УДК 531.26

ВИХРЕПОДОБНЫЕ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В n-МЕРИИ

А.Д. Попова

Государственный астрономический институт
им П.К. Штернберга, МГУ,
Университетский пр-т 13, Москва 119899

Аннотация

Представлены решения некоторых эллиптических уравнений типа вихревых колец и потенциалов точечных источников в n-мерном пространстве, обладающие необычными асимптотиками: 3-мерной или 2-мерной для произвольного числа нечетных или четных измерений соответственно.

В конце XIX в. существовала вихревая теория строения вещества У. Томсона (Кельвина) [1], в начале XX в. была популярной теория строения квантов света, как замкнутых силовых фарадеевых трубок (в прежней трактовке, в отличие от современной, силовые линии и трубки считались реально существующими объектами), связанная с именами Дж. Дж. Томсона [1, 2] и Н. П. Кастерина [2, 3]. Целью этих теорий было объяснение непосредственного строения и взаимодействия материи, но впоследствии они были оставлены, по-видимому, по двум причинам. Во-первых, вследствие создания и успехов квантовой механики, самодостаточной теории, которая в них не нуждалась, во-вторых, из-за утраты понятия эфира (в связи с созданием теории относительности) — необходимого звена обеих теорий. Опыт развития теоретической физики в прошедшем XX в. позволяет глубже понять и оценить как квантовую теорию и теорию относительности, так и многочисленные дочерние теории, их возможности и границы применимости. XX в. привнес много новаторских идей, среди которых – идеи многомерия и компактификации размерностей, идеи струн и суперструн [4], однако удовлетворительной теории строения материи не существует.

На роль такой теории не подходит квантовая теория: волновая функция не описывает структуры элементарных частиц – в математическом описании они предполагаются материальными точками. На эту роль претендует теория суперструн, однако эти претензии еще достаточно спорны. Предлагаемое вниманию математическое исследование еще очень далеко от физической теории и, тем более, от подобных претензий, но, возможно, оно будет интересным для теоретической физики и найдет свои приложения.

Обобщение понятия вихревых колец на n-мерное пространство $(n > 2)$ привело к ряду интересных результатов и выводов. Во-первых, были получены решения для функций тока, которые названы вихреподобными, поскольку не соотнесены пока с вращением с помощью каких-либо физически значимых коэффициентов. (Они могут быть интерпретированы и как решения для магнитного потенциала кольца с током.) Решения состоят из конечного ряда членов, лидирующими из которых на больших расстояниях от кольцевого источника являются члены пропорциональные $1/R$ в случае нечетных $n \geq 3$ и пропорциональные $\ln 1/R$ в случае четных $n \geq 2$. Иными словами, нечетномерные решения имеют 3-мерную асимптотику, а четномерные решения — 2-мерную, хотя для полей скоростей, определяемых из функций тока, это не так.

Во-вторых, естественным образом возникло понятие класса операторов второго порядка эллиптического типа, отличных от оператора Лапласа, которые мы назвали анти-лапласианами. Один из представителей этого класса позволяет получить решения с точечным источником, которые обладают аналогичными свойствами и асимптотиками; такие решения названы решениями типа потенциала.

В третьих, было найдено общее преобразование, переводящее решение в $(n-2)$-мерном пространстве в решение в n-мерном, одинаковое для нечетных и четных n, причем оно точно так же действует на левые части уравнений. Это преобразование явилось неоценимым подспорьем в задаче выделения точечных источников по известным решениям однородных уравнений.

Сама по себе такая задача нетривиальна из-за неприменимости стандартной процедуры, которая работает в случае уравнения Лапласа (см. напр. [5]). Конечно, анти-лапласианы связаны с лапласианами, ниже эта связь показана явно. Оказалось, что для лапласианов и соответствующих решений тоже существует (другое) преобразование с теми же самыми свойствами.

Ниже последовательно излагаются намеченные проблемы, начиная с некоторых свойств лапласианов, уравнений Пуассона и их решений, на которые не обращалось внимание раньше. Более подробные выкладки можно найти в работе [6]. Некоторые важные вопросы, а именно геометрическая и физическая интерпретация полученных результатов будут рассмотрены в следующих публикациях.

1. Лапласова совокупность: уравнения, решения, преобразования.

