

Семинар №3

①

① Закон всемирного тяготения. Второй закон Кеплера. Эллипс, парабола, гипербола. Эксцентриситет.

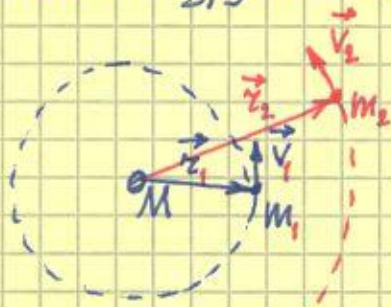
② Первый и третий законы Кеплера.



$$F = G \frac{mM}{r^2} = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

Если нет других сил, то $a = g$ - ускор. свобод. падения



(кругов. орбита)

$$ma = F \text{ (2-ой зак. Ньютона)}$$

$$m \frac{v^2}{r} = m \frac{GM}{r^2}$$

$$\left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

$$r_1^3 = (4\pi^2)^{-1} GM T_1^2$$

$$r_2^3 = (4\pi^2)^{-1} GM T_2^2$$

} \Rightarrow

$$\Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3$$

- 3-й закон Кеплера

(в частном случае круговых орбит)

Семинар №3

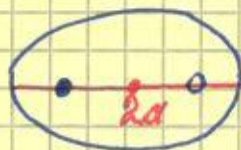
②

Общий случай (некруговые орбиты):

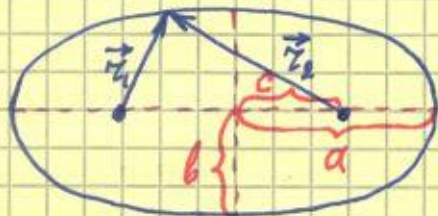
1) движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов



\Rightarrow



которого находится притягивающееся тело.
- 1-й зак. Кеплера



$$r_1 + r_2 = \text{const}$$

a - большая полуось

b - малая полуось

c - фокальное расст.

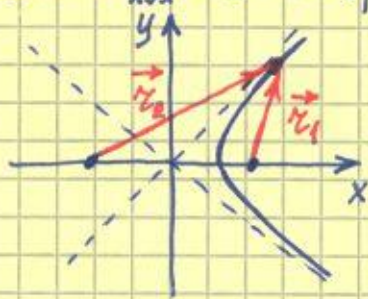
$e = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет $\Rightarrow e = 0$ - окружность

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 - 3\text{-й зак. Кеплера (общий случай)}$$

$e \rightarrow 1$ - сильно вытян. эллипс

Но только для замкн. орбит: $E_{\text{пол}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} < 0$

Если $E_{\text{пол}} \geq 0 \Rightarrow$ орбита незамкнута (движение неограничено)



$$r_2 - r_1 = \text{const} - \text{гипербола}$$

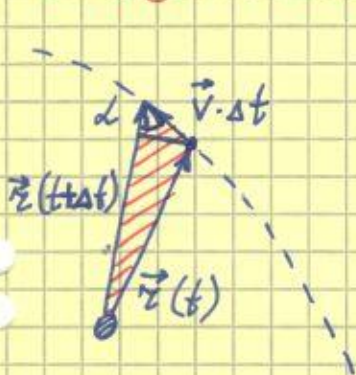
$e > 1$ - гипербола ($E_{\text{пол}} > 0$)

$e = 1$ - парабола ($E_{\text{пол}} = 0$)

Семинар №3

③

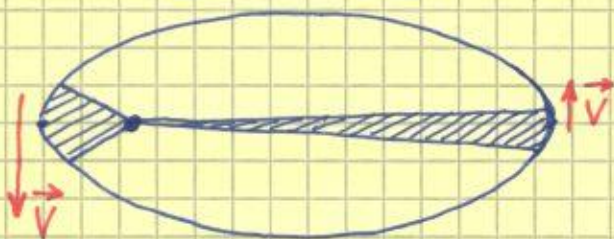
2-й закон Кеплера (закон сохр. момента и.м.)



$$\Delta S = \frac{1}{2} r \cdot v \cdot \Delta t \cdot \sin \alpha$$
$$\propto r \cdot \underbrace{(mv)}_p \cdot \sin \alpha \cdot \Delta t = \underbrace{L}_{= \text{const}} \cdot \Delta t$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = r \cdot p \cdot \sin \alpha$$
$$L = \text{const}, \text{ если } M = 0$$

Следствие:



③ Законы сохранения. Теорема вириала

Теорема вириала:



~~$$m \frac{v^2}{r} = m \frac{GM}{r^2}$$~~

$$\frac{1}{2} m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{2} G \frac{mM}{r^2}$$

$$E_{кин} = \frac{1}{2} |E_{пот.}|$$

$$E_{полн} = E_{кин} + E_{пот.} = \frac{1}{2} |E_{пот.}| - |E_{пот.}| =$$

$$E_{полн} = -\frac{1}{2} |E_{пот.}| \neq 0 = -E_{кин} < 0$$

Обобщения:

- 1) произвольные орбиты
- 2) произвольное количество частиц (!)

