

Астрофизика – 2020/2021

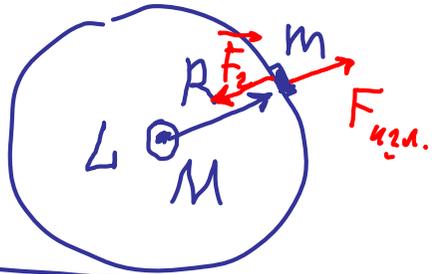
семинар №9 (11 ноября 2020г., 13:00)

группа №2

преподаватель – доц. Думин Юрий Викторович

1. Эддингтоновская светимость.
2. Характерные величины чёрных дыр: шварцшильдовский радиус, фотонная сфера, последняя устойчивая орбита (и её характерные значения), скорость кругового вращения на последней устойчивой орбите. Керровская чёрная дыра: эргосфера, внутренний горизонт.
3. Размер “тени” чёрной дыры с учетом линзирования (показать, что видимый размер гораздо больше шварцшильдовского).
4. Оценка максимальной частоты гравитационных волн при слияниях чёрных дыр в ньютоновском приближении (частота равна удвоенной орбитальной).
5. Планковская светимость (которая почти достигается при слияниях).
6. Вывод температуры испаряющейся чёрной дыры.

1. Эддингтоновская светимость.



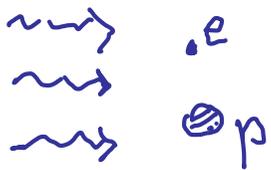
$$p = \frac{E}{c}$$

$$F_2 = F_{\text{изл}} \quad F_2 = \frac{GMm_p}{R^2}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{L}{4\pi R^2} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{L}{4\pi c R^2}$$

$$F_{\text{изл}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{L}{4\pi c R^2} \Delta S$$

„классический“ радиус эл-ма



$$\frac{e^2}{r_e} = m_e c^2 \Rightarrow r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$$

$$\Delta S = \pi r_e^2 = \frac{\pi e^4}{m_e^2 c^4}$$

$$F_{\text{изл}} = \frac{L e^4}{4 m_e^2 c^5 R^2} = \frac{GMm_p}{R^2}$$

$$L_{\text{э}} \propto \frac{4 GM_{\odot} m_p \cdot m_e^2 \cdot c^5}{e^4} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)$$

$$L_3 \approx \frac{4 G \cdot M_\odot \cdot m_p \cdot m_e^2 \cdot c^5}{e^4} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) =$$

$$= \frac{4 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot (10^{-24})^3 \cdot 3^5 \cdot 10^{50} \text{ cm}^3 \cdot c^4}{2 \cdot c^2 \cdot c^5 \cdot 5^4 \cdot 10^{-40} \cdot 2^2 \cdot \text{cm}^6} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$$

$$[q] = \frac{2^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}}{c}$$

$$\approx \boxed{10^{38} \frac{M}{M_\odot} \frac{\text{erg}}{c}}$$

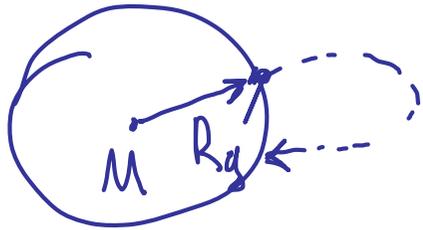
↓
M = M_⊙

$$F = \frac{q^2}{r^2}$$

$$2 \cdot \frac{\text{cm}^3}{c^2} = \frac{[q]^2}{\text{cm}^2}$$

$$L_\odot = 4 \cdot 10^{33} \frac{\text{erg}}{c}$$

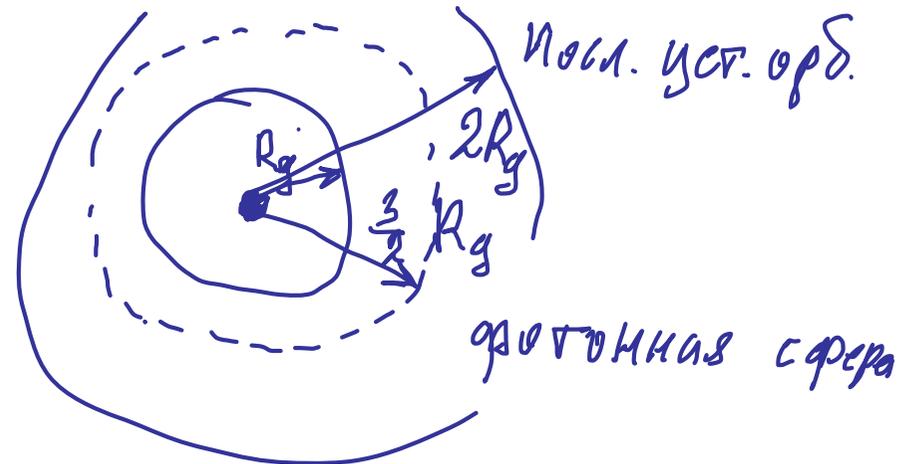
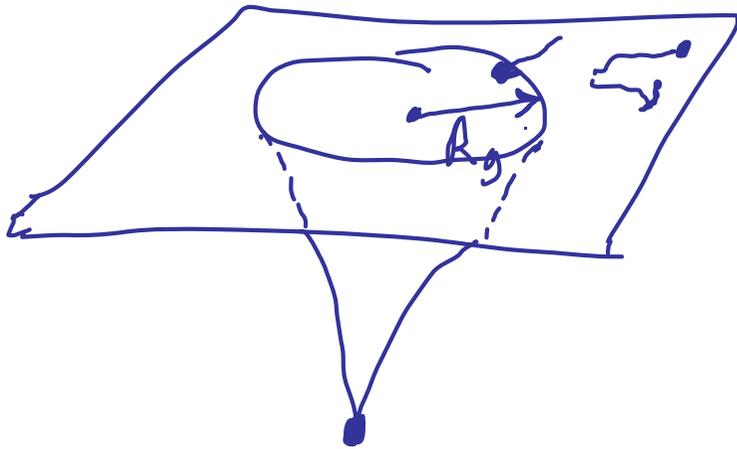
2. Характерные величины чёрных дыр: шварцшильдовский радиус, фотонная сфера, последняя устойчивая орбита (и её характерные значения), скорость кругового вращения на последней устойчивой орбите. Керровская чёрная дыра: эргосфера, внутренний горизонт.