Как известно, уравнение Пуассона (с лапласианом в левой части и точечным источником в правой части)

$$\Delta^{(n)}\Phi_n = -\sigma_n \delta(\mathbf{R}) \equiv s(\mathbf{R}) \tag{1}$$

имеет решения $\Phi_n = (n-2)^{-1}|\mathbf{R}|^{-n+2}$ для $n > 2$ и $\Phi_2 = -\ln|\mathbf{R}|$ для $n = 2$, где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор с началом в точечном источнике,

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \tag{2}$$

– площадь поверхности единичной $(n-1)$-сферы, Γ – гамма-функция.

Построим специальную систему координат. Возьмем [2+(n−2)]-разбиение пространства R^n: $R^n = R^2 \times R^{n-2}$. В каждом подпространстве, R^2 и R^{n-2}, выберем сферическую систему координат с радиальными координатами r и z соответственно. Зависимость всех величин только от r и z будем называть двойной сферической симметрией.

В указанной симметрии точечный источник в (1) имеет вид $(n > 2)$

$$s^{(n)}(\mathbf{R}) = -\sigma_n \delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{z}) = -\frac{1}{n-2}\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}} \equiv \frac{1}{n-2}\,s^{(n)}_{r,z}, \tag{3}$$

где использованы формальное соотношение $\delta(\mathbf{x}) = \delta_+(x)/\sigma_k x^{k-1}$ в k-мерии и легко проверяемое с помощью (2) равенство

$$\sigma_n = \frac{\sigma_2\, \sigma_{n-2}}{n-2}, \tag{4}$$

здесь $n \neq 2$. Заметим, что $\sigma_2 = 2\pi$ и $\sigma_1 = 2$.

С учетом (4) множитель $(n-2)$ можно исключить и из источника (3), и из соответствующего решения, так что уравнение (1) с источником $s^{(n)}_{r,z}$:

$$\Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_n(r,z) \equiv \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\Xi_n(r,z) = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}}$$

при $n > 2$ имеет решение

$$\Xi_n(r,z) = \frac{1}{R^{n-2}}\,, \tag{5}$$

где $R(r,z) = \sqrt{r^2+z^2}$ — модуль радиус-вектора.

Случай $n = 2$ является вырожденным из-за отсутствия координаты z, и уравнение Пуассона

$$\Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_2(r) = \Delta^{(2)}\Xi_2(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\Xi_2 = -\,\frac{\delta_+(r)}{r} \tag{6}$$

имеет тривиальное решение

$$\Xi_2(r) = \ln\frac{1}{r}\,. \tag{7}$$

Введем понятие лапласовой совокупности трех ниже перечисленных величин, L_n:

$$L_n = \{\Xi_n,\ \Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_n,\ s^{(n)}_{r,z}\}.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$f_L^{(n,n-2)} = -\,\frac{1}{n-4}\,\frac{1}{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{8}$$

Любая из величин L_n в пространстве $R^n = R^2 \times R^{n-2}$ может быть получена из подобной величины в пространстве с размерностью на две единицы меньше, $R^{n-2} = R^2 \times R^{n-4}$ $(n > 4)$, преобразованием

$$L_n = f_L^{(n,n-2)} L_{n-2}. \tag{9}$$

Очевидно, что нечетномерные величины получаются из нечетномерных, начиная с $n \geq 5$, а четномерные из четномерных начиная с $n \geq 6$ (в силу вырожденности величины L_2 из нее не может быть получена величина L_4). Заметим, что для вторых величин в L_n, а именно $\Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_n$, равенство (9) имеет место в силу дифференциальной перестановки

$$\frac{1}{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Delta^{(n-2)}_{r,z} = \Delta^{(n)}_{r,z}\,\frac{1}{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Третьи величины в L_n, $s^{(n)}_{r,z}$, известны, и для них (9) проверяется непосредственно с использованием равенства $z\delta'_{+}(z) = -\delta_{+}(z)$.[1]

2. Получение анти-лапласиана из лапласиана.

