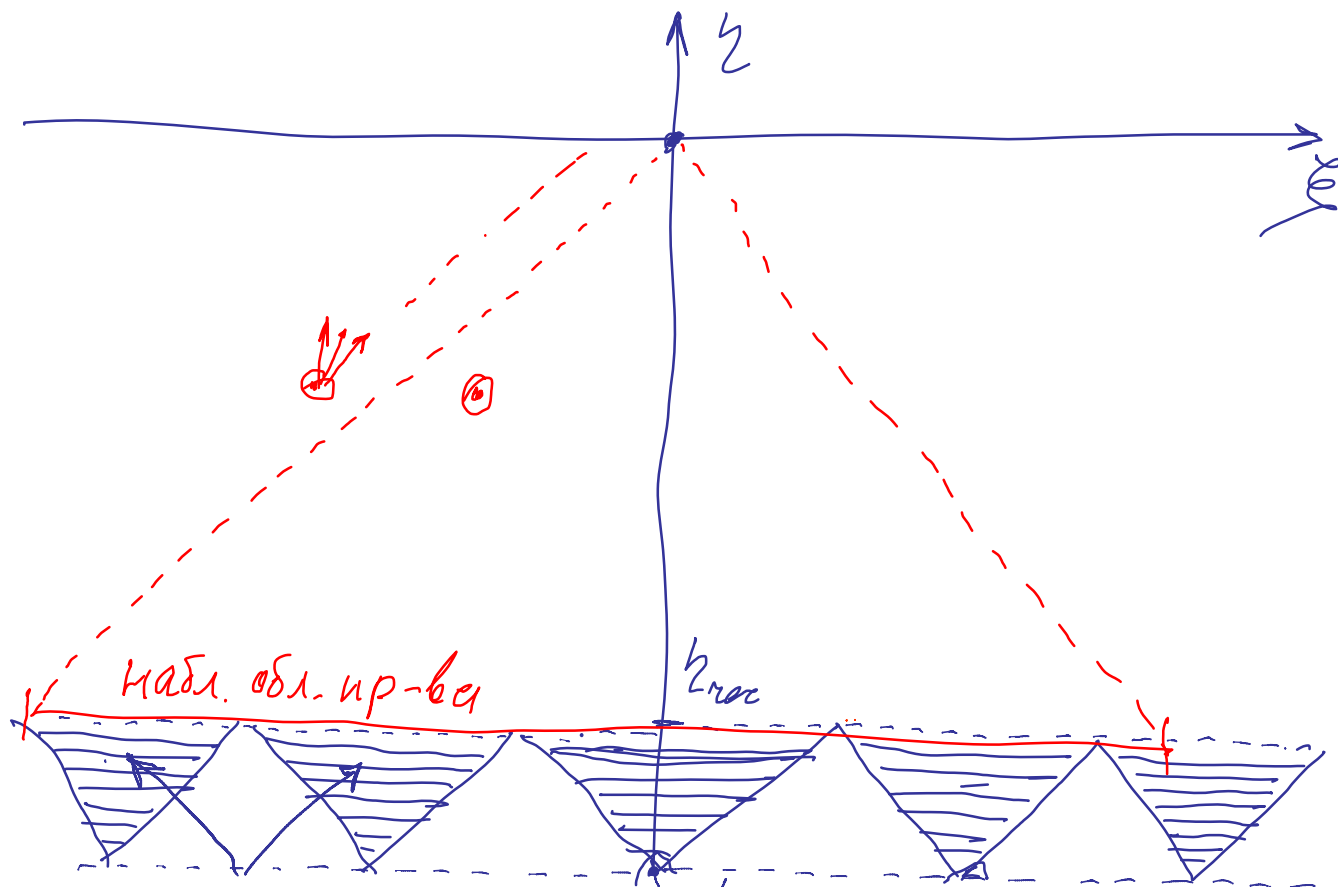
$$z(-T) = -z_T$$

$$z(0) = 0$$

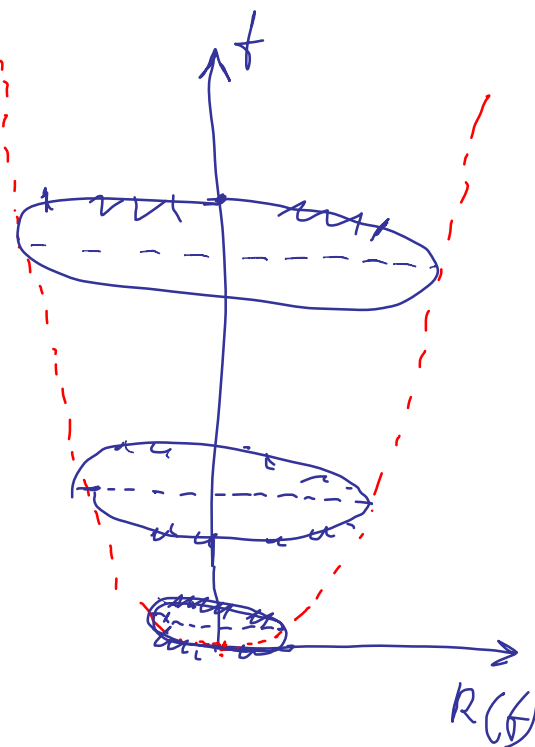


$$T - t_{rec} \ll t_{rec} \Rightarrow$$

$$z_T - z_{rec} \ll z_{rec}$$



области, в которых условно
васи произойти релакс. возм



7. Решение уравнения Фридмана при наличии космологической постоянной (лямбда-члена) и его основные свойства.

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{c^2}{3} \Lambda - \underbrace{kc^2 \frac{1}{R^2}}_{\rightarrow \text{быстро убывает}}$$

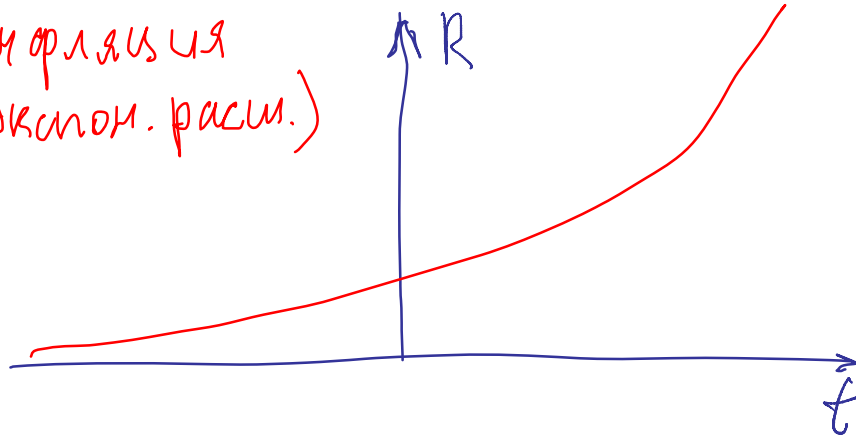
Пусть вначале $k=0 \Rightarrow \dot{R}^2 = \frac{c^2}{3} \Lambda R^2 \Rightarrow \dot{R} = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} R \Rightarrow$

$$\frac{dR}{R} = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} dt \Rightarrow \int d \ln R = \int \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} dt \Rightarrow \ln R = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} t + \underbrace{\text{const}}_{\ln R_0}$$

$$R(t) = R_0 \cdot \exp\left(\frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} t\right)$$

$$H = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} = \text{const}$$

инфляция
(экспон. расш.)



- 1) нет сингулярности.
- 2) если $k \neq 0$, то 2-й член быстро убывает, т.е.

формируется плоское пр-во

- 3) как процесс релакс. возм?

8. Анализ поведения возмущений в инфляционной модели.

