Семинар №14-15

Уравнения Фридмана:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{c^2}{3}\Lambda \quad \text{или}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2}_{=H^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{c^2}{3}\Lambda - kc^2\frac{1}{R^2}$$

Нерел. в-во: $p=0$, $\varepsilon \propto \frac{1}{R^3}$

Ультрарел. в-во: $p=\varepsilon/3$, $\varepsilon \propto \frac{1}{R^4}$

$$k = \begin{cases} +1 & \text{– замкнутое пр-во с полож. кривизной} \\ 0 & \text{– бесконечное плоское пр-во} \\ -1 & \text{– бесконечное пр-во с отриц. кривизной} \end{cases}$$

Уравнение сост. вакуумной („тёмной") энергии:

$\Lambda = const$ (по определению)

→ в силу однородности

1-е начало термодин: $\Delta E = \cancel{\Delta Q} - p \cdot \Delta V$

$$d\left(\varepsilon_\Lambda \cdot \frac{4\pi}{3}R^3\right) = -p_\Lambda \cdot 4\pi R^2 \cdot dR$$

$$\varepsilon_\Lambda \cdot \cancel{4\pi R^2 \cdot dR} = -p_\Lambda \cdot \cancel{4\pi R^2 \cdot dR} \qquad \boxed{\varepsilon_\Lambda = -p_\Lambda}$$

Вакуумная энергия: $p=-\varepsilon$, $\varepsilon = const$

Ур-ние сост. в общем виде:

$$\boxed{p = w \cdot \varepsilon}, \text{ где } w = \begin{cases} 0 & \text{– нерел. в-во} \\ 1/3 & \text{– ультрарел. в-во (излуч.)} \\ -1 & \text{– вакуум.} \end{cases}$$

Семинар № 14-15

Решения ур-ния Фридмана в частных случаях:

Пусть $\Lambda = 0$ и $k = 0$

$w = 0$ (нерелят. в-во)

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\,\frac{\varepsilon_0 R_0^3}{R^3}, \quad \frac{\dot R}{R} = \underbrace{\sqrt{\frac{8\pi G \varepsilon_0 R_0^3}{3c^2}}}_{C_1} \cdot R^{-3/2}$$

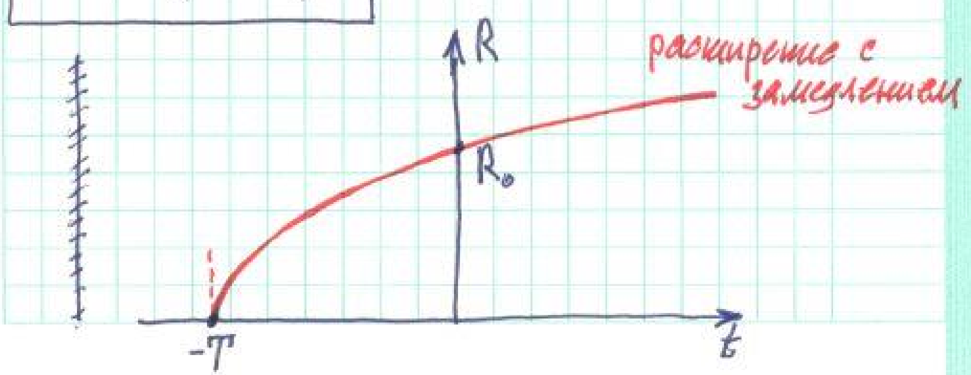
$$\dot R = \frac{dR}{dt} = C_1 \cdot R^{-1/2} \Rightarrow$$

$$\int R^{1/2}\, dR = \int C_1\, dt \Rightarrow \cancel{\frac{2}{3}} R^{3/2} = C_1' t + const$$

$R^{3/2} = C'(t+T)$, так что $R=0$ при $t=-T$, где T – возраст Вселенной

$R = \underbrace{\frac{R_0}{T^{2/3}}}(t+T)^{2/3}$, так что $R = R_0$ при $t=0$, т.е. в настоящее время

$$\boxed{R = R_0\left(\frac{t+T}{T}\right)^{2/3}}$$



Семинар № 14-15

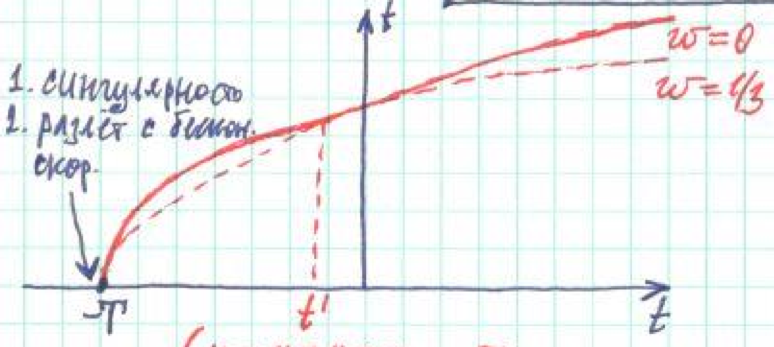
$w = \frac{1}{3}$ (ультрарел. в-во)