Оставляя в стороне рассмотренный выше случай разбиения пространства, проаназизируем более общий случай. Пусть при разбиении $R^n = R^k \times R^{n-k}$ задана сферическая система координат в пространстве R^k с радиальной координатой x и угловыми переменными θ_j, $j = 1, \ldots, k-1$, что задает метрику

$$dl^2 = dx^2 + x^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2(\ldots\times$$
$$(d\theta_{k-2}^2 + \sin^2\theta_{k-2}d\theta_{k-1}^2)\ldots))).$$

Тогда оператор Лапласа $\Delta^{(n)}$ можно представить в виде

$$\Delta^{(n)} = \Delta^{(k)}_x + \frac{1}{x^2}\,\Lambda^{(k)} + \Delta^{(n-k)} \equiv \frac{1}{x^{k-1}}\,\frac{\partial}{\partial x}\,x^{k-1}\,\frac{\partial}{\partial x}\, + \frac{1}{x^2}\,\Lambda^{(k)} + \Delta^{(n-k)},$$

где $\Delta^{(k)}_x$ – радиальная часть лапласиана $\Delta^{(k)}$, $\Lambda^{(k)}$ – оператор, зависящий только от угловых переменных:

$$\Lambda^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_{j-1}\sin^{k-j-1}\theta_j}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\,\sin^{k-j-1}\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\,,$$

(см. также выражение для него в [6]), $\Delta^{(n-k)}$ – не зависящая от x и θ_j часть, т. е. лапласиан, относящийся к пространству R^{n-k}.

[1]Отметим также, что оператор преобразования типа (8) существует и в других разбиениях R^n.

Для произвольной функции, зависящей только от x и переменных пространства R^{n-k}, $F(x,\ldots)$, имеет место перестановочное соотношение

$$\Delta^{(n)} \frac{e_i}{x^{k-1}} F(x,\ldots) = \frac{e_i}{x^{k-1}} \overline{\Delta}_x^{(n)} F(x,\ldots), \tag{10}$$

где $e_i = x_i/x$, x_i– любая из декартовых координат в R^k, выражаемая через x и θ_j ($i = 1,\ldots,k$, $e^i e_i = 1$). Оператор в правой части (10),

$$\overline{\Delta}_x^{(n)} \equiv x^{k-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^{k-1}} \frac{\partial}{\partial x} + \Delta^{(n-k)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k-1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \Delta^{(n-k)},$$

назовем анти-x-лапласианом.

Существуют также дифференциальные соотношения, связывающие лапласианы с анти-лапласианами:

$$\begin{aligned} x^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_x^{(n)} F(x,\ldots) &= \overline{\Delta}_x^{(n)} x^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} F(x,\ldots), \\ \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \overline{\Delta}_x^{(n)} F(x,\ldots) &= \Delta_x^{(n)} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} F(x,\ldots). \end{aligned} \tag{11}$$

Очевидно, что (11) являются тождествами после подстановки явного вида операторов.

3. Решения типа потенциалов точечных источников.

В двойной сферической симметрии решения однородного уравнения с анти-z-лапласианом

$$\overline{\Delta}_z^{(n)} \Psi_n \equiv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + z^{n-3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z^{n-3}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_n = 0, \tag{12}$$

сингулярные только в одной точке $r = 0$, $z = 0$, имеют различный вид для нечетных и четных n.

В нечетномерном случае решение (12) есть

$$\Psi_n(r,z) = {\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n} \frac{z^{k-3}}{R^{k-2}}, \tag{13}$$

где штрих у знака суммы означает суммирование только по нечетным k, а коэффициенты $a_{k,n}$ связаны рекуррентным соотношением $a_{k+2,n} = a_{k,n}(k-2)(n-k)[(k-1)(n-k-1)]^{-1}$. Для каждого n коэффициент $a_{3,n}$ может быть выбран произвольно. Сделаем специальный выбор $a_{3,n} = (n-3)!!/(n-4)!!$, тогда

$$a_{k,n} = \frac{(k-4)!!\,(n-k-1)!!}{(k-3)!!\,(n-k)!!}\,.$$

В четномерном случае решениями (12) являются функции

$$\Psi_4(r,z) = \ln\frac{1}{R}\,, \tag{14}$$

и при $n \geq 6$ (два штриха означают суммирование только по четным k)

$$\Psi_n(r,z) = \ln\frac{1}{R} + \sum_{k=6}^{n}{}'' \frac{1}{k-4}\,\frac{z^{k-4}}{R^{k-4}}\,. \tag{15}$$

Решения (14) и (15) обладают полезным свойством:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi_n = -\,\frac{z^{n-3}}{R^{n-2}}\,. \tag{16}$$

4. Вихреподобные решения.