Ограничения:

- 1) движение - финитное (т.е. траектории не уходят на бесконечность)
- 2) потенциал взаимодействия $\sim \frac{1}{r^2}$ (Если потенциал взаимодействия $\sim \frac{1}{r^n}$, то возникают другие коэффициенты)

Семинар №3

5

4) Куда проще слетать: на Марс (полуось 1,5 а.е.) или на Венеру (полуось 0,7 а.е.)?



$$\Delta E_{3B} = E_B - E_3 = -\frac{1}{2} |E_{\text{pot}B}| + \frac{1}{2} |E_{\text{pot}3}| =$$

$$= \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_B} \right) = -0,43 \frac{GMm}{2 \text{ а.е.}}$$

$$\Delta E_{3M} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_M} \right) = 0,33 \frac{GMm}{2 \text{ а.е.}}$$

⑤ Первая, вторая и третья космические скорости.

1-ая КС:



$$m \frac{v_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$v_{1\text{зем}} = 7,9 \text{ км/с}$$

2-ая КС:



$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{GMm}{R}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} = \sqrt{2} v_1$$

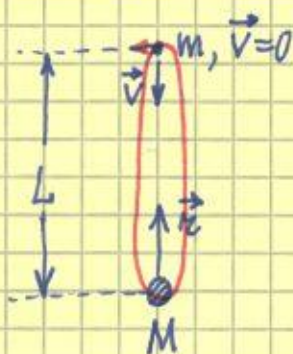
$$v_{2\text{зем}} = 11,2 \text{ км/с}$$

3-я КС: мин. скор. для покидания Солн. сист.



$$v_{3\text{зем}} = 16,7 \text{ км/с}$$

⑥ Время падения через 3-й закон Кеплера.



⇒



$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{GM}{z^2} \\ z(0) = L \\ \frac{dz}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta t = ?$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

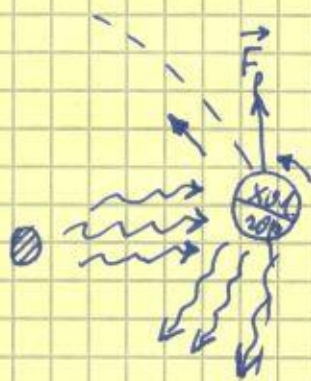
$$\frac{(2\pi R)^2}{T^2} = \frac{GM}{R}$$

$$\frac{4\pi^2 R^3}{T^2} = GM$$

$$\frac{4\pi^2 L^3}{8 \cdot 4(\Delta t)^2} = GM$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\pi^2 L^3}{8GM}}$$

- ⑦ Эффект Ярковского. Площадь сечения астероида 1 кв. км . Расстояние астероида от Солнца 1 а.е. (даст температуру порядка 300 К , облучить и вывести). Считая, что тепловое излучение идёт в одну сторону, найти время существенного изменения орбиты.



Эффект Ярковского:

хар. астероида: $T = 300 \text{ К}$
 $\Delta S = 1 \text{ км}^2 \Rightarrow r \approx 0,5 \text{ км}$

Теорема вириала:

$$E_{\text{полн}} = -\frac{1}{2} |E_{\text{пот.}}| = -E_{\text{кин}} < 0$$

$A > 0 \Rightarrow E_{\text{полн.}} - \text{увелич.} \Rightarrow$

$\Rightarrow |E_{\text{полн.}}| - \text{уменьш.} \Rightarrow$

$$|E_{\text{полн.}}| = \frac{1}{2} |E_{\text{пот.}}| = |E_{\text{кин.}}|$$

$\Rightarrow |E_{\text{пот.}}|$ и $E_{\text{кин.}} - \text{уменьш.}$

$\Rightarrow r - \text{увеличивается}$

($E_{\text{кин.}} - \text{уменьш.}!$)

Вращ в др. стор.: $A < 0 \Rightarrow r - \text{уменьшается}$

($E_{\text{кин.}} - \text{увеличивается}!$)

Семинар №3

9

$$\frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta S} = \sigma T^4 \text{ - закон Стефана - Больцмана}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \approx 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{10^7 \text{ эр}^2}{10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4} =$$

$$= 5,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эр}^2}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4}$$

Для фотона: $p = \frac{E}{c}$

Для нерелятив. част: $p = mv = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_k} \cdot \frac{2}{v} = \frac{2E_k}{v}$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t \cdot \Delta S} = \frac{F_p}{\Delta S} = \frac{\sigma T^4}{c} \Rightarrow \Delta p = \frac{\sigma T^4}{c} \cdot \Delta S \cdot \Delta t$$