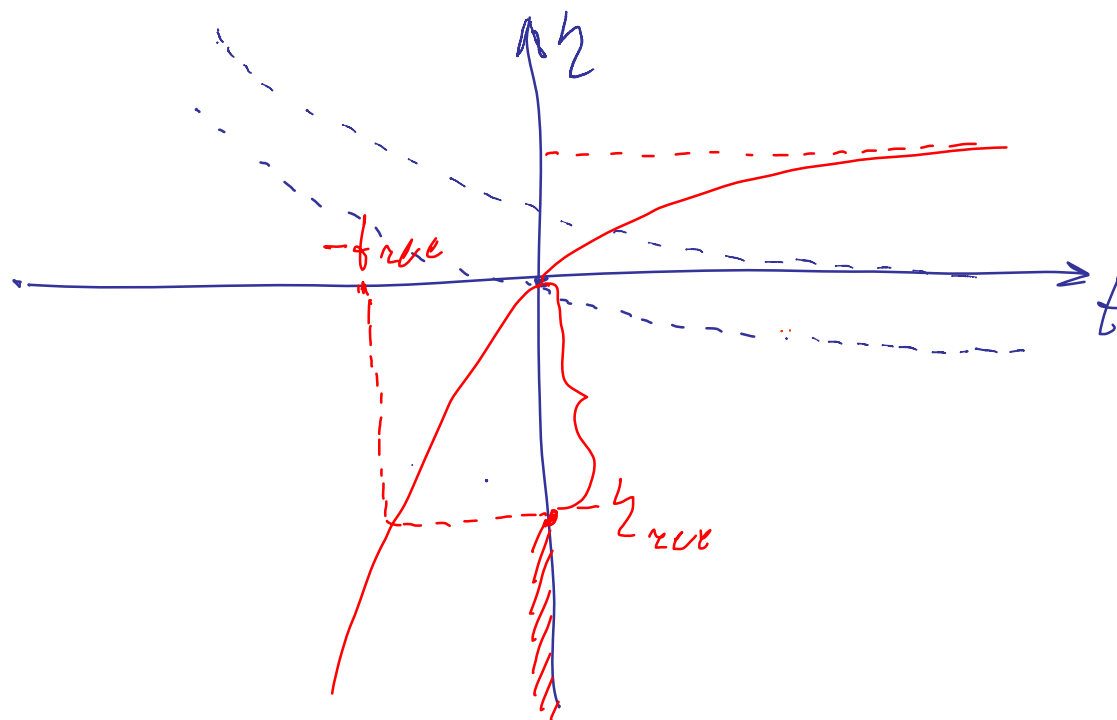
$$\zeta = \int \frac{\dot{c} \cdot dt}{R(t)} = \frac{c}{R_0} \int \exp\left(-\frac{c\sqrt{\Lambda'}}{\sqrt{3}} t\right) dt =$$