При рассмотрении движения несжимаемой жидкости в двойной сферической симметрии следует положить $v_r = -(rz^{n-3})^{-1}\partial\psi_n/\partial z$, $v_z = (rz^{n-3})^{-1}\partial\psi_n/\partial r$ для радиальных компонент скорости $\mathbf{v}$ в R^2 и R^{n-2} соответственно, где ψ_n — функция тока (ср. с [7]). Условие обращения в нуль ротора[2] $\mathbf{v}$ почти везде (за исключением некоторых сингулярных точек решения) приводит к уравнению с оператором, названным анти-дубль-лапласианом:

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\psi_n \equiv \left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_n = 0.$$

В предположении, что решение является сингулярным в множестве точек $r = a$, $z = 0$, получим

$$\psi_n(r,z) = \frac{r}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\alpha\cos\alpha\,\Psi_n(\rho,z), \tag{17}$$

где в подынтегральное выражение входит функция (13), (14) или (15) с заменой $R(r,z)$ на $R(\rho,z)$, $\rho^2 = r^2+a^2-2ar\cos\alpha$. Выражение (17) записано единообразно для всех n и выбран некоторый общий коэффициент, однако

[2] См. обсуждение понятия ротора в R^n в работе[6].

это решение также имеет принципиально различный характер в нечетно- и четномерных случаях.

5. Преобразования в случае анти-лапласианов.

Подобно предыдущему введем две совокупности, из трех величин каждая, анти-z-лапласову и анти-дубль-лапласову,

$$Z_n = \{\Psi_n,\ \overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n,\ \bar{s}_z^{(n)}\},$$

$$D_n = \{\psi_n,\ \overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\psi_n,\ \overline{\overline{s}}^{(n)}\},$$

где $\bar{s}_z^{(n)}$ и $\overline{\overline{s}}^{(n)}$ — искомые точечные источники в уравнениях $\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n = \bar{s}_z^{(n)}$ и $\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\psi_n = \overline{\overline{s}}^{(n)}$ соответственно. Рассмотрим оператор ($n \geq 5$)

$$f_A^{(n,n-2)} = -\frac{z^{n-3}}{n-4}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z^{n-4}}\,. \tag{18}$$

Применение оператора (18) к любой из величин $A_{n-2} = \{Z_{n-2}, D_{n-2}\}$ дает преобразование с "повышающим эффектом", подобное (9):

$$A_n = f_A^{(n,n-2)} A_{n-2}; \tag{19}$$

для вторых величин из Z_n и D_n использованы дифференциальные перестановки

$$z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-4}}\,\overline{\Delta}_z^{(n-2)} = \overline{\Delta}_z^{(n)}\,z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-4}}\,,$$
$$z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-4}}\,\overline{\overline{\Delta}}^{(n-2)} = \overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\,z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-4}}\,.$$

6. Выделение точечных источников.

Трансформационные свойства $\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n$ (см. (19)), были получены без учета результата подстановки Ψ_n в данный оператор. Фактически результатом этой подстановки и является точечный источник, так что n-мерный источник должен быть связан с $(n-2)$-мерным тем же соотношением (19).

Для нечетных n имеет место факт совпадения L_3 с Z_3, поэтому наиболее формально искомый источник можно получить посредством применения нужного числа преобразований $f_A^{(n,n-2)}$ к известному источнику $s_{r,z}^{(3)}$ (см. (3) при $n=3$). Результат такого применения,

$$\bar{s}_z^{(n)} = -\frac{\delta_+(r)}{r}\,\delta_+(z),$$

не зависит явно от n благодаря специальному выбору коэффициента $a_{3,n}$. Можно пойти и менее формальным путем. В силу того, что операторы (10) и (18) имеют одинаковый (первый) дифференциальный порядок, после несложных выкладок Z_n выражается алгебраически через $L_3, L_5, \dots L_{n-2}, L_n$ и степени z:

$$Z_n = {\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n} z^{k-3} L_k. \tag{20}$$

(в этой связи ср. (13) с (5)). Выбирая вторые величины из обеих совокупностей, Z_n и L_k, с помощью (20) можно выразить поверхностные члены, появляющиеся как результат сверток $\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n$ с гладкими основными функциями, через поверхностные члены, возникающие при аналогичном свертывании $\Delta_{r,z}^{(k)}\Xi_k$, и применить стандартную предельную процедуру, что опять ведет к (20).

