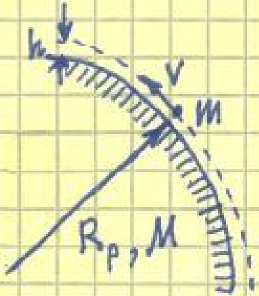
Семинар №4

1. Спутник малой массы вращается вокруг некоторой планеты на низкой орбите ($h_{orb} << R_p$) с периодом T. Какова средняя плотность планеты?



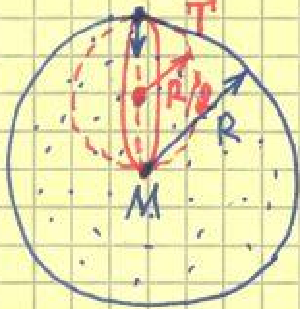
$$\frac{v^2}{R_p} = \frac{GM}{R_p^2}$$

$$\left(\frac{\cancel{2}\pi \cancel{R_p}}{T}\right)^2 \frac{1}{\cancel{R_p}} = \frac{G}{\cancel{R_p^2}} \frac{\cancel{4}\pi}{3} \cancel{R_p^3} \cdot \rho$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}$$

Семинар №4

2. Чему равно время свободного сжатия гигантского молекулярного облака массой миллион масс Солнца и размером 30 парсек? Ответ выразить в годах.



$$R = 30\,\text{пс}$$

$$M = 10^6 M_\odot$$

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

$$\left(\frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}T}\right)^2 \cdot \frac{\cancel{2}}{R} = \frac{GM\cdot \cancel{4}^{\,2}}{R^2}$$

$$\frac{\pi^2 R}{T^2} = \frac{2GM}{R^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{2GM}} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\pi^2 (R/R_\odot)^3}{8\cancel{2}G(M/M_\odot)}} \cdot \sqrt{\frac{R_\odot^3}{M_\odot}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{\pi^2}(R/R_\odot)^3}{8\cancel{G}(M/M_\odot)}} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{G}}{4\cancel{\pi^2}}} \cdot T_\odot$$

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{(R/R_\odot)^3}{32(M/M_\odot)}} \cdot T_\odot}$$

$$\left(\frac{2\pi R_\odot}{T_\odot}\right)^2 \frac{1}{\cancel{R_\odot}} = \frac{GM_\odot}{R_\odot^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{R_\odot^3}{M_\odot} = \frac{G T_\odot^2}{4\pi^2}$$

$$T_\odot = 1\,\text{год}$$

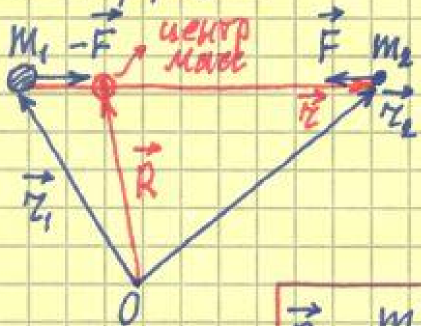
$$R_\odot = 1\,\text{а.е.}$$

$$\Delta t = \left[\frac{(3\cancel{0}\cdot 2\cdot 10^{\cancel{5}\,6})^3}{32\cdot 10^6}\right]^{1/2} \cdot T_\odot = \sqrt{\frac{6^3}{32}} \cdot 10^6\, T_\odot = 2{,}6\ \text{млн. лет}$$

Семинар №4

4. Оценить видимое смещение звезды под действием планеты. Считаем, что смотрим с полюса.
Вывести формулу зависимости угловой величины смещения от массы звезды, планеты, полуоси орбиты и расстояния до звезды. Через закон Кеплера переписать зависимость через период.

Общие формулы:



$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \end{cases}$$

$$\frac{m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\boxed{\vec{R} = const}$$

вектор центра масс

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2} \vec{F} \\ \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{1}{m_1} \vec{F} \end{cases} \qquad \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) \vec{F}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}}$$

приведенная масса

Если $\boxed{m_1 \gg m_2}$, то $\boxed{\mu \approx m_2}$ - масса лёгкого тела

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1} \Rightarrow \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(|\vec{r}|)} \Rightarrow$$ движение по эллипсу (либо гипероб. или параб.)

вектор относительного положения

Центр масс лежит на линии, соединяющей массы (т.к. $(\vec{R}-\vec{r}_1)\times(\vec{R}-\vec{r}_2)=0$) и сдвинут к более тяжёлому телу.

Обратное преобразование:

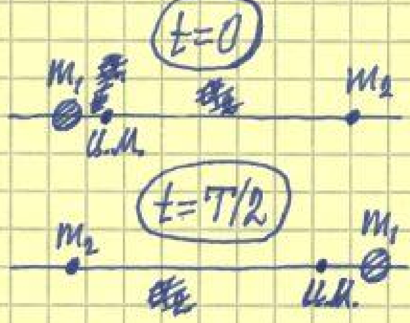
$$\begin{cases} \vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1, \quad m_1\vec{r}=m_1\vec{r}_2-m_1\vec{r}_1,\ m_2\vec{r}=m_2\vec{r}_2-m_2\vec{r}_1 \\ (m_1+m_2)\vec{R}=m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2 \end{cases}$$

$$(m_1+m_2)\vec{R}+m_1\vec{r}=(m_1+m_2)\vec{r}_2$$

$$\boxed{\vec{r}_2=\vec{R}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}} \approx \vec{R}+\vec{r}, \text{ если } m_1\gg m_2$$