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\varepsilon_0 R_0^4}{R^4}, \quad \frac{\dot R}{R} = \underbrace{\sqrt{\frac{8\pi G \varepsilon_0 R_0^4}{3c^2}}}_{C_2} R^{-2}$$

$$\dot R = \frac{dR}{dt} = C_2 \cdot R^{-1} \Rightarrow \cancel{R \cdot \dot R} = \int R \cdot dR = \int C_2 \cdot dt \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} R^2 = C_2' \cdot t + \text{const} \Rightarrow R^2 = C_2'(t+T)$$

$$R = \frac{R_0}{T^{1/2}}(t+T)^{1/2}, \quad \boxed{R = R_0\left(\frac{t+T}{T}\right)^{1/2}}$$



(момент перехода от доминир. излуч. к доминир. в-ва)

Если $k \neq 0$, то

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\underbrace{\varepsilon}_{\propto \frac{1}{R^3} \text{ или } \frac{1}{R^4}} - kc^2\frac{1}{R^2}$$

→ становится доминирую- щим при увел. R

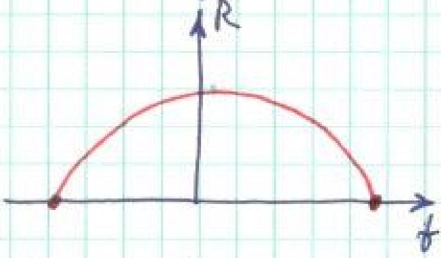
(проблема формирова- ния плоского пр-ва)

<u>Возможно</u> <u>ли</u> <u>достижение</u> <u>экстремума</u> <u>$R(t)$</u>, <u>т.е.</u> <u>переход</u> <u>от</u> <u>расширения</u> <u>к</u> <u>сжатию</u>?

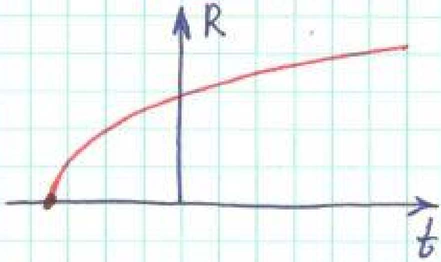
Семинар №14-15

Пусть $\dot{R}=0$, тогда:

1) если $k=1$, то экстремум возможен при некотором t.



2) если $k=0$ или -1, то экстремум невозможен



Критическая плотность энергии

Пусть вначале $k=0$, тогда

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0^2 \equiv H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_{cr} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{cr} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}}$$

Пусть теперь $k\neq 0$ (общий случай), тогда

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0 \equiv H_0^2 \equiv \boxed{\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_{cr} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0 - kc^2\frac{1}{R^2}} \quad \Lambda=0$$

Если $\varepsilon_0 > \varepsilon_{cr}$, то $k=1 \Rightarrow$ Вселенная замкнута

$\varepsilon_0 < \varepsilon_{cr}$, то $k=-1 \Rightarrow$ Вселенная бесконечна

Семинар №14-15

Недостатки „классической" (доинфляционной) космологической модели:

1) наличие сингулярности при $t=-T$ (?)

2) проблема формирования приблизительно плоского пр-ва (т.к. член с $k\neq 0$ становится доминирующим)

3) невозможность релаксации возмущений, возникающих после Большого Взрыва.

Анализ поведения возмущений в конформных координатах

ξ – сопутствующая $\overbrace{\text{координата}}^{\text{(простр.)}}$,

$$\eta = \int \frac{c\,dt}{R(t)}$$ – конформное время.