Критерий существенного изм. орб.: $\Delta p \sim p_0$

$$p = m \cdot v_{\text{орб}} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \cdot v_{\text{орб}},$$

где $\rho = 3 \text{ г/см}^3$, $v_{\text{орб}} = 30 \text{ км/с}$ (скор. Земли отн. Солнца)

$$\frac{\sigma T^4}{c} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \approx \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \cdot v \Rightarrow \Delta t \approx \frac{4\pi}{3} \frac{\rho \cdot v \cdot r^3 \cdot c}{\sigma T^4 \cdot \Delta S}$$

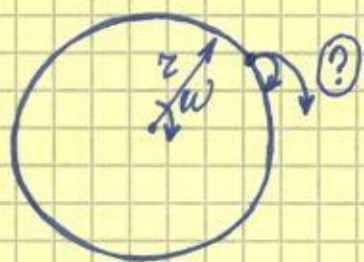
$$\Delta t \approx \frac{4\pi \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ см} \cdot (0,5)^3 \cdot 10^{15} \text{ см}^3 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4}{\text{см}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{с} \cdot 5,7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot \text{см}^2 \cdot 3^4 \cdot 10^8 \text{ К}^4 \cdot 10^{10} \text{ см}^2 \cdot 3} =$$

$$= 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{18} \text{ с} = 3 \cdot 10^{10} \text{ с} \approx 1 \text{ млрд. лет}$$

Семинар №3

(10)

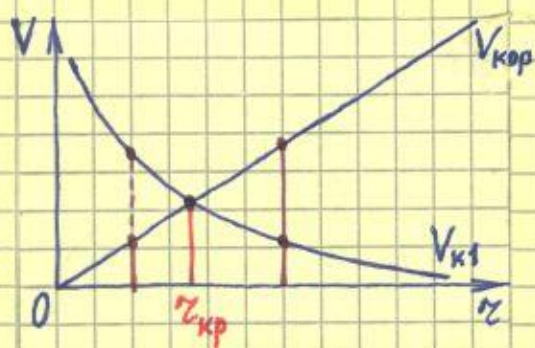
- 8) Разрыв вращением (посчитать предельный период для астероида, показать, что он зависит от плотности).



$$V_{\text{кор}} = \omega z = \frac{2\pi}{T} \cdot z$$

$$V_{\text{кл}} = \sqrt{G \cdot M} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$z_{\text{кр}}: V_{\text{кор}}(z_{\text{кр}}) = V_{\text{кл}}(z_{\text{кр}})$$



$$\frac{4\pi^2}{T^2} z_{\text{кр}}^2 = \frac{G \cdot M}{z_{\text{кр}}}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G}{z_{\text{кр}}} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho \cdot z_{\text{кр}}^3$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}}$$

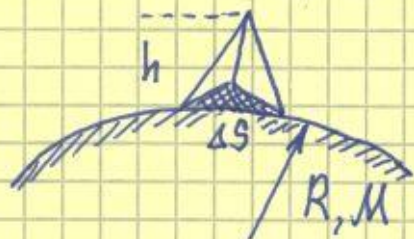
$$\rho = 3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{10^6 \text{ см}^3}{10^3 \cdot 2 \cdot \text{с}^2}$$
$$= 6,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{2 \cdot \text{с}^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{3 \cdot 6,7} \cdot 10^8 \frac{2 \cdot \text{с}^2}{\text{см}^3} \cdot \frac{\text{см}^3}{2}} \approx 10^4 \text{ с} = 2 \div 3 \text{ часа}$$

Семинар №3

11

9) Предельная высота гор на телах разной массы и радиуса (считая, что на Земле предел 10 км). Сделать вывод о сферической форме крупных тел.



$$\begin{aligned} R_{кр.} &= \frac{F}{\Delta S} = \frac{mg}{\Delta S} = \frac{1}{3} \frac{\Delta S \cdot h \cdot \rho \cdot g}{\Delta S} \\ &= \frac{1}{3} \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{3} \frac{GM}{R^2} \cdot \rho \cdot h = \\ &= \frac{1}{3} \frac{G}{R^2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \rho \cdot \rho \cdot h = \\ &= \frac{4\pi G}{g} \rho^2 \cdot Rh = \text{const.} \end{aligned}$$

R^* - радиус, при котором тело становится несферическим, т.е. $R^* \approx h^*$

$$R_3 \cdot h_3 = R^* \cdot h^* = R^{*2} \Rightarrow R^* \approx \sqrt{R_3 \cdot h_3}$$

$$R^* \approx \sqrt{6,4 \cdot 10^3 \text{ км} \cdot 10 \text{ км}} \approx (2 \div 3) \cdot 10^2 \text{ км} =$$

$$= 200 \div 300 \text{ км}$$