Аналогичный подход для кольцевых источников дает

$$\overline{\overline{s}}^{(n)} = -\delta(r-a)\,\delta_+(z).$$

Для четных n ситуация сложнее. Источник $\bar{s}_z^{(n)}$ мог бы быть получен с помощью преобразования (19) из известного $\bar{s}_z^{(4)}$. Чтобы построить $\bar{s}_z^{(4)}$, решим явно следующее уравнение для функции $\tilde{\Psi}_4(r,z)$:

$$\overline{\Delta}_z^{(4)}\tilde{\Psi}_4(r,z) = \frac{\delta_+(r)}{r}\,\Theta_+(z), \tag{21}$$

где $\Theta_+(z)$ есть ступенчатая функция Хевисайда:

$$\Theta_+(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

Свяжем $\tilde{\Psi}_4$ с решением общего уравнения Пуассона при $n=4$ через соотношение (10):

$$\Delta^{(4)}\left(\frac{e_i'}{z}\,\tilde{\Psi}_4(r,z)\right) = \frac{e_i'}{z}\,\overline{\Delta}_z^{(4)}\tilde{\Psi}_4(r,z) = e_i'\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\Theta_+(z)}{z}\,, \tag{22}$$

где $e_i' = z_i/z$, z_i — декартова координата в R^{n-2}. Несмотря на некомпактность источника в (22), его свертка с фундаментальным решением уравнения Пуассона существует, и интегрирование по R^4 приводит к искомому

решению:
$$\tilde{\Psi}_4(r,z) = \ln\frac{1}{R} - \ln\frac{1}{r}\,. \tag{23}$$
Второй член в правой части (23) есть решение (7) уравнения (6), а значит, и z-независимое решение (12) при $n = 4$, поэтому комбинация $\tilde{\Psi}_4 + \Xi_2$ совпадает с функцией (14), $\Psi_4 = \tilde{\Psi}_4 + \Xi_2$, и удовлетворяет уравнению
$$\overline{\Delta}_z^{(4)}\Psi_4 = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,[1-\Theta_+(z)] \equiv \bar{s}_z^{(4)}.$$
Применение оператора (18) к $\bar{s}_z^{(4)}$ с учетом $z\delta_+(z) = 0$ окончательно дает
$$\bar{s}_z^{(n)} = \bar{s}_z^{(4)} = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,[1-\Theta_+(z)].$$
Очевидно, что источник $\bar{s}_z^{(n)}$ конечен в сингулярной точке решения и его нельзя было бы получить с помощью основных функций. Интересно, что производная по z от $\bar{s}_z^{(n)}$ пропорциональна $\delta_+(z)$, это можно проверить независимо, комбинируя равенства (11), (16) и уравнение (5):
$$\frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n = -\Delta_{r,z}^{(n)}\left(\frac{1}{\bar{R}^{n-2}}\right) = \frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}}.$$

Для вихреподобных решений аналогично вычисляется $\overline{\overline{s}}^{(4)}$ и затем, в соответствии с преобразованием (19), $\overline{\overline{s}}^{(n)}$:
$$\overline{\overline{s}}^{(n)} = -\delta(r-a)\,[1-\Theta_+(z)].$$

Итак, основные результаты исследования изложены: определены операторы и преобразования, получены решения и выделены точечные источники. В следующих работах будет показано, что анти-лапласианы имеют непосредственную связь с оператором ∇^2, примененным к векторам и поливекторам в n-мерии. Что касается физической значимости полученных результатов, то они открывают простор далеко идущим спекуляциям. Заметим, что вся макро- и микрофизическая картина мира основана на законе обратных квадратов спадания электромагнитных и гравитационных сил, а также освещенностей и пр. (В n-мерии при $n > 2$ стандартный закон имел бы вид $1/R^{n-1}$ — как производная от скалярного потенциала Φ_n в п. 1.) Теперь, если представить, например, что полученные решения типа потенциала описывают микрообъекты (на уровне элементарных частиц), то возникает вопрос, что такое реальная физическая размерность, не является ли она динамической по сути? Не живем ли мы в каком-то большом нечетномерии, которое динамически проявляется как 3-мерие? — Своеобразная альтернатива упомянутой выше компактификации размерностей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Томсон Дж. Дж. Электричество и материя. (Прилож.: Томсон В. О вихревых атомах). М.;Л.: Госиздат, 1928. [2] Тимирязев А. К. Введение в теоретическую физику. М.;Л.: ГТТИ, 1933. [3] Кастерин Н. П. Philosophical Mag. II, 1926. [4] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн: в 2 т. М.: Мир, 1990. [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. [6] Popova A. D. Impossible solutions? E-print Archive: *math-ph*/0010022. [7] Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостеортехиздат, 1947.