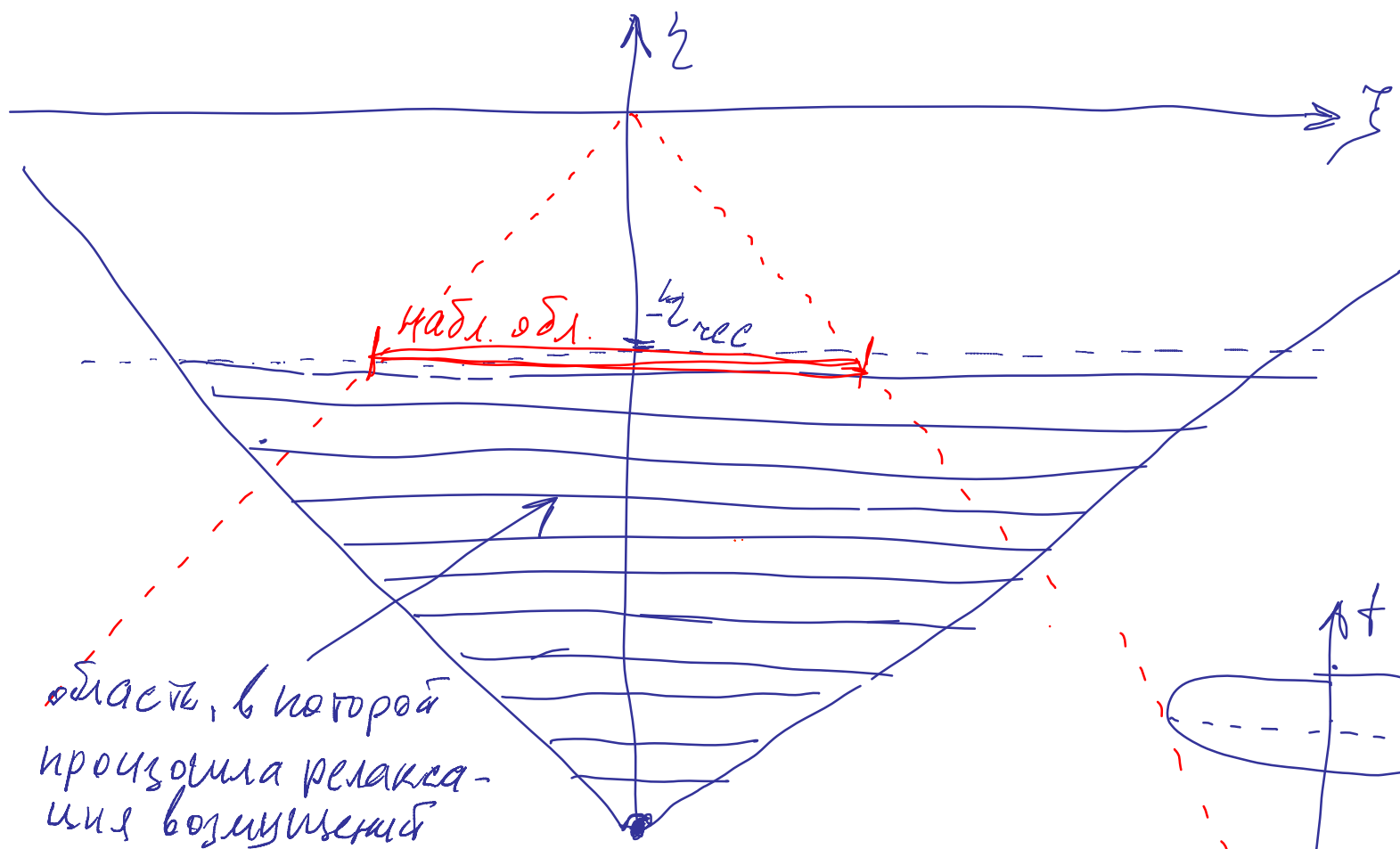
$$= -\frac{c}{R_0} \frac{\sqrt{3}}{c\sqrt{\Lambda'}} \left[\exp\left(-\frac{c\sqrt{\Lambda'}}{\sqrt{3}} t\right) - 1 \right]$$

$$\zeta(0) = 0$$

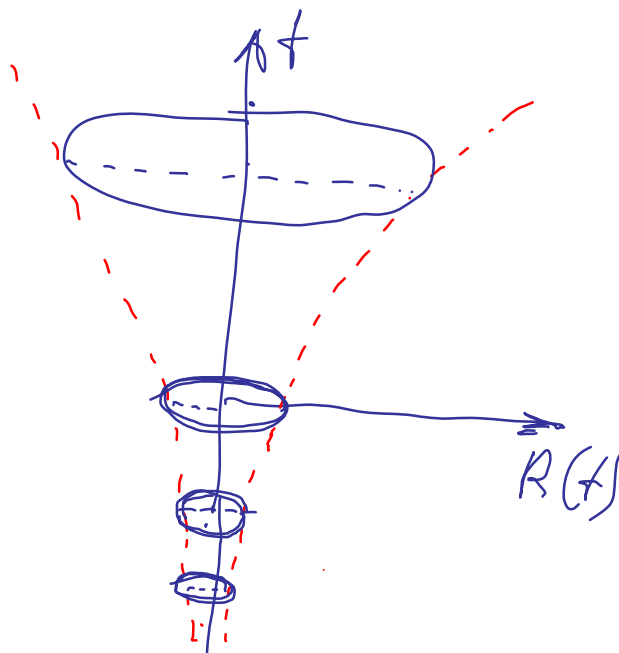
$$\zeta(-\infty) = -\infty$$

$$\zeta(+\infty) = \text{const} > 0$$





3) проблема однородности распр. в z также решается



9. Основные этапы эволюции Вселенной согласно современной космологической модели.