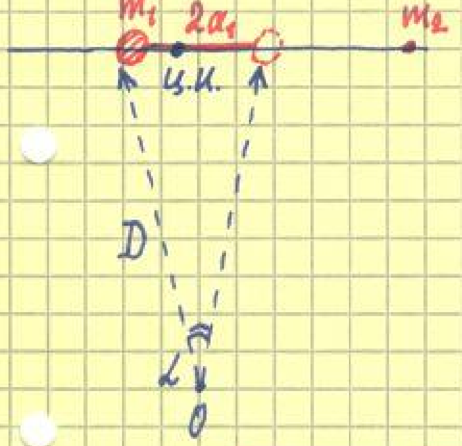
$$(m_1+m_2)\vec{R}-m_2\vec{r}=(m_1+m_2)\vec{r}_1$$

$$\boxed{\vec{r}_1=\vec{R}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}} \approx \vec{R}-\frac{m_2}{m_1}\vec{r}, \text{ если } m_1\gg m_2$$



$$\begin{cases} a_2 = m_1 a/(m_1+\cancel{m_2}) \approx a \quad \leftarrow \text{больш. полуоси} \\ a_1 = m_2 a/(m_1+\cancel{m_2}) \approx \frac{m_2}{m_1} a \end{cases}$$

a – больш. полуось для част. μ



$$\alpha = \frac{2a_1}{D} \quad (\text{в рад.})$$

$$\boxed{\alpha = 2\frac{m_2}{m_1}\frac{a}{D}}, \quad a \approx a_2$$

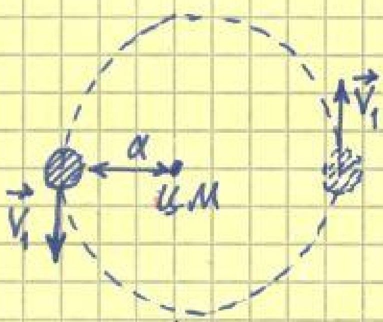
$$\boxed{a^3 = \frac{G\mu T^2}{4\pi^2}} \quad (\text{из семинара 3})$$

$$\mu = \frac{\cancel{m_1}\cdot m_2}{\cancel{m_1 + m_2}} \approx m_2$$

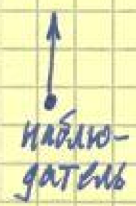
$$\boxed{\alpha = \frac{2}{D}\frac{m_2}{m_1}\sqrt[3]{\frac{Gm_2T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{2G}{\pi^2}}\cdot\frac{m_2^{4/3}}{m_1}\cdot\frac{T^{2/3}}{D}}$$

Семинар №4

5. Вывести формулу для вариации лучевой скорости звезды за счет влияния планеты. Сравнить со скоростью вращения звезды и со скоростью пульсаций (период взять из простой гидродинамики без вывода: $P=1/(G\rho)^{1/2}$).



(круг. орбита)



$$\Delta V_1 = 2V_1$$

$$\boxed{\vec{r}_1 = \cancel{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}}$$ (из зад. 4)

$$\dot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\dot{\vec{r}}, \quad \vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{V}$$

$$\Delta V_1 = 2\frac{m_2}{m_1}\cdot V$$

$$\cancel{\mu}\frac{V^2}{\cancel{a}} = \frac{G m_1 \cancel{m_2}}{a^{\cancel{2}}}, \quad V = \sqrt{\frac{G m_1}{a}}$$

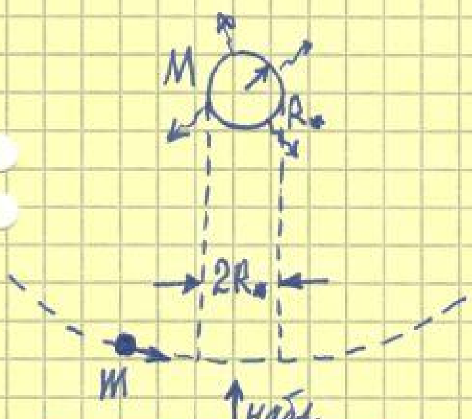
$$\boxed{\Delta V_1 = 2\frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{G m_1}{a}} = 2\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{a}}\frac{m_2}{\sqrt{m_1}}}$$

Семинар №4

6. Вывести длительность транзита планеты.
Показать, что, зная производную лучевой скорости звезды, из данных по транзиту можно вывести плотность планеты и ускорения свободного падения на поверхности планеты.
Рассматриваем ситуацию, где система наблюдается в плоскости орбиты.

см. Лекция С.Б. Попова №4, часть 1, 46÷48 мин

T – длительность транзита,
P – орбитальный период,
R_* – радиус звезды, R_p – радиус планеты
a – радиус орбиты планеты



$$\frac{T}{P} = \frac{\cancel{2}R_*}{\cancel{2}\pi a}, \quad \boxed{\frac{T}{P} = \frac{R_*}{\pi a}} \Rightarrow a$$

$$\boxed{\dot{V}_* \approx \frac{\Delta V_*}{P/2} = \frac{4\sqrt{G}\cdot m}{\sqrt{a}\cdot P\cdot\sqrt{M}}} \Rightarrow m$$

(из задачи 5)

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta S}{S_0} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2} \Rightarrow R_p$$

$$\boxed{\rho_p = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{m}{R_p^3}}, \quad \boxed{g_p = \frac{Gm}{R_p^2}}$$