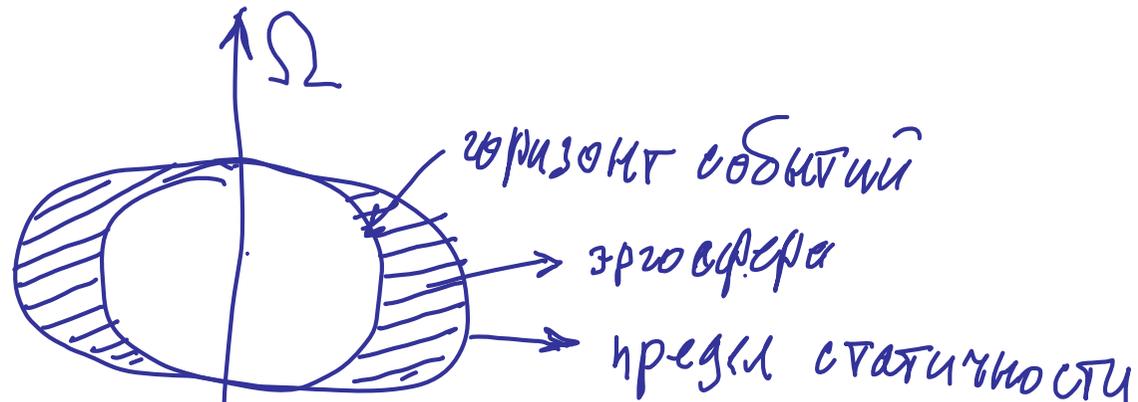
$$\frac{\cancel{m} v^2}{2} - \frac{G M \cdot \cancel{m}}{R} = 0 - \text{ум. ухода на } \infty$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} - \text{радиус ЧД}$$



Вращ. ЧД (реш. Керра)

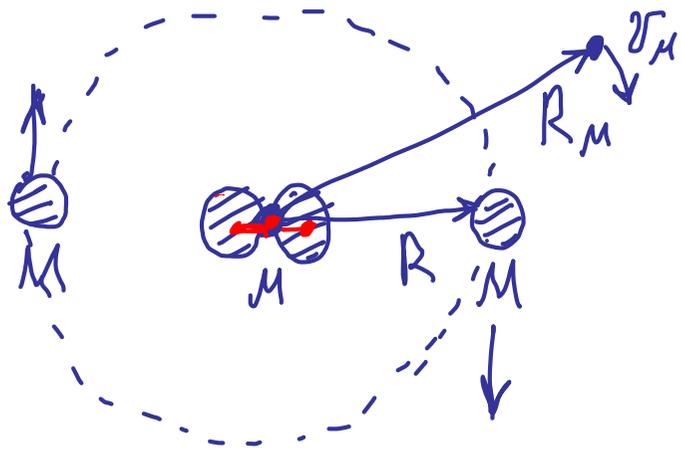


$$R_g = \frac{2GM_\odot}{c^2} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right) = 3 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \text{ км} - \text{ рад. ЧД}$$

для Солнца: $R_g = 3 \text{ км}$

для Земли: $R_g = 1 \text{ см}$

4. Оценка максимальной частоты гравитационных волн при слияниях чёрных дыр в ньютоновском приближении (частота равна удвоенной орбитальной).



$$M = \frac{M^2}{2M} = \frac{M}{2}$$

$$\frac{v_{\mu}^2}{R_{\mu}} = \frac{GM}{2R_{\mu}^2} = \frac{1}{R_{\mu}} \left(\frac{2\pi R_{\mu}}{T} \right)^2$$

$$T^2 = \frac{8\pi^2 R_{\mu}^3}{GM} = \frac{8^2 \pi^2 R^3 \cancel{2c^2}}{\cancel{GM} 2c^2}$$

$$R_{1,2} = \frac{M}{2M} R_{\mu} = \frac{1}{2} R_{\mu}$$

$$R_{\mu} = 2R$$

$$= \frac{2 \cdot 8^2 \pi^2 R^3}{c^2 R_g} = \frac{2 \cdot 8^2 \pi^2 R_g^2}{c^2}$$

$R = R_g$ — усл. слияния ЧД.

Если $M = 10 M_{\odot} \Rightarrow 30 \text{ км} \Rightarrow$

$$v_{2.6} \approx \frac{1}{8\pi} \frac{\cancel{300.000 \text{ км}}}{c \cdot \cancel{30 \text{ км}}} \approx 200 \text{ Гц.}$$

$$v_{2.6} \approx \frac{c}{8\pi \cdot R_g}$$