Пусть $w = 1/3$, $R = R_0\left(\frac{t+T}{T}\right)^{1/2}$ =>

$$\eta = \frac{\sqrt{T}c}{R_0}\int\frac{dt}{\sqrt{t+T}} = \frac{2(\sqrt{T})^2 c}{R_0}\frac{\sqrt{t+T}}{\sqrt{T}} - \underbrace{\eta_T}_{\text{пост. интегр.}} =$$

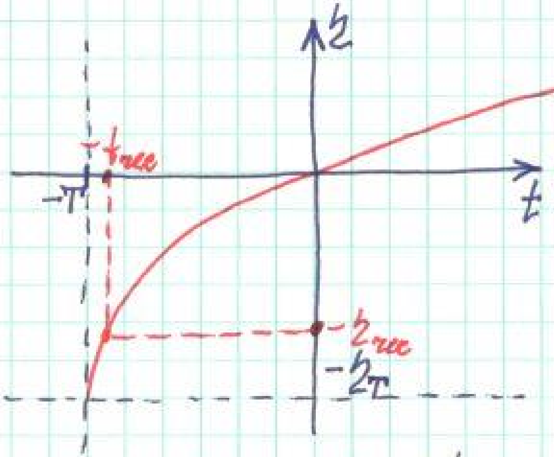
$$= \eta_T\cdot\left(\sqrt{\frac{t+T}{T}} - 1\right)$$

пост. интегр.: $\eta(-T) = -\eta_T$, $\eta(0) = 0$

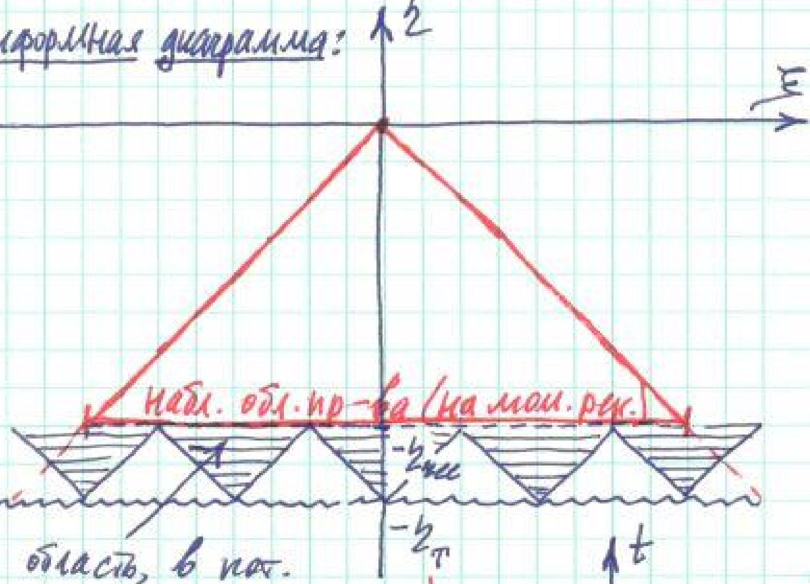
$$\boxed{\eta \propto \sqrt{t+T}}$$

$$\eta_T = \frac{2cT}{R_0}$$

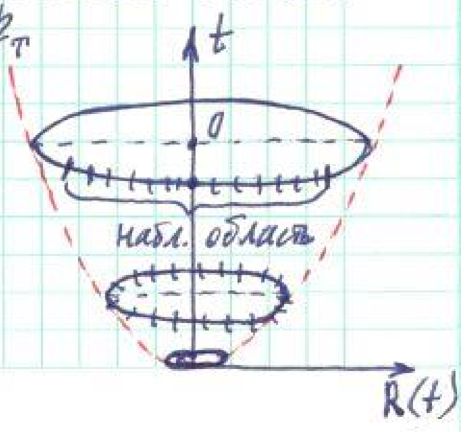
Семинар №14-15



Конформная диаграмма:



область, в кот. успев. произойти релаксация возмущ



$\boxed{\text{При } w=0 \text{ ситуация аналогична}}$

Семинар №14-15

Решение ур-ния Фридмана при $\Lambda \neq 0$ $(\varepsilon = 0)$

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{c^2}{3}\Lambda - kc^2\frac{1}{R^2}$$ → быстро убывает при возрастании R

Пусть вначале $k=0$, тогда

$$\dot R^2 = \frac{c^2}{3}\Lambda R^2 \Rightarrow \dot R = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} R \Rightarrow$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}}dt \Rightarrow \ln R = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}}t + \underbrace{const}_{\ln R_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{R(t) = R_0 \exp\left(\frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}}t\right)}, \quad R(0) = R_0$$

инфляция (стадия экспоненциального расшир.)

$$\boxed{H = \frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}}} = const \ (!)$$

1) нет сингулярности

2) если $k \neq 0$, то второй член быстро убывает, т.е. формируется плоское пространство.

3) релаксация возмущений:

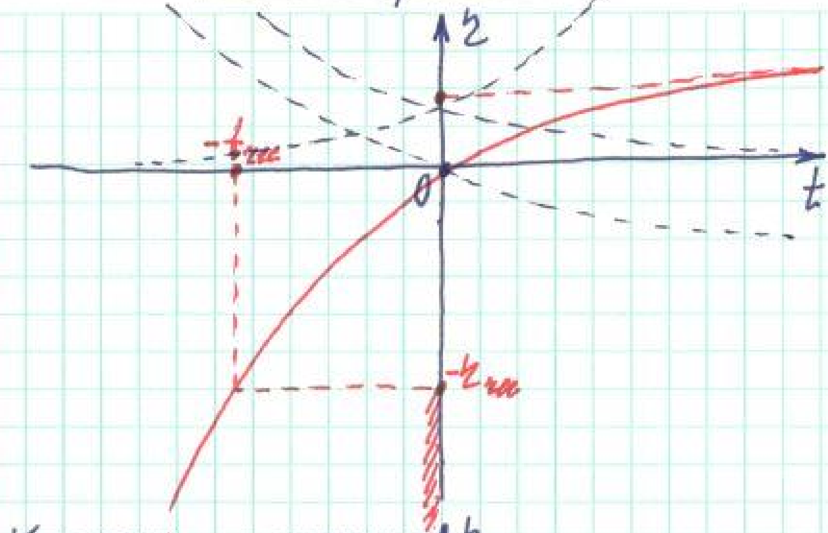
$$z = \int \frac{c\cdot dt}{R(t)} = \frac{c}{R_0}\int \exp\left(-\frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}}t\right)dt =$$

$$\boxed{= -\frac{c}{R_0}\frac{\sqrt{3}}{c\sqrt{\Lambda}}\left[\exp\left(-\frac{c\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}}t\right) - 1\right]}, \quad z(0) = 0$$

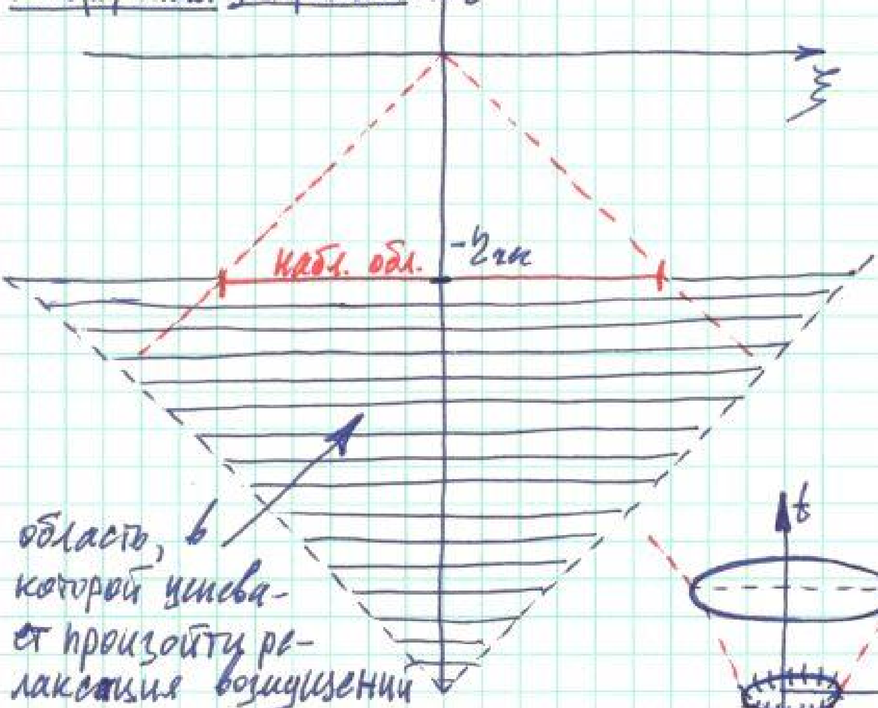
$z(-\infty) = -\infty$

$z(+\infty) = const > 0$

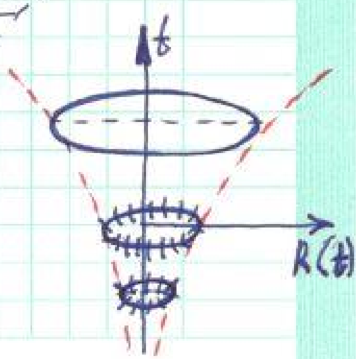
Семинар №14-15



Конформная диаграмма:



область, в которой успевает произойти релаксация возмущений



Семинар №14-15

Современная картина эволюции Вселенной: