ВИХРЕВЫЕ КОЛЬЦА И ПОТЕНЦИАЛЫ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ В n ИЗМЕРЕНИЯХ: ТРЕХМЕРНАЯ ИЛИ ДВУМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА

А. Д. Попова

Государственный астрономический институт
им П.К. Штернберга, МГУ,
Университетский пр-т 13, Москва 119899

Аннотация

Мы представляем функции тока для вихревых колец, а также функции, которые можно интерпретировать как потенциалы точечных источников, в n-мерных (nD)-пространствах, $n \geq 2$. Эти функции являются решениями эллиптических дифференциальных уравнений (второго порядка), операторы в которых не являются обычными операторами Лапласа, из-за их формы они названы анти-лапласианами. Неожиданно оказалось, что построенные nD-решения обладают 3D- или 2D-асимптотикой в пространствах с произвольным (большим) нечетным или четным измерений n соответственно. Подчеркнем, что мы имеем дело только с компактными источниками. (Что касается обычных скалярных nD-потенциалов, которые являются решениями уравнений Лапласа, то такое асимптотическое поведение могло бы обеспечиваться только бесконечно-протяженными источниками.) Мы выделяем точечные источники из решений однородных уравнений. Найдено преобразование, которое позволяет перейти от nD- к $(n+2)$D-решениям. Оно также справедливо для левых и правых частей соответствующих уравнений, и поэтому является мощным инструментом для выделения источников. Последние оказываются δ-подобными в случае нечетных n, но конечными в сингулярных точках решения в случае четных n. Найденные решения открывают простор некоторым нетривиальным физическим спекуляциям и интерпретациям. Настоящая работа может быть интересна физикам-теоретикам.

VORTEX RINGS AND POINT-SOURCE POTENTIALS IN n DIMENSIONS: 3-DIMENSIONAL OR 2-DIMENSIONAL ASYMPTOTICS

A. D. Popova

Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia,

We present vortex-ring current functions and also functions which can be interpreted as potentials of point sources in n-dimensional (nD) spaces, $n \geq 2$. These functions are the solutions to (second-order) elliptical equations with operators which are not obvious Laplacians, they are called anti-Laplacians due to their forms. Surprisingly, the constructed nD-solutions possesse 3D- or 2D-asymptotics in spaces with arbitrary (large) odd or even number of dimensions n, respectively. We stress that we deal with the only compact sources. (As to usual scalar nD potentials which are the solutions of Laplace equations, such the asymptotic behaviour could be provided by some infinitely-stretched sources.) We extract point sources from solutions of homogeneous equations. A transformation from any nD solutions to $(n+2)$D ones is found. It is also true for l.h.s. and r.h.s. of corresponding equations, that is why it is a powerfull tool for extracting sources. The latter turn out to be δ-like in the odd-n case, but finite in singular points of solutions in the even-n case. The solutions found can suggest some nontrivial physical interpretations and speculations. This work could be interesting to theoretical physicists.

1 Введение

Хорошо известно, что вся макро- и микрофизическая картина мира основана на законе обратных квадратов спадания электромагнитных напряженностей, гравитационных сил, а также освещенностей и пр. Это основополагающее утверждение несомненно справедливо и является отражением того математического факта, что в n-мерном (nD-)пространстве физические величины типа потенциалов, например, кулоновский электрический и гравитационный потенциалы, обладают законом спадания $\sim 1/R^{n-2}$ $(n > 2)$ с ростом расстояния R от компактного, т. е. имеющего ограниченную пространственную протяженность, источника. В 3D-пространстве это привычный закон $\sim 1/R$, приводящий к закону обратных квадратов ($\sim 1/R^2$) спадания производных от потенциалов — сил и пр. При $n = 2$ "закон потенциалов"имеет вид $\sim \ln(1/R)$, а "закон сил"$\sim 1/R$. С точки зрения дифференциальной геометрии смысл сказанного состоит в том, что рассматриваемые потенциалы являются скалярными величинами, и они удовлетворяют уравнениям, в левой части которых находится оператор Лапласа (лапласиан), Δ, являющийся результатом применения ∇^2 к скалярам, а правая часть уравнений соответствует компактному источнику.

Однако, если не ограничиваться скалярными потенциалами, то существуют физические величины типа потенциалов в nD-пространстве с произвольным числом нечетных или четных измерений ($n \geq 2$), связанные с компактными источниками, которые имеют закон спадания с расстоянием такой же, какой естественен для 3D- или 2D-пространства соответственно. Причем "3D- или 2D-поведение"обнаруживается также и в ближней к источнику зоне. Интересно то, что речь идет именно о компактных источниках, поскольку неограниченно протяженные (например, типа бесконечной струны) конечно порождают более медленный закон спадания, чем $1/R^{n-2}$.

Ситуация может быть объяснена следующим образом. Представим, что мы разбили nD-пространство на 2D- и $(n-2)$D-подпространства. Рассмотрим функцию — геометрический объект — с более сложными трансформационными свойствами, чем у скаляра. Не суть важно, является ли она скаляром или вектором, ортогональным радиальному направлению (вариант вихревого кольца), в 2D-подпространстве. Важно другое — пусть эта функция будет некоторым вектором (или некоторым поливектором) в $(n-2)$D-подпространстве. Ковариантный оператор ∇^2, примененный к такой функции, не обязан совпадать с привычным (скалярным) оператором Лапласа, а решение соответствующего уравнения с компактным источником не обязано быть $\sim 1/R^{n-2}$ асимптотически.

Заметим, что в 3D-пространстве описанная ситуация не различима. Действительно, в 1D-пространстве $(3-2)$ единственная координата, обозначим ее z, обеспечивает член $\partial^2/\partial z^2$ в операторе ∇^2, один и тот же для 1D-вектора и скаляра, что приводит к решению $\sim 1/R$ в любом случае.

Зачем нужны такие абстрактные построения? Здесь мы сделаем некоторое лирико-физическое отступление. Выясняется все бо́льшая неудовлетворительность теоретического описания физической реальности. Появляются новые физические и астрономические факты, признанные или еще не признанные большинством научного сообщества — не так важно, на которые с трудом натягиваются существующие теории. Один из примеров, за которым не надо далеко ходить, связан с мифом о "темной материи". Якобы в непредставимо больших вселенских масштабах находится гигантское количество особого темного вещества, возрастающее с ростом масштаба, которое не рассеивает и не поглощает свет и вообще никак себя не проявляет, кроме как динамически. На самом деле возрастает отношение вириальной массы к светимости — вращение галактик и разброс скоростей скоплений галактик не соответствует количеству наблюдаемого светящегося вещества, последнего катастрофически не хватает, чтобы обеспечить правильную динамику в 3D-пространстве [1]. Слишком уж косвенные свидетельства в пользу "темного вещества"заставляют задуматься относительно представлений о пространстве и его размерности, а заодно и о времени и его размерности. Мы уже говорили о том, что свойства пространства и времени могут зависеть от масштаба, а размерность может иметь переменное нецелое значение; о том, что пространство в больших масштабах проявляет себя как двумерное, если исходить из динамики [2], а время — как нуль-мерное, если исходить из факта космологического красного смещения [3]. По логике вещей, размерность пространства может ощутимо отличаться от трех и на каких-то малых характерных масштабах. Как не вспомнить здесь представлений о неньютоновском взаимодействии (пятой силе), т. е. о составляющей гравитационной силы в сравнительно небольших (лабораторных) масштабах, с законом спадания, отличном от $1/R^2$? Вообще, в настоящее время точности экспериментального определения ньютоновской гравитационной постоянной хватает, чтобы понять, что разные эксперименты дают ее значения, противоречащие друг другу; об этом, а также об аномальном гравитационном взаимодействии см. [4].

Это был, так сказать, внешний аспект проблемы, но кроме того существует еще и внутренний — конфликт кризисного характера в самой фундаментальной теоретической физике. Под словом "фундаментальная"мы подразумеваем науку, относящуюся к познанию Мироздания, науку о строении и свойствах материи, пространства и времени (такие ответвления теоретического мышления как термодинамика, акустика и пр. в данном контексте следует назвать прикладными). На данный момент (начало XXI в.) мы имеем две великие фундаментальные теории, созданные в конце XIX — начале XX вв., квантовую теорию (КТ) и теорию относительности (ТО). В прошедшем XX веке был накоплен огромный опыт становления и развития этих двух теорий, который позволяет проанализировать и непредвзято оценить как КТ и ТО, так и их многочисленные дочерние теории, их возможности и границы применимости. Так вот, мы утверждаем, что указанный конфликт вызван принципиальной невозможностью объединения КТ с ТО вследствие противоречащих друг другу исходных (неявных) определений статуса пространства и времени. Это означает, что такие химерные построения, как квантовая гравитация и квантовая космология, нельзя считать полноценными теориями [5].

Мало того, что КТ и ТО находятся в конфликте, их просто недостаточно. Даже удовлетворительной теории строения материи, не говоря пока о пространстве и времени, сейчас не существует. На роль такой теории не подходит КТ: волновая функция не описывает структуры элементарных частиц — в математическом описании они предполагаются материальными точками. Тем не менее, несмотря на неудачи теоретико-физического мышления, XX в. привнес много новаторских идей, среди которых — идеи многомерия и компактификации размерностей, идеи струн и суперструн. В настоящий момент на указанную выше роль претендует теория суперструн, а также на роль теории Всего Сущего, однако эти претензии еще очень спорны несмотря на то, что она оперирует с протяженными элементарными объектами. Дело в том, что постепенное возникновение струнных и суперструнных моделей происходило в терминах и в рамках парадигмы КТ, и по сути теория суперструн не вносит принципиально новых концепций, а остается просто запутанным клубком математических нагромождений, не обладающими внутренней последовательностью — нет доказательств некоторых используемых математических фактов, и результаты теории не сильно продвинуты за рамки метода возмущений [6]. Самое главное, в теории суперструн нет экспериментальных предсказаний, что не дает возможностей ее экспериментальной проверки.

В связи с вышеизложенными соображениями мы считаем небезынтересными любые попытки выхода из проторенной "струнной"колеи. Естественно также и стремление задать следующий вопрос: а что было оставлено, что выпало из портфеля теоретической физики? Какие представления о Мире существовали от века, хотя бы и на качественном — философском — уровне? Во-всяком случае, представления полученные в результате сверхсознательного опыта древних откровений достойны того, чтобы быть осознанными и высоко оцененными сейчас.

В изложении С. К. Чаттерджи [7], толкующего индусские учения западному уму, существует непреходящий принцип проявления и развертывания Вселенной — "вивартха"(слово, на санскрите означающее вихревое движение). Этот принцип вихревого движения универсален и действует на всех уровнях и масштабах, от Метагалактики до элементарных (субэлементарных?) частиц. В рамках ли этой традиции, или нет, но в конце XIX в. существовала вихревая теория строения вещества В. Томсона (Кельвина) [8], а в начале XX в. была популярной теория строения квантов света, как замкнутых силовых фарадеевых трубок, связанная с именами Дж. Дж. Томсона [8, 9] и Н. П. Кастерина [9, 10]. Интересно, что в трактовке последних авторов силовые трубки считались реально существующими объектами, а не абстрактными математическими понятиями как теперь. Целью этих теорий было описание непосредственного строения и взаимодействия элементарной материи, и необходимым звеном обеих теорий было представление об эфире, как сцене на которой происходят физические процессы. Но впоследствии обе они были оставлены, по-видимому, по двум причинам. Во-первых, – создание и первые успехи КТ, самодостаточной теории, которая в них не нуждалась, во-вторых, — утрата понятия эфира в связи с созданием ТО.

Настоящее исследование начиналось с поиска обобщения понятия вихревых колец на nD-пространство, и результаты оказались несколько неожиданными. Были получены обобщения уравнений Стокса и решения для nD-функций тока (ψ_n), которые названы вихреподобными, поскольку не соотнесены пока с вращением через какие-либо физически значимые коэффициенты. Более того, они могут быть интерпретированы и как решения для магнитного потенциала кольца с током в силу существующей аналогии между гидродинамикой и электромагнетизмом [11]. Однако, как известно, при построении функции тока закладывается условие обращения в нуль дивергенции поля скоростей среды. Поэтому, несмотря на упоминавшуюся 3D- или 2D-асимптотику ψ_n, асимптотика поля скоростей, истинной наблюдаемой величины, зависит от n.

Попутно мы выяснили некоторые свойства лапласианов, уравнений Пуассона и их решений, на которые не обращалось внимание раньше. В ходе исследования вихревых колец естественным образом возникло понятие класса дифференциальных операторов второго порядка эллиптического типа, отличных от оператора Лапласа, которые мы назвали анти-лапласианами. Один из подклассов этого класса (анти-дубль-лапласианы) пригоден для описания вихревых колец, другой подкласс (анти-z-лапласианы) позволяет получить решения с точечным источником, которые обладают аналогичными свойствами и тоже 3D- или 2D-асимптотиками — такие решения названы решениями типа потенциала. Поскольку никакое условие типа исчезновения дивергенции не является необходимым элементом построения последних, то физические величины, связанные с производными от потенциала наподобие сил, скоростей, интенсивностей и пр. могут быть, в принципе, определены так, чтобы тоже обладать 3D- или 2D-асимптотиками.

Именно эти решения открывают простор далеко идущим физическим спекуляциям. Продолжая обсуждение, сделанное вначале, можно сказать, что динамическим проявлением 3D-пространства является универсальный закон обратных квадратов. Далее, если представить, что полученные решения типа потенциала описывают микрообъекты (на уровне элементарных частиц), то можно задуматься, что такое реальная физическая размерность, не является ли она эффективной, динамической по сути? Не живем ли мы в каком-то большом абстрактном (математическом) нечетномерии, которое динамически проявляется как 3-мерие?

Поясним подробнее. Допустим, что размерность пространства есть n. Тогда, если бы мы могли делать микроизмерения в масштабе наших микрообъектов, мы могли бы точно измерить n по их динамическому взаимодействию. Но поскольку мы являемся макрообъектами и живем в мире макрообъектов, состоящих из мириад микрообъектов, динамическое действие первых сводится к асимптотическому "хвосту", и мы можем только вывести наилучшим образом подогнаную величину $n = 2$ или $n = 3$. Таким образом, мы способны вынести вердикт только о четности или нечетности изначального n. Более того, возможно на некоторых промежуточных масштабах к динамическому проявлению лучше всего подгоняется нецелое значение размерности $n > 3$. Данная концепция может также конкурировать и с идеей о компактификации размерностей, пришедшей из многомерных теорий тяготения: если размерность велика, а мы ее не воспринимаем, то значит она скрыта, компактифицирована, в малых масштабах.

Мы не имеем намерения построить здесь какую-либо специальную физическую модель или, тем более, всеобщую теорию Мироздания в свете вышеизложенных фантазий. Предлагаемое вниманию математическое исследование далеко от подобных претензий и еще недостаточно продвинуто. Вообще говоря, математические факты могут восприниматься как данность в отличие от непостоянства физических интерпретаций, которые подвержены тенденциям и моде. Тем более, что существуют интерпретации совершенно различные, но изначально равные в правах, например, упомянутая полная аналогия гидродинамика–электромагнетизм. Мы просто ратуем за пересмотр сложившихся представлений и стараемся убедить, что закон обратных квадратов еще не означает трехмерности пространства. Решаемая задача не интересна для математиков — она может показаться им лишь одной из многих, но для физики она имеет особый, так сказать, мирозданческий статус. Поэтому мы надеемся, что данное исследование интересно для фундаментальной теоретической физики и найдет свои приложения, интерпретации и интерпретаторов.

Данная работа организована следующим образом.

В §2 мы напоминаем читателю как построить функцию тока в 3D-пространстве, описывающую бесконечно тонкое вихревое кольцо. Традиционное описание этого сюжета в старых добрых учебниках, см. например [11, 12], с современной точки зрения страдает тем недостатком, что не используется такой привычный и удобный инструмент, как δ-функции. — Вихревые кольца были известны намного раньше, чем П. А. М. Дирак изобрел δ-функцию. — Мы модифицировали старый вывод, исправив этот недостаток. В §2 впервые встречается оператор, который относится к классу анти-лапласианов.

В §3 мы делаем nD-обобщения в ситуации с вихревыми кольцами, о которых уже говорилось. Мы рассматриваем однородные уравнения с операторами анти-дубль-лапласианами в левых частях (назовем их анти-дубль-лапласовыми уравнениями) и даем конструктивный способ построения их решений. Решения регулярны всюду кроме кольца, но принципиально различны в случаях нечетных и четных n. Они состоят из конечного ряда членов, лидирующими из которых на больших расстояниях от кольцевого источника являются члены $\propto 1/R$ в случае нечетных $n \geq 3$ или члены $\propto \ln 1/R$ в случае четных $n \geq 2$. Иными словами, нечетномерные решения имеют 3D-, а четномерные решения — 2D-асимптотику. Однако мы не знаем a priori явного вида точечных (кольцевых) источников в правых частях уравнений. С целью их выделения из известных решений, как это обычно делается в теории потенциала, мы разворачиваем исследование свойств анти-лапласианов в §5, но начинаем с исследования также доселе неизвестных свойств лапласианов в §4.

Итак, в §4 мы возвращаемся к привычным лапласианам и уравнениям Пуассона, т. е. уравнениям Лапласа с δ-источником, со стандартным решением $\propto R^{-(n-2)}$, и рассматриваем специальные симметрии: сферическую и двойную сферическую. Последняя симметрия наиболее интересна, т. к. связана с упоминавшимся разбиением nD-подпространства. В каждой из симметрий было найдено преобразование, переводящее решение в nD-пространстве (назовем его nD-решением) в $(n+2)$D-решение. Преобразование имеет одинаковый вид для нечетных и четных n, хотя нечетномерные решения переводятся в нечетномерные, а четномерные в четномерные. Причем оно точно так же действует на левые и правые части уравнений Пуассона. В §4 мы также показываем, что в двойной сферической симметрии традиционный способ выделения δ-источников по известным nD-решениям дает тот же самый результат, что и рекуррентное применение найденного преобразования к известным δ-источникам в 3D- или 4D-пространстве (случай 2D-пространства является вырожденным).

В §5 изложено исследование, которое не имеет отношения к вихревым кольцам. Анти-лапласианы, несомненно, связаны с лапласианами, и мы устанавливаем связующие соотношения между ними. Особенно нас будет интересовать один из анти-лапласианов, анти-z-лапласиан, который неожиданно приводит к nD-решениям типа потенциалов, которые регулярны везде, кроме одной точки; они являются "упрощенными версиями"решений §3 и обладают аналогичными свойствами. Замечательно, что подобно §4 мы нашли (другое) преобразование от nD-величин к $(n+2)$D-величинам, одинаковое для нечетных и четных n, и одинаково пригодное как для решений, так и для левых частей уравнений. Это преобразование является неоценимым подспорьем в задаче выделения точечных источников по известным решениям однородных уравнений. Сама по себе такая задача нетривиальна из-за неприменимости стандартной процедуры (см. например [13]), которая работает в случае уравнения Лапласа.

Задача выделения точечных источников из nD-решений типа потенциалов рассматривается в §6. Мы получаем два разных ответа в случаях нечетных и четных n. Первый случай очень простой: зная 3D-источник, мы легко вычислим любой нечетномерный источник с помощью "машины преобразований", он оказывается обычным, δ-подобным. Второй случай гораздо сложнее: во-первых, чтобы запустить машину преобразований, мы должны иметь в распоряжении 4D-источник: последний еще поддается непосредственному вычислению, которое мы детально излагаем. Во-вторых, результат состоит в том, что четномерные источники не являются δ-подобными, а конечны в сингулярной точке. На первый взгляд это противоречит известной теореме [14], но на самом деле истинного противоречия нет, это обсуждается в тексте.

В §7 мы возвращаемся к вихреподобным решениям §3 и представляем вид кольцевых источников, а также приводим некоторые другие решения.

$\star$

Ключевые моменты работы в §5, §6 и §7 выделены крупным курсивным шрифтом и могут восприниматься отдельно от основного текста.

В заключении (§8) даны некоторые заключительные пояснения и обсуждения, кроме того намечаются вопросы, которым мы посвятим следующую работу. Три Приложения с необходимой математической информацией завершают данное исследование. Предварительная версия этой работы была представлена в [15].

2 Напомним вихревое кольцо в 3D

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z), где и рассмотрим осесимметричное движение несжимаемой жидкости. Допустим, что ось симметрии совпадает с осью z, и все величины зависят только от z и r (см. [11, 16, 17] или другие известные учебники). Обозначим через $V_r(r, z)$ и $V_z(r, z)$, соответственно, r- и z-компоненты поля скоростей среды $\vec{V}(r, z)$. Уравнение непрерывности должно выполняться почти везде (за возможным исключением сингулярных точек источника):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rV_z) = 0. \tag{2.1}$$

При сделанном предположении только φ-компонента ротора $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\Omega}$ выживает, допустим, что она является некоторой заданной величиной $\Omega_\varphi(r, z)$,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})_\varphi = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \Omega_\varphi. \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует, что выражение

$$rV_z dr - rV_r dz = d\psi$$

является локальным полным дифференциалом, где функция $\psi(r, z)$ называется функцией Стокса, и данное определение ψ эквивалентно равенствам

$$V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\,, \qquad V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\,. \tag{2.3}$$

(Выбор знаков в (2.3) совпадает с [16] и противоположен [11, 17].) Таким образом, (2.2) может быть представлено как уравнение для ψ:

$$\overline{\Delta}_r \psi \equiv r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r\,\Omega_\varphi(r, z). \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) обычно называют уравнением Стокса, а оператор в его левой части (л. ч.) конечно не является оператором Лапласа (лапласианом). Имея в виду его обобщения в §5, назовем его анти-r-лапласианом.

На самом деле функция ψ имеет смысл φ-компоненты некоторого векторного поля, которое обозначим $\vec{A}$. Покажем это. Тождественное обращение в нуль дивергенции (2.1) означает, что $\vec{V}$ является ротором, т. е.

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

В предположении о цилиндрической симметрии вектора $\vec{V}$, т. е. его зависимости только от r и z и отсутствию его φ-компоненты, только компонента A_φ вектора $\vec{A}(r, z)$ должна быть отлична от нуля, тогда

$$V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\,, \qquad V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\,. \tag{2.5}$$

Сравнение (2.3) и (2.5) ведет к очевидному отождествлению $\psi = A_\varphi$. Этот факт имеет следствием $\psi = r|\vec{A}|$ — равенство, что обычно приводится в учебниках (ср. в цитированных с нашими знаковыми определениями). Этот факт также чрезвычайно важен для решения уравнения (2.4) относительно ψ, поскольку позволяет связать оператор $\overline{\Delta}_r$ с лапласианом. Ниже мы излагаем этот вопрос, следуя хорошо известному методу [12, 11].

В декартовой системе координат x, y, z, где $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, возьмем, например, y-компоненту вектора $\vec{A}$:

$$A_y = \frac{\cos\varphi}{r}\, A_\varphi$$

(с таким же успехом можно взять и компоненту A_x). Оператор ∇^2, примененный к какой-либо компоненте $\vec{A}$, в декартовой системе совпадает с лапласианом, примененным к той же компоненте, обозначим его $\Delta_{x,y,z}$:

$$\nabla^2 A_y = \Delta_{x,y,z} A_y \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_y =$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\cos\varphi}{r}\, A_\varphi \equiv \Delta_{r,\varphi,z}\frac{\cos\varphi}{r}\, A_\varphi .$$

Заменим обратно A_φ на ψ, чтобы вести изложение в терминах ψ, и убедимся непосредственно в справедливости "перестановки"

$$\Delta_{r,\varphi,z}\frac{\cos\varphi}{r}\, \psi = \frac{\cos\varphi}{r}\, \overline{\Delta}_r \psi. \tag{2.6}$$

Подчеркнем, что уравнение (2.6) есть ключевой момент для построения решения для ψ (или A_φ), генерируемого δ-подобным источником, используя фундаментальное решение уравнения Пуассона.

Рассмотрим бесконечно тонкое вихревое кольцо с радиусом a, но конечной интенсивностью κ: $\kappa = \int \Omega_\varphi dS$, где $dS = dr\, dz$ есть бесконечно малая площадь сечения кольца. Следуя данному определению, положим

$$\Omega_\varphi = \kappa a\, \frac{\delta(r-a)}{r}\, \delta(z),$$

что приводит к уравнению (2.4) в форме

$$\overline{\Delta}_r \psi = -\kappa a\, \delta(r-a)\delta(z). \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) получим уравнение типа Пуассона

$$\Delta_{r,\varphi,z}\, \frac{\cos\varphi}{r}\, \psi = -\kappa a\, \frac{\cos\varphi}{r}\, \delta(r-a)\delta(z). \tag{2.8}$$

Благодаря компактности источника в правой части (пр. ч.) уравнения (2.8), решение последнего может быть найдено стандартным способом [18]:

$$\frac{\cos\varphi}{r}\, \psi = \frac{\kappa a}{4\pi} \int\limits_0^\infty dr'\, r' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\cos\varphi'}{r'}\, \frac{\delta(r'-a)\, \delta(z')}{|\vec{R} - \vec{R}'|}\,, \tag{2.9}$$

где

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = [r^2 + r'^2 - 2r'r\cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2]^{1/2}$$

есть расстояние между точками с координатами (r, φ, z) и (r', φ', z'). Интегрирование (2.9) по r' и z' дает

$$\frac{\cos\varphi}{r}\,\psi = \frac{\kappa a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos\varphi'}{[r^2 + a^2 - 2ar\cos(\varphi - \varphi') + z^2]^{1/2}}\,. \tag{2.10}$$

Чтобы удалить множитель $\cos\varphi$ в л. ч. равенства (2.10), сместим начало отсчета φ': $\varphi' = \varphi + \alpha$, так что интегрирование следует проводить по переменной α. Подставим равенство

$$\cos\varphi' = \cos\varphi\,\cos\alpha - \sin\varphi\,\sin\alpha$$

в (2.10) и убедимся, что

$$\int\limits_0^{2\pi} d\alpha\,\frac{\sin\alpha}{[r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha + z^2]^{1/2}} = 0,$$

тогда множитель $\cos\varphi$ сократится в л. и пр. частях конечного выражения.

Таким образом, искомое решение для функции тока вихревого кольца в 3D записывается в виде

$$\psi = \frac{\kappa a}{2\pi}\,r\int\limits_0^{\pi} d\alpha\,\frac{\cos\alpha}{[r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha + z^2]^{1/2}}\,. \tag{2.11}$$

Здесь мы пока остановимся. Нашей задачей было только получить (2.11) для сравнения с дальнейшими обобщениями на nD. Хорошо известно, как выразить ψ в эллиптических функциях, известны также различные свойства и асимптотики ψ, см. цитированные учебники и многие другие. Заметим, что в силу упомянутой электромагнитной аналогии, вместо вихревого кольца можно говорить о круговом электрическом контуре, причем $A_\varphi (= \psi)$ в этом случае имеет смысл φ-компоненты электромагнитного вектор-потенциала. — С точки зрения данного математического описания нет разницы.

3 Решения типа вихревого кольца в nD

Вихревое кольцо как объемное nD-тело может, очевидно, быть представлено прямым произведением окружности радиуса a на бесконечно малый $(n-1)$D-шар. Для дальнейшего описания удобно ввести $[2+(n-2)]$-разбиение евклидова пространства R^n: $R^n = R^2 \times R^{n-2}$. В каждом из подпространств, R^2 и R^{n-2}, построим сферические системы координат с радиальными координатами r и z и угловыми координатами φ и $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-3}$ соответственно (см. Приложение A). Назовем условно общую систему координат (r,z)-системой.

С этого момента опустим все физически значимые коэффициенты (они легко восстановимы) и не будем отягощаться какой-либо физической интерпретацией. Рассмотрим векторное поле $\vec{v}(r,z)$, которое имеет только неисчезающие компоненты $v_r(r,z)$ и $v_z(r,z)$. Допустим, что дивергенция $\vec{v}$ равна нулю почти всюду,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r v_r) + \frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,(z^{n-3} v_z) = 0 \tag{3.1}$$

[см. (A.5), заметим, что в (r,z)-системе $v^z = v_z$, $v^r = v_r$]. Если мы положим подобно §2

$$v_r = -\,\frac{1}{r z^{n-3}}\,\frac{\partial \psi}{\partial z}\,, \qquad v_z = \frac{1}{r z^{n-3}}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\,, \tag{3.2}$$

то дивергенция (3.1) тождественно обращается в нуль.

Геометрическим объектом, обобщающим понятие ротора на nD-пространство, является не вектор, как в 3D-пространстве, а ковариантный 2-вектор или контравариантный $(n-2)$-вектор, см. например [19]. Однако принципиально это не препятствует предположению, что он имеет только одну неисчезающую (ковариантную) компоненту $\omega_{r,z}$, значение которой пока неизвестно:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = \omega_{r,z}. \tag{3.3}$$

После подстановки (3.2) в (3.3) введем определение оператора, который назовем анти-дубль-лапласианом и обозначим через $\overline{\overline{\Delta}}{}^{(n)}$:

$$\overline{\overline{\Delta}}{}^{(n)} \psi_n \equiv \left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) \psi_n = -r z^{n-3} \omega_{r,z}. \tag{3.4}$$

Теперь займемся поиском решений однородного (анти-дубль-лапласова) уравнения

$$\overline{\overline{\Delta}}{}^{(n)} \psi_n = 0 \tag{3.5}$$

для всех $n \geq 3$, имея в виду, что $\omega_{r,z}$ предполагается равной нулю везде кроме точек $r = a$, $z = 0$, как это следует для вихревого кольца. Ниже приведены построения решений, которые различаются для нечетных и четных n.

3.1 Решения в нечетных nD

Рассмотрим пробную функцию $(k \geq 3)$

$$\overline{\psi}_k = r \int_0^\pi d\alpha\, \cos\alpha\, \frac{z^{k-3}}{R^{k-2}}, \tag{3.6}$$

где мы обозначили

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \tag{3.7a}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha. \tag{3.7b}$$

(геометрический смысл R как расстояния очевиден из сравнения с §2).

Применяя к (3.6) оператор $\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}$, получим

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\overline{\psi}_k = r\int_0^\pi d\alpha\,\cos\alpha\left[-(k-3)(n+1-k)\frac{z^{k-5}}{R^{k-2}} + (n-k)(k-2)\,\frac{z^{k-3}}{R^k}\right], \tag{3.8}$$

где было использовано интегральное тождество

$$\int_0^\pi d\alpha\,\cos\alpha\left[\frac{1}{R^{k-2}} - (k-2)\,\frac{ar\cos\alpha}{R^k} + k(k-2)\,\frac{a^2r^2\sin^2\alpha}{R^{k+2}}\right] =$$

$$\int_0^\pi d\alpha\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\sin\alpha}{R^{k-2}} - (k-2)\,\frac{ar\sin\alpha\cos\alpha}{R^k}\right] = 0. \tag{3.9}$$

В целях наглядности распишем явно формулы (3.8) для нечетных k от 3 до n:

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\overline{\psi}_3 = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\,(n-3)\,\frac{1}{R^3}, \tag{3.10a}$$

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\overline{\psi}_5 = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left[-2(n-4)\,\frac{1}{R^3} + 3(n-5)\frac{z^2}{R^5}\right], \tag{3.10b}$$

$$\cdots$$

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\overline{\psi}_{n-2} = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left[-3(n-5)\,\frac{z^{n-7}}{R^{n-4}} + 2(n-4)\,\frac{z^{n-5}}{R^{n-2}}\right], \tag{3.10c}$$

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\overline{\psi}_n = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left[-(n-3)\,\frac{z^{n-5}}{R^{n-2}}\right]. \tag{3.10d}$$

Если искать решение для каждого n как линейную комбинацию функций (3.6), то, значит, эта же линейная комбинация равенств (3.10) должна обращаться в нуль. Мы видим, что члены с множителями $(k-3)$ и $(n-k)$ в пр. ч. (3.8) исчезают для $k=3$ и $k=n$ соответственно. Эти члены не могли бы быть скомпенсированы, т. е. обращены в нуль, какими-либо другими. Все оставшиеся члены могут быть скомпенсированы некоторым подбором коэффициентов при каждом из $\overline{\psi}_k$. Единственный член ($\propto 1/R^3$) в (3.10a) может быть скомпенсирован первым членом в (3.10b), и т. д., последний член ($\propto z^{n-5}/R^{n-2}$) в (3.10c) может быть скомпенсирован единственным членом в (3.10d). Таким образом, искомое решение представляется в виде конечного ряда (линейной комбинации) из $\overline{\psi}_k$:

$$\psi_n = {\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n}\overline{\psi}_k = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\,{\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n}\,\frac{z^{k-3}}{R^{k-2}}\,, \tag{3.11}$$

где штрих над знаком суммы означает, что последняя берется только по нечетным k. Что касается коэффициентов $a_{k,n}$, то для них должно выполняться рекуррентное соотношение

$$a_{k+2,n} = a_{k,n}\,\frac{(k-2)(n-k)}{(k-1)(n-k-1)}\,. \tag{3.12}$$

Коэффициент $a_{3,n}$ может быть выбран произвольно, пока рассматривается однородное уравнение (3.5). Выбор $a_{3,n} = 1$ для всех n приводит к следующему выражению для $a_{k,n}$:

$$a_{k,n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-4)(n-3)(n-5)\cdots(n-k+2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(k-3)(n-4)(n-6)\cdots(n-k+1)}\,. \tag{3.13}$$

Дальнейшие сведения о коэффициентах $a_{k,n}$ приведены в Приложении B.

Для иллюстрации, в дополнение к уже полученному 3D-решению (2.11), выпишем явно три последующих решения (3.11) при $n = 5, 7, 9$:

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\,\frac{1}{R}\,,\\
\psi_5 &= r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R}+\frac{z^2}{R^3}\right),\\
\psi_7 &= r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R}+\frac{2}{3}\,\frac{z^2}{R^3}+\frac{z^4}{R^5}\right),\\
\psi_9 &= r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R}+\frac{3}{5}\,\frac{z^2}{R^3}+\frac{3}{5}\,\frac{z^4}{R^5}+\frac{z^6}{R^7}\right).
\end{aligned}$$

Как уже говорилось в §1, асимптотика полученных решений в далекой от источника зоне очень интересна с физической точки зрения. Когда $r\to\infty$ для любого конечного значения z, подынтегральное выражение в $\overline{\psi}_k$ спадает как $\sim r^{2-k/2}$, так что для каждого нечетномерного решения независимо от n член с $k=3$, $1/R$, асимптотически лидирует. Когда $z\to\infty$ для любого конечного значения r, все подынтегральные выражения в $\overline{\psi}_k$ имеют одинаковую асимптотику $\sim z^{-1}$. Таким образом, далеко от компактного источника все нечетномерные решения ψ_n ведут себя подобно 3D-решениям.

Интересной общей чертой всех нечетномерных решений является также то, что в плоскости $z=0$ (2D-пространстве) они обнаруживают точное 3D-поведение, $\propto 1/\rho$. Этот факт определяет ближнюю асимптотику при $z\to 0$ для каждого конечного ρ, поскольку подынтегральные выражения $\sim 1/\rho$. В то же время, для каждого конечного значения z подынегральное выражение в ψ_n всегда $\sim z^{-1}$ при $\rho\to 0$. — Ближняя асимптотика тоже 3D-подобна.

3.2 Решения в четных nD

Из рассмотрений предыдущего пункта ясно, что никакая функция вида (3.6) не подходит для четномерного случая — нужны другие. Для каждого четного $l>4$ рассмотрим функкцию

$$\overline{\psi}_l = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\,\frac{z^{l-4}}{R^{l-4}}\,, \tag{3.14}$$

а для случая $l = 4$ рассмотрим

$$\overline{\psi}_4 = r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha \, \ln\frac{1}{R} \, . \tag{3.15}$$

Для $l > 4$ вычисление дает

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)} \overline{\psi}_l = r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha \, (l-4) \left[-(n+2-l) \, \frac{z^{l-6}}{R^{l-4}} + (n-l) \, \frac{z^{l-4}}{R^{l-2}} \right] \tag{3.16}$$

после использования интегрального тождества (3.9) с заменой k на l, тогда как для $l = 4$

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)} \overline{\psi}_4 = r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha \left[+(n-4) \, \frac{1}{R^2} \right] \tag{3.17}$$

после использования интегрального тождества

$$\int\limits_0^\pi d\alpha \, \cos\alpha \left(\ln\frac{1}{R} - \frac{ar\cos\alpha}{R^2} + 2\,\frac{a^2 r^2 \sin^2\alpha}{R^4} \right) =$$

$$\int\limits_0^\pi d\alpha \, \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\sin\alpha \ln\frac{1}{R} - \frac{ar\sin\alpha\cos\alpha}{R^2} \right) = 0. \tag{3.18}$$

Прежде всего заметим, что $\psi_4 = \overline{\psi}_4$ является решением уравнения (3.5) при $n = 4$, что ясно из (3.17): $\overline{\overline{\Delta}}^{(4)} \psi_4 = 0$.

Как и раньше, распишем явно равенства (3.16) при $4 < l \geq n$:

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)} \overline{\psi}_6 = r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha \, 2 \left[-(n-4) \, \frac{1}{R^2} + (n-6) \, \frac{z^2}{R^4} \right], \tag{3.19a}$$

$$\cdots$$

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)} \overline{\psi}_{n-2} = r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha \, (n-6) \left[-4 \, \frac{z^{n-8}}{R^{n-6}} + 2 \, \frac{z^{n-6}}{R^{n-4}} \right], \tag{3.19b}$$

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)} \overline{\psi}_n = r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha \, (n-4) \, \left[-2 \, \frac{z^{n-6}}{R^{n-4}} \right]. \tag{3.19c}$$

Явный вид (3.17) и (3.19) также наводит на мысль, что некоторая линейная комбинация $\overline{\psi}_l$ может стать решением (3.5). Сначала заметим, что член с множителем $(n-l)$ в пр. ч. (3.16) исчезает при $l = n$, когда он не мог бы быть скомпенсирован каким-либо еще. Член $\sim 1/R^2$ в (3.17) может быть скомпенсирован первым членом в (3.19a), и т. д., а последний член в (3.19b) скомпенсируется единственным членом (3.19c). Таким образом, решение следует записать в виде

$$\psi_n = a_{4,n} \overline{\psi}_4 + \sum_{l=6}^{n}{}'' \, a_{l,n} \overline{\psi}_l, \tag{3.20}$$

где двойной штрих над суммой означает, что она берется только по четным l, а для коэффициентов $a_{l,n}$ $(l \geq 6)$ получается простое рекуррентное соотношение

$$a_{l+2,n} = a_{l,n} \, \frac{l-4}{l-2} \, . \tag{3.21}$$

Коэффициент $a_{4,n}$ может быть выбран произвольно. Выберем $a_{4,n} = 1$, тогда $a_{6,n} = 1/2$ из (3.17) и (3.19a), и соотношение (3.21) легко разрешается; при $l \geq 6$

$$a_{l,n} = \frac{1}{l-4}\,. \tag{3.22}$$

Как результат равенств (3.20) и (3.22), функция

$$\psi_n = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\ln\frac{1}{R} + \sum_{l=6}^{n}{}'' \frac{1}{l-4}\,\frac{z^{l-4}}{R^{l-4}}\right) \tag{3.23}$$

при $n > 4$ является искомым решением.

Здесь уместно рассмотреть также наиболее вырожденный случай $n = 2$, где "z-часть"оператора вообще отсутствует:

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(2)}\psi_2 = \overline{\Delta}_r^{(2)}\psi_2 = r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\psi_2 = 0. \tag{3.24}$$

Как и следует ожидать, функция

$$\psi_2 = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\,\,\ln\frac{1}{\rho} \tag{3.25}$$

является решением (3.24), где величина ρ определена в (3.7b); при выводе используется интегральное тождество подобное (3.18):

$$\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\ln\frac{1}{\rho} - \frac{ar\cos\alpha}{\rho^2} + 2\,\frac{a^2r^2\sin^2\alpha}{\rho^4}\right) =$$

$$\int_0^\pi d\alpha\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\ln\frac{1}{\rho} - \frac{ar\sin\alpha\cos\alpha}{\rho^2}\right) = 0.$$

С физической точки зрения решение (3.25) едва ли может интерпретироваться как истинно вихреподобное, поскольку самого вихревого кольца нет — не существует ортогонального направления (z), чтобы могло происходить вращение вокруг кольцевой оси. Тем не менее, это решение сто́ит включить в нашу коллекцию, поскольку оно потребуется для исследований в §7.

Отличительной чертой четномерных решений (3.23) является независимость $a_{l,n}$ от n, так что $(n+2)$D-решение просто содержит дополнительный член по сравнению с nD-решением. Для наглядности выпишем еще раз 4D-решение и три последующих с $n = 6, 8, 10$:

$$\psi_4 = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\ln\frac{1}{R}\,,$$

$$\psi_6 = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\ln\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{R^2}\right),$$

$$\psi_8 = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\ln\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{R^2} + \frac{1}{4}\,\frac{z^4}{R^4}\right),$$

$$\psi_{10} = r\int_0^\pi d\alpha\cos\alpha\left(\ln\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{R^2} + \frac{1}{4}\,\frac{z^4}{R^4} + \frac{1}{6}\,\frac{z^6}{R^6}\right).$$

Из вида решений (3.15), (3.23) [и (3.25)], асимптотика в дальней зоне ясна, поскольку член $\ln(1/R)$ является всегда лидирующим. Действительно, независимо от n, начиная с $n = 2$, при $r \to \infty$ подынтегральные выражения всех решений $\sim \ln(1/r)$, и, начиная с $n = 4$, при $z \to \infty$ эти выражения $\sim \ln(1/z)$, т. е. имеет место 2D-асимптотика.

В плоскости $z = 0$ все четномерные решения ведут себя точно как 2D-решения, $\propto \ln(1/\rho)$, такова же и асимптотика при $z \to 0$ для каждого конечного ρ; а для любого конечного z подинтегральное выражение в ψ_n при $\rho \to 0$ есть всегда $\sim \ln(1/z) + Const$. Так что можно сделать вывод о почти 2D-поведении и в ближней зоне.

Заметим однако, что, в случае как четных, так и нечетных n, асимптотическое поведение компонент скорости v_r и v_z в соответствии с определением (3.2) будет зависеть от n.

4 Лапласианы: известное и неизвестное

4.1 Случай сферической симметрии

Хорошо известно, что уравнение Пуассона в nD-пространстве,

$$\Delta^{(n)}\Phi_n = -\sigma_n \delta(\vec{R}) \equiv s(\vec{R}), \tag{4.1}$$

имеет решение

$$\Phi_n = \frac{1}{n-2}\,\frac{1}{|\vec{R}|^{n-2}}\,, \qquad n \geq 2; \tag{4.1a}$$

$$\Phi_2 = \ln\frac{1}{|\vec{R}|}\,, \qquad n = 2; \tag{4.1b}$$

здесь $\vec{R}$ — радиус-вектор с началом в точечном источнике,

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \tag{4.2}$$

есть площадь поверхности $(n-1)$-сферы единичного радиуса, Γ – стандартное обозначение для гамма-функции. Уравнение (4.1), как и его решения, написаны в ковариантном виде, т. е. виде, пригодным для любой системы координат.

Рассмотрим сначала сферическую систему координат (x-систему, см. Приложение A). Это наиболее простая система, но очень иллюстративная и полезная для последующего обобщения. Полное выражение для лапласиана в x-системе дается формулой (A.2), но мы ограничимся случаем сферической симметрии, т. е. будем считать все величины зависящими только от x, так что $\Phi_n(\vec{x}) = \Phi_n(x)$, и только радиальная часть лапласиана "выживает". Заменим также $\delta(\vec{x})$ на $\delta(x)$ с помощью символического равенства

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\delta_+(x)}{\sigma_n x^{n-1}}, \tag{4.3}$$

обеспеченного определением

$$\int_{\tau^{(n)}} d\tau^{(n)}\delta(\vec{x})\phi(x) = \int\limits_0^\infty dx\, \delta_+(x)\phi(x) = \phi(0). \tag{4.4}$$

(Для аккуратности мы взяли функцию δ_+ вместо δ, поскольку часто используют определение $\int_0^\infty dx\, \delta(x)\phi(x) = \phi(0)/2$, если сингулярная точка $x = 0$ совпадает с пределом интегрирования, см. [20].)

"Усеченное"уравнение (4.1) теперь принимает вид

$$\Delta_x^{(n)}\Phi_n(x) \equiv \frac{1}{x^{n-1}}\,\frac{\partial}{\partial x}\,x^{n-1}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Phi_n(x) = -\,\frac{\delta_+(x)}{x^{n-1}} \equiv s_x^{(n)}(x), \tag{4.5}$$

и имеет решения [ср. с (4.1a) и (4.1b)]

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n-2}\,\frac{1}{x^{n-2}}\,, \qquad n \geq 2; \tag{4.6a}$$

$$\Phi_2(x) = \ln\frac{1}{x}\,, \qquad n = 2. \tag{4.6b}$$

Введем преобразование, которое переводит nD-решение (4.6), $\Phi_n(x)$, в $(n+2)$D-решение, $\Phi_{n+2}(x)$. Для $n \geq 2$

$$\Phi_{n+2}(x) = -\frac{1}{n}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\,\Phi_n(x). \tag{4.7}$$

Равенство (4.7) проверяется устно. Мы видим, что каждое нечетномерное решение преобразуется в следующее нечетномерное, начиная с $n = 3$, тогда как каждое четномерное преобразуется в следующее четномерное, начиная с $n = 2$. Другими словами, все нечетномерные решения получаются из Φ_3, а четномерные из Φ_2 посредством применения данного преобразования нужного числа раз.

Более того, принимая во внимание операторную перестановку

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta_x^{(n)} = \Delta_x^{(n+2)}\,\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.8}$$

получим

$$\Delta_x^{(n+2)}\Phi_{n+2}(x) = -\frac{1}{n}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta_x^{(n)}\Phi_n(x). \tag{4.9}$$

Равенство (4.9) означает, что оператор Лапласа [л. ч. уравнения (4.5)] преобразуется подобно самим решениям.

Независимо от (4.9) непосредственное вычисление с использованием явного вида $s^{(n)}(x)$ [см. определение в пр. ч. (4.5)] показывает, что аналогичное свойство имеет место и для источников:

$$s_x^{(n+2)}(x) = -\frac{1}{n}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\,s_x^{(n)}(x) \tag{4.10}$$

после применения формального равенства $x\delta'_+(x) = -\delta_+(x)$, где штрих обозначает дифференцирование.

4.2 Случай двойной сферической симметрии

Обратимся к (r,z)-системе координат, введенной в §3, см. также Приложение А. В предположении, что все величины зависят только от r и z (двойная сферическая симметрия), центральный точечный источник в (4.1) выражается следующим образом $(n > 2)$:

$$s^{(n)}(\vec{R}) = -\sigma_n\delta(\vec{r})\delta(\vec{z}) = -\sigma_n\,\frac{\delta_+(r)}{\sigma_2 r}\,\frac{\delta_+(z)}{\sigma_{n-2}z^{n-3}} = -\,\frac{1}{n-2}\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}}\,, \tag{4.11}$$

где мы использовали (4.3) и равенство

$$\sigma_n = \frac{\sigma_2\,\sigma_{n-2}}{n-2} \tag{4.12}$$

при $n \neq 2$, легко проверяемое с помощью (4.2). Полезно заметить, что $\sigma_2 = 2\pi$ и $\sigma_1 = 2$.

В рассматриваемой симметрии "усеченный"лапласиан (A.6), скомбинированный с источником (4.11), дает следующее уравнение Пуассона $(n > 2)$:

$$\Delta_{r,z}^{(n)}\Xi_n(r,z) \equiv \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^{n-3}}\frac{\partial}{\partial z}\,z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\Xi_n(r,z) = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}} \equiv s_{r,z}^{(n)}, \tag{4.13a}$$

обладающее решением

$$\Xi_n(r,z) = \frac{1}{\bar{R}^{n-2}}\,, \tag{4.14a}$$

где мы обозначили

$$\bar{R} = \sqrt{r^2+z^2}.$$

Заметим, что в силу замечательной формулы (4.12) множитель $(n-2)^{-1}$ не входит как в пр. ч. (4.13a), так и в решение (4.14a), ср. с пр. ч. (4.1) и решением (4.1a).

Случай $n=2$ является вырожденным, поскольку не существует координаты z, и уравнение Пуассона

$$\Delta_r^{(2)}\Xi_2(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\Xi_2 = -\,\frac{\delta_+(r)}{r} \tag{4.13b}$$

имеет тривиальное решение

$$\Xi_2 = \ln\frac{1}{r}\,. \tag{4.14b}$$

В случае (r,z)-системы координат мы также можем найти преобразование, аналогичное (4.7), несмотря на присутствие двух переменных, r и z. Нетрудно проверить, что оно выглядит следующим образом ($n \geq 3$):

$$\Xi_{n+2} = -\,\frac{1}{n-2}\,\frac{1}{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Xi_n \equiv f_L^{(n+2,n)}\Xi_n. \tag{4.15}$$

Появление множителя $(n-2)$ вместо n в (4.15) связано с тем, что решение (4.14a) отличается от (4.6a) именно на множитель $(n-2)$. Как и ранее, все нечетномерные решения получаются из нечетномерных, начиная с $n=3$. Однако в отличие от предыдущего случая для четномерных решений преобразование (4.15) начинает работать с $n=4$. Причина состоит в том, что Ξ_4 не может быть получено из Ξ_2 из-за упоминавшейся вырожденности случая $n=2$ — отсутствию координаты z, см. (4.14b).

Операторная перестановка типа (4.8) также имеет место:

$$\frac{1}{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Delta_{r,z}^{(n)} = \Delta_{r,z}^{(n+2)}\,\frac{1}{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

и приводит к равенству, подобному (4.9):

$$\Delta_{r,z}^{(n+2)}\Xi_{n+2} = f_L^{(n+2,n)}\Delta_{r,z}^{(n)}\Xi_n. \tag{4.16}$$

Для δ-источника в (4.13a) прямое вычисление [независимо от (4.16)] дает

$$s_{r,z}^{(n+2)} = f_L^{(n+2,n)}s_{r,z}^{(n)}. \tag{4.17}$$

Назовем совокупность величин Ξ_n, $\Delta_{r,z}^{(n)}\Xi_n$, и $s_{r,z}^{(n)}$ лапласовой совокупностью, L_n:

$$L_n = \{\Xi_n,\ \Delta_{r,z}^{(n)}\Xi_n,\ s_{r,z}^{(n)}\}, \tag{4.18}$$

тогда равенства (4.15), (4.16) и (4.17) могут быть записаны в компактной форме

$$L_{n+2} = f_L^{(n+2,n)}L_n. \tag{4.19}$$

Соотношение (4.19) разрешимо в том смысле, что любая nD-величина выражается через подобную ей 2D- или 3D-величину. Для четных и нечетных n имеем соответственно

$$L_n = f_L^{(n,n-2)} f_L^{(n-2,n-4)} \dots f_L^{(5,3)} L_3 = \frac{1}{(n-4)!!} \left(-\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^{(n-3)/2} L_3, \tag{4.20}$$

$$L_n = f_L^{(n,n-2)} f_L^{(n-2,n-4)} \dots f_L^{(6,4)} L_4 = \frac{1}{(n-4)!!} \left(-\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^{(n-4)/2} L_4. \tag{4.21}$$

4.3 Выделение δ-источников

Не только в методологических целях, но и с целью применений в §6, покажем, как доказать, что nD-решения (4.14a) действительно приводят к соответствующим δ-источникам, т. е. как доказать (4.13a). Мы продемонстрируем это двумя способами. Первый из них следует стандартной процедуре, описанной в учебниках по функциональному анализу, см. например [13]. Он совсем тривиален в x-системе, но имеет некоторые тонкости в (r,z)-системе (двухпараметрическое задание гиперповерхности, независимость от порядка предельного перехода, см. ниже). Второй способ, составляюший суть изобретения, состоит в использовании преобразования $f_L^{(n+2,n)}$ для построения доказательства рекуррентной процедурой.

Рассмотрим функцию $\phi(r,z) \ni \mathcal{D}(\mathcal{G})$, где $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ обозначает класс основных функций, т. е. функций класса $C^\infty(\mathcal{G})$, ограниченных в области $\mathcal{G}(r,z)$: $supp\,\phi \subset \mathcal{G}(r,z)$. Тогда

$$\int_{\tau^{(n)}} d\tau^{(n)} \phi\, \Delta_{r,z}^{(n)} \Xi_n = \int_{\tau^{(n)}} d\tau^{(n)} (\Delta_{r,z}^{(n)} \phi)\, \Xi_n, \tag{4.22}$$

где $d\tau^{(n)}$ дано выражением (A.4), и интегрирование проводится по достаточно большому nD-объему $\tau^{(n)}$, так что области изменения r и z содержат $\mathcal{G}(r,z)$.

Традиционный способ. Следуя [13] и используя свойство (4.22), напишем

$$\begin{aligned} \int_{\tau^{(n)}} d\tau^{(n)} (\Delta_{r,z}^{(n)} \phi)\, \Xi_n &= \lim_{\varepsilon,\eta\to 0} \int_{\tau_{\varepsilon,\eta}^{(n)}} d\tau^{(n)} (\Delta_{r,z}^{(n)} \phi)\, \Xi_n \\ &= \lim_{\varepsilon,\eta\to 0} \left(\int_{\tau_{\varepsilon,\eta}^{(n)}} d\tau^{(n)} \phi\, \Delta_{r,z}^{(n)} \Xi_n + J_r + J_z \right), \end{aligned} \tag{4.23}$$

где введен nD-объем $\tau_{\varepsilon,\eta}^{(n)}$, который получен исключением из $\tau^{(n)}$ малой области вблизи точки $r=0$, $z=0$; $\tau_{\varepsilon,\eta}^{(n)}$: $r \ge \varepsilon$, $z \ge \eta$ (или $|z| \ge \eta$ в 3D-случае). Величины J_r и J_z обозначают поверхностные интегралы:

$$J_r = J_{r1} + J_{r2},$$

$$J_{r1} = \int_{S_r} dS_r \left[\phi \frac{\partial \Xi_n}{\partial z} \right]_{z=\eta} = -(n-2)\sigma_2 \sigma_{n-2} \eta^{n-2} \int\limits_0^\varepsilon dr\, r\phi(r,\eta)\, \frac{1}{(r^2+\eta^2)^{n/2}}\,, \tag{4.24}$$

$$J_{r2} = -\int_{S_r} dS_r \left[\frac{\partial \phi}{\partial z}\, \Xi_n \right]_{z=\eta} = -\sigma_2 \sigma_{n-2} \eta^{n-2} \int\limits_0^\varepsilon dr\, r\, \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} \frac{1}{(r^2+\eta^2)^{(n-2)/2}}\,, \tag{4.25}$$

и

$$J_z = J_{z1} + J_{z2},$$

$$J_{z1} = \int_{S_z} dS_z \left[\phi\,\frac{\partial \Xi_n}{\partial r}\right]_{r=\varepsilon} = -(n-2)\sigma_2\sigma_{n-2}\varepsilon^2 \int\limits_0^\eta dz\; z^{n-3}\phi(\varepsilon,z)\,\frac{1}{(\varepsilon^2+z^2)^{n/2}}\,, \qquad (4.26)$$

$$J_{z2} = -\int_{S_z} dS_z \left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\,\Xi_n\right]_{r=\varepsilon} = -\sigma_2\sigma_{n-2}\varepsilon^2 \int\limits_0^\eta dz\; z^{n-3}\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon}\frac{1}{(\varepsilon^2+z^2)^{(n-2)/2}}\,, \qquad (4.27)$$

где

$$dS_r = d\sigma_2 d\sigma_{n-2} dr\; r\eta^{n-3}$$

и

$$dS_z = d\sigma_2 d\sigma_{n-2} dz\; \varepsilon z^{n-3}$$

есть $(n-1)$D-элементы поверхности. 3D-аналогом S_r служит поверхность основания цилиндра $0 \le r \le \varepsilon$, $-\eta \le z \le \eta$, а 3D-аналогом S_z — боковая поверхность того же цилиндра. (Заметим, что 0D-сфера состоит из двух изолированных точек $z=-\eta$ и $z=\eta$.)

Возвращаясь к (4.23), отметим прежде всего, что допредельный член, включающий $\Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_n$, исчезает. Далее, существует два пути выполнения предельной процедуры в зависимости от порядка взятия пределов по ε и η. Из выражений (4.24), (4.25) и (4.26), (4.27) видно, что всегда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_r = 0, \quad \lim_{\eta\to 0} J_z = 0.$$

Этот факт означает, что при порядке взятия пределов сначала $\varepsilon \to 0$, а затем $\eta \to 0$ (или сначала $\eta \to 0$, а затем $\varepsilon \to 0$) только интеграл J_z (или J_r) "работает".

Несложные вычисления показывают, что следующие предельные выражения, содержащие производные от ϕ, обращаются в нуль:

$$\lim_{\eta\to 0} J_{r2} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} J_{z2} = 0.$$

На вычислениях остающихся интегралов в (4.24) и (4.26) остановимся подробнее. Тривиальное интегрирование в (4.24), общее для случая четных и нечетных n, приводит к выражению

$$\lim_{\eta\to 0} J_{r1} = -\sigma_2\sigma_{n-2}\bar{\phi}_\varepsilon,$$

где $\bar{\phi}_\varepsilon$ есть среднее значение величины $\phi(r,0)$ по интервалу $0 \le r \le \varepsilon$.

Что касается интеграла в (4.26), то в случаях нечетных и четных n он принимает вид (C.1) или (C.2) соответственно. В последнем случае при предельном переходе $\varepsilon \to 0$ требуется выражение (C.3). Однако вне зависимости от нечетности или четности n имеет место одно и то же предельное выражение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{z1} = -\sigma_2\sigma_{n-2}\bar{\phi}_\eta,$$

где $\bar{\phi}_\eta$ есть среднее значение величины $\phi(0,z)$ по интервалу $0 \le z \le \eta$.

Возвращаясь к (4.23), получим

$$\int d\tau^{(n)}\phi\;\Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{\eta\to 0} J_{r1}\right) = \lim_{\eta\to 0}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} J_{z1}\right)$$

$$= -\sigma_2\sigma_{n-2}\phi(0,0) = -(n-2)\sigma_n\phi(0,0), \qquad (4.28)$$

что и требовалось доказать. Множитель $(n-2)$ появился в (4.28) вследствие того, что он был удален в решении (4.14a). Таким образом, (4.28) является записью (4.13a) в терминах функционалов на основных функциях.

Ниже будет удобнее записать л. ч. (4.28) в более компактной форме:

$$\int\limits_0^\infty dr\, r \int\limits_0^\infty dz\, z^{n-3}\phi\, \Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_n \equiv \left\langle r z^{n-3}\phi,\ \Delta^{(n)}_{r,z}\Xi_n \right\rangle = -\phi(0,0). \tag{4.29}$$

Рекуррентный способ. Допустим, что мы доказали, возможно первым способом, что

$$\Delta^{(3)}_{r,z}\Xi_3(r,z) = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\delta_+(z)$$

и/или

$$\Delta^{(4)}_{r,z}\Xi_4(r,z) = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z}\,,$$

после этого воспользуемся методом математической индукции. Докажем, что если

$$\Delta^{(k-2)}_{r,z}\Xi_{k-2}(r,z) = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{k-5}}\,, \tag{4.30}$$

то

$$\Delta^{(k)}_{r,z}\Xi_k(r,z) = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{k-3}}\,, \tag{4.31}$$

для всех целых чисел $k \geq 5$.

Уравнение (4.30) означает, что [см. (4.29)]

$$\left\langle r z^{k-5}\phi,\ \Delta^{(k-2)}_{r,z}\Xi_{k-2} \right\rangle = -\phi(0,0) \tag{4.32}$$

для произвольной функции $\phi(r,z) \ni \mathcal{D}(\mathcal{G})$. Напомним, что для всех функций ϕ упомянутого класса, во-первых, все производные от ϕ принадлежат тому же классу, и, во-вторых, для произвольной функции $F(r,z)$ выполняется соотношение

$$\left\langle \phi,\ \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = -\left\langle F,\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle.$$

Требуемое доказательство дано ниже как цепь соотношений, начало которой дает преобразование $f_L^{(k,k-2)}$:

$$\left\langle r z^{k-3}\phi,\ \Delta^{(k)}_{r,z}\Xi_k \right\rangle = \left\langle r z^{k-3}\phi,\ f_L^{(k,k-2)}\Delta^{(k-2)}_{r,z}\Xi_{k-2} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{k-4}\left\langle r\,\frac{\partial}{\partial z}\,(\phi z^{k-4}),\ \Delta^{(k-2)}_{r,z}\Xi_{k-2} \right\rangle$$

$$= \left\langle r z^{k-5}\left(\phi + \frac{z}{k-4}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}\right),\ \Delta^{(k-2)}_{r,z}\Xi_{k-2} \right\rangle = -\phi(0,0). \tag{4.33}$$

В последнем выражении второй член в скобках исчезает при интегрировании. Это происходит благодаря равенству $z\delta_+(z) = 0$ после подстановки (4.30), или же этот факт проверяется непосредственно. Первый член дает (4.32), что доказывает (4.31).

5 Анти-лапласианы: совсем неизвестны?

5.1 Связи анти-лапласианов с лапласианами

До сих пор мы ввели только определение 3D-анти-r-лапласиана и nD-анти-дубль-лапласиана. Здесь мы определим оставшийся анти-лапласианы, возникающие при сделанном разбиении пространства, $R^n = R^2 \times R^{n-2}$, и приведем некоторые соотношения, связывающие их с лапласианами.

Способ, которым было получено (2.6), наводит на соотношение, данное ниже. Обратимся для простоты к декартовой системе координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, как и прежде $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Обозначим через

$$\Delta^{(n)}_{x_1,\ldots,x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

лапласиан в декартовой системе координат. Для произвольной (дифференцируемой) функции F, зависящей только от x: $F = F(x)$, и для любой координаты x_k, выполняется следующее соотношение

$$\Delta^{(n)}_{x_1,\ldots,x_n} \left(\frac{x_k}{x^n}\, F(x) \right) = \frac{x_k}{x^n}\, \overline{\Delta}^{(n)}_x F(x), \tag{5.1}$$

где введен оператор

$$\overline{\Delta}^{(n)}_x \equiv x^{n-1}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{1}{x^{n-1}}\, \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{n-1}{x}\, \frac{\partial}{\partial x}\, ,$$

который мы называем анти-лапласианом. (Читатель уже понял, что префикс "анти"присвоен оператору из-за обратного положения "x"и "$1/x$"в первом выражении и противоположного знака во втором по сравнению с лапласианом.) На самом деле равенство (5.1) ковариантно в том смысле, что лапласиан в его л. ч. может быть выражен и в других системах координат.

Запишем (5.1) в x-системе, тем более, что определение анти-лапласиана выражено через x. Возьмем координату x_1, соответствующую старшему углу, λ_1. (См. Приложение А. Мы также могли бы взять произвольную координату x_k, выражаемую через λ_1 и оставшиеся углы, это повлекло бы всего лишь более громоздкий вывод.) Тогда,

$$\Delta^{(n)} \left(\frac{\cos\lambda_1}{x^{n-1}}\, F(x) \right) = \frac{\cos\lambda_1}{x^{n-1}}\, \overline{\Delta}^{(n)}_x F(x). \tag{5.2}$$

В (r, z)-системе nD-пространства анти-r-лапласиан определяется по аналогии с (2.4):

$$\overline{\Delta}^{(n)}_r = r\, \frac{\partial}{\partial r}\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^{n-3}}\, \frac{\partial}{\partial z}\, z^{n-3}\, \frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.3}$$

Определим также оператор

$$\overline{\Delta}^{(n)}_z \equiv \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r}\, r\, \frac{\partial}{\partial r} + z^{n-3}\, \frac{\partial}{\partial z}\, \frac{1}{z^{n-3}}\, \frac{\partial}{\partial z}, \tag{5.4}$$

который, следуя нашей таксономии, естественно назвать анти-z-лапласианом, и который играет ключевую роль в дальнейших исследованиях. Он завершает коллекцию анти-лапласианов для $2 + (n-2)$ разбиения nD-пространства.

В целях наглядности и повторения соберем все рассматриваемые операторы в одну таблицу.

⋆ *Таблица операторов*

1. Лапласиан (в двойной сферической симметрии):

$$\Delta^{(n)}_{r,z} \equiv \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\, r\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\, z^{n-3}\, \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

2. Анти-r-лапласиан:

$$\overline{\Delta}^{(n)}_{r} \equiv r\, \frac{\partial}{\partial r}\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\, z^{n-3}\, \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

3. Анти-z-лапласиан:

$$\overline{\Delta}^{(n)}_{z} \equiv \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\, r\, \frac{\partial}{\partial r} + z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\, \frac{1}{z^{n-3}}\, \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

4. Анти-дубль-лапласиан:

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)} \equiv r\, \frac{\partial}{\partial r}\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r} + z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\, \frac{1}{z^{n-3}}\, \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

В (r, z)-системе соотношение (5.2) имеет место независимо в каждом из 2D- и $(n-2)$D-подпространств [ср. с (2.6) в 3D-пространстве]. В nD-пространстве для произвольной функции $F(r, z)$ аналог (2.6) есть

$$\Delta^{(n)} \left(\frac{\cos\varphi}{r}\, F(r, z) \right) = \frac{\cos\varphi}{r}\, \overline{\Delta}^{(n)}_{r} F(r, z), \tag{5.5}$$

а также имеют место соотношения

$$\Delta^{(n)} \left(\frac{\cos\theta_1}{z^{n-3}}\, F(r, z) \right) = \frac{\cos\theta_1}{z^{n-3}}\, \overline{\Delta}^{(n)}_{z} F(r, z) \tag{5.6}$$

и

$$\overline{\Delta}^{(n)}_{z} \left(\frac{\cos\phi}{r}\, F(r, z) \right) = \frac{\cos\varphi}{r}\, \overline{\overline{\Delta}}^{(n)} F(r, z), \tag{5.7}$$

которые проверяются с использованием (A.6).

Помимо соотношений (5.5), (5.6) и (5.7) существуют несколько очевидных дифференциальных соотношений. Вернемся опять в x-систему, тогда для произвольной функции $F(x)$,

$$x^{n-1}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \Delta^{(n)}_{x} F(x) = \overline{\Delta}^{(n)}_{x} \left(x^{n-1}\, \frac{\partial}{\partial x}\, F(x) \right) \tag{5.8a}$$

и

$$\frac{1}{x^{n-1}}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \overline{\Delta}^{(n)}_{x} F(x) = \Delta^{(n)}_{x} \left(\frac{1}{x^{n-1}}\, \frac{\partial}{\partial x}\, F(x) \right). \tag{5.8b}$$

Равенства (5.8) оказываются тождествами при использовании явного вида операторов.

В (r,z)-системе возникают разнообразные соотношения типа (5.8a) и (5.8b) благодаря перестановочности производных $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial z$. Например, для произвольной функции $F(r,z)$

$$r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\Delta^{(n)}_{r,z}F(r,z)=\overline{\Delta}^{(n)}_r\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\,F(r,z)\right), \tag{5.9a}$$

$$z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Delta^{(n)}_{r,z}F(r,z)=\overline{\Delta}^{(n)}_z\left(z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,F(r,z)\right), \tag{5.9b}$$

$$z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\overline{\Delta}^{(n)}_r F(r,z)=\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\left(z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,F(r,z)\right). \tag{5.9c}$$

Нет необходимости выписывать все возможные оставшиеся соотношения, принцип их построения ясен. Ниже нам пригодится только одно из них, а именно,

$$\frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\overline{\Delta}^{(n)}_z F(r,z)=\Delta^{(n)}_{r,z}\left(\frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,F(r,z)\right). \tag{5.10}$$

Помимо соотношений типа (5.5)–(5.7) и типа (5.9) и (5.10), так сказать, "в чистом виде"можно также составлять любые их смешанные комбинации.

5.2 Потенциало-подобные решения

Если подразумевать, что точечный источник находится в точке $r=0$, $z=0$, то оказывается, что nD-решения однородных (анти-лапласовых) уравнений с оператором (5.4),

$$\overline{\Delta}^{(n)}_z\Psi_n\equiv\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}+z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_n=0, \tag{5.11}$$

являются упрощенными версиями решений (3.11) для нечетных n и решений (3.15) и (3.23) для четных n. Как и ранее, рассмотрим эти случаи порознь.

Для нечетных n функция

$$\Psi_n={\sum_{k=3}^{n}}'\,a_{k,n}\,\frac{z^{k-3}}{\bar{R}^{k-2}} \tag{5.12}$$

есть nD-решение (5.11) с $a_{k,n}$, определяемыми (3.12) и (3.13), напомним, что $\bar{R}=\sqrt{r^2+z^2}$. Следует заметить, что здесь рекуррентное соотношение (3.12) для $a_{k,n}$ является необходимым и достаточным условием того, что (5.12) является решением (5.11), без каких-либо дополнительных конструкций типа тождества (3.9).

Для четных n функции

$$\Psi_4=\ln\frac{1}{\bar{R}} \tag{5.13a}$$

и, при $n\geq 6$,

$$\Psi_n=\ln\frac{1}{\bar{R}}+{\sum_{k=6}^{n}}''\,\frac{1}{k-4}\,\frac{z^{k-4}}{\bar{R}^{k-4}} \tag{5.13b}$$

есть nD-решения (5.11).

Четномерные решения (5.13) обладают интересным свойством:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi_n=-\,\frac{z^{n-3}}{\bar{R}^{n-2}}\,, \tag{5.14}$$

которое используется в §6 для нахождения точечных источников.

Очевидно, что на асимптотику решений (5.12) и (5.13) переносятся с соответствующими изменениями (в частности, с заменой ρ на r) обсуждения, сделанные в §3 для решений (3.11), (3.15), (3.23). Отсутствие интегралов и угловых переменных делает 3D- и 2D-поведение (5.12) и (5.13), соответственно, еще более ясным.

5.3 Преобразования от nD- к $(n+2)$D-величинам

Для решений анти-лапласовых уравнений также существует преобразование, переводящее nD-решение в $(n+2)$D-решение, общее для нечетных и четных n:

$$\Psi_{n+2} = f_A^{(n+2,n)}\,\Psi_n = -\,\frac{z^{n-1}}{n-2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z^{n-2}}\,\Psi_n\right). \tag{5.15}$$

С использованием дифференциальной перестановки

$$z^{n-1}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-2}}\,\overline{\Delta}_z^{(n)} = \overline{\Delta}_z^{(n+2)}\,z^{n-1}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z^{n-2}}\,,$$

мы также найдем, что

$$\overline{\Delta}_z^{(n+2)}\Psi_{n+2} = f_A^{(n+2,n)}\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n. \tag{5.16}$$

Обозначим через $\bar{s}_z^{(n)}$ точечный источник, дающий начало решению Ψ_n:

$$\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n = \bar{s}_z^{(n)},$$

поиску явного вида которого с помощью формулы

$$\bar{s}_z^{(n+2)} = f_A^{(n+2,n)}\bar{s}_z^{(n)} \tag{5.17}$$

мы посвятим следующий параграф.

По аналогии с (4.18) введем здесь анти-z-лапласову совокупность, A_n:

$$A_n = \{\Psi_n,\ \overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n,\ \bar{s}_z^{(n)}\}. \tag{5.18}$$

и запишем единообразно равенства (5.15), (5.16) и (5.17):

$$A_{n+2} = f_A^{(n+2,n)}A_n. \tag{5.19}$$

Равенство (5.19) может быть разрешено подобно тому, как это сделано в §4, т. е. любая nD-величина из (5.18) может быть выражена через аналогичную 3D- или 4D-величину. Для нечетных n,

$$A_{n+2} = f_A^{(n+2,n)}f_A^{(n,n-2)}\dots f_A^{(5,3)}A_3 = \frac{z^{n-1}}{(n-2)!!}\left(-\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z}\right)^{(n-1)/2}A_3, \tag{5.20}$$

а для четных n,

$$A_{n+2} = f_A^{(n+2,n)}f_A^{(n,n-2)}\dots f_A^{(6,4)}A_4 = \frac{z^{n-1}}{(n-2)!!}\left(-\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{z}\right)^{(n-2)/2}\frac{A_4}{z}\,. \tag{5.21}$$

6 Анти-z-лапласианы: выделение точечных источников

6.1 Простой случай нечетных n

В этом случае все 3D-величины лапласовой и анти-лапласовой совокупностей совпадают: $A_3 = L_3$. Действительно, $\Delta^{(3)}_{r,z} = \overline{\Delta}^{(3)}_z$, $\Xi_3 = \Psi_3$ и $s^{(3)}_{r,z} = \bar{s}^{(3)}_z$. Этот факт позволяет наметить несколько способов для вычисления $\bar{s}^{(n)}_z$. Первый из них, наиболее простой и наиболее формальный, состоит в применении (5.20) к $\bar{s}^{(3)}_z$.

В этой связи напомним, что в §4 справедливость равенства (4.17), аналогичного (5.17), была просто проверена, поскольку явный вид источника там известен. Здесь мы утверждаем, что результат явной подстановки известного решения Ψ_n в оператор $\overline{\Delta}^{(n)}_z$, что есть пр. ч. уравнения $\overline{\Delta}^{(n)}_z \Psi_n = \bar{s}^{(n)}_z$ (или источник $\bar{s}^{(n)}_z$), в силу самого́ этого уравнения также удовлетворяет (5.17), поскольку л. ч. этого уравнения до указанной подстановки удовлетворяет (5.16).

Итак, в результате применения (5.20) к $\bar{s}^{(3)}_z$,

$$\bar{s}^{(n)}_z = -\left({\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n} \right) \frac{\delta_+(r)}{r}\, \delta_+(z) = -\, \frac{(n-3)!!}{(n-4)!!}\, \frac{\delta_+(r)}{r}\, \delta_+(z) \tag{6.1}$$

[см. (B.3)]. Возможно, кто-нибудь возразит, что нужно проявлять больше аккуратности, когда мы имеем дело с формальными выражениями, поэтому покажем второй (улучшенный) способ для получения того же результата.

Если сравнить выражения (4.20) и (5.20) для преобразований лапласовой и анти-лапласовой совокупностей, то ясно, что последнее отличается от первого наличием множителя z^{n-1} и перестановкой $1/z$ и $\partial/\partial z$. Этот факт позволяет выразить алгебраически любую из величин A_n через $L_3, L_5, \ldots, L_{n-2}, L_n$. Ожидаемое выражение,

$$A_n = {\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n} z^{k-3} L_k, \tag{6.2}$$

может быть получено рекуррентным способом [ср. с (5.12)]. Выберем вторые величины из совокупностей (4.18) и (5.18), тогда из (6.2) следует

$$\overline{\Delta}^{(n)}_z \Psi_n = {\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n} z^{k-3} \Delta^{(k)}_{r,z} \Xi_k. \tag{6.3}$$

Далее, умножим (6.3) на $r\phi$, где $\phi(r,z)$ принадлежит к упоминавшемуся классу основных функций, и проинтегрируем результат по r и z, ср. с (4.29):

$$\left\langle r\phi,\, \overline{\Delta}^{(n)}_z \Psi_n \right\rangle = {\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n} \left\langle r z^{k-3}\phi,\, \Delta^{(k)}_{r,z} \Xi_k \right\rangle. \tag{6.4}$$

Интеграл в пр. ч. (6.4) уже вычислялся, см. (4.33); таким образом,

$$\left\langle r\phi,\, \overline{\Delta}^{(n)}_z \Psi_n \right\rangle = -\left({\sum_{k=3}^{n}}' a_{k,n} \right) \phi(0,0), \tag{6.5}$$

что означает справедливость (6.1).

Наконец, третий и наиболее аккуратный способ состоит в исследовании пределов типа (4.23):

$$\left\langle r\phi,\ \overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n\right\rangle = \lim_{\varepsilon,\eta\to 0}(\bar{J}_r+\bar{J}_z),$$

где поверхностные члены

$$\bar{J}_r = \left[\int\limits_0^{\varepsilon} dr\, r\left(\phi \sum_{k=3}^{n}{}' a_{k,n} z^{k-3}\,\frac{\partial \Xi_k}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\Psi_n\right)\right]_{z=\eta},$$

$$\bar{J}_z = \left[\int\limits_0^{\eta} dz\, r\left(\phi\,\frac{\partial \Psi_n}{\partial r} - \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\Psi_n\right)\right]_{r=\varepsilon}.$$

получены с использованием (6.3). Конечный результат, не зависящий от порядка взятия пределов по ε и η, неизбежно совпадает с (6.5).

Чтобы избежать появления суммы коэффициентов $a_{k,n}$ в пр. ч. (6.1) или (6.5), заменим $a_{k,n}$ перенормированными величинами $b_{k,n}$ [см. Приложение B и, в частности, (B.5)]. Итак,

---

★

Для нечетных $n \geq 3$ функция

$$\bar{\Psi}_n = \sum_{k=3}^{n}{}' \frac{(k-4)!!\,(n-k-1)!!}{(k-3)!!\,(n-k)!!}\,\frac{z^{k-3}}{[r^2+z^2]^{(k-2)/2}} \tag{6.6}$$

удовлетворяет уравнению

$$\overline{\Delta}_z^{(n)}\bar{\Psi}_n = -\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\delta_+(z) \equiv \bar{s}_z^{(n)}.$$

Отметим, что благодаря нормировке коэффициентов $b_{k,n}$ зависимость от n в точечном источнике последнего уравнения исчезает.

6.2 Трудный случай четных n

Для четных n величина A_n не может быть приведена к какой-либо комбинации величин L_k. Причина состоит в том, что хотя и $A_2 = L_2$, но как уже говорилось, этот случай является вырожденным, а наше преобразование начинает действовать с $A_4 \neq L_4$, см. (4.21) и (5.21). Поэтому нужно каким-то образом вычислить $\bar{s}_z^{(4)}$, чтобы затем оттрансформировать результат к произвольному n.

К счастью, решения (5.13) обладают свойством (5.14), которое позволяет получить сразу некоторую информацию об источниках. Вспомним соотношение (5.10) и положим $F(r,z)=\Psi_n$, тогда, комбинируя (5.10), (5.14) и (4.13), придем к уравнению

$$\frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n = -\Delta_{r,z}^{(n)}\left(\frac{1}{\bar{R}^{n-2}}\right) = \frac{\delta_+(r)}{r}\,\frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}}. \tag{6.7}$$

После умножения (6.7) на z^{n-3} и взятия первообразной функции с использованием формального равенства $\Theta'_+(z)=\delta_+(z)$ получим

$$\overline{\Delta}_z^{(n)}\Psi_n = \frac{\delta_+(r)}{r}\,\Theta_+(z) + \tilde{f}(r), \tag{6.8}$$

где $\tilde{f}(r)$ есть неизвестная пока обобщенная функция, а $\Theta_+(z)$ есть ступенчатая функция Хевисайда:

$$\Theta_+(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0; \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

Равенство (6.8) наводит на мысль, что сто́ит явно просчитать случай $n = 4$ с Θ-источником. Найдем функцию $\tilde{\Psi}_4(r,z)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\overline{\Delta}_z^{(4)} \tilde{\Psi}_4 = \frac{\delta_+(r)}{r}\,\Theta_+(z). \qquad (6.9)$$

Скомбинируем (6.9) с (5.6) при $n = 4$ и заменим $F(r,z)$ на $\tilde{\Psi}_4(r,z)$, переобозначим для удобства $\theta_1 = \theta$, тогда придем к уравнению

$$\Delta^{(4)}\left(\frac{\cos\theta}{z}\,\tilde{\Psi}_4(r,z)\right) = \frac{\cos\theta}{z}\,\overline{\Delta}_z^{(4)}\tilde{\Psi}_4(r,z) = \frac{\cos\theta}{z}\,\frac{\delta_+(r)}{r}\,\Theta_+(z) \equiv -\sigma_4\mu(r,z,\theta), \quad (6.10)$$

здесь $\sigma_4 = 2\pi^2$ в сответствии с (4.2) .

Фундаментальное решение уравнения Пуассона (4.1) при $n = 4$ есть

$$\Phi_4 = \frac{1}{2|\vec{R} - \vec{R}'|^2},$$

где

$$|\vec{R} - \vec{R}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2r'r\cos(\varphi - \varphi') + z^2 + z'^2 - 2z'z\cos(\theta - \theta').$$

В соответствии со стандартным правилом и подобно выводу, сделанному в §2, решение уравнения (6.10) может быть написано в следующем виде:

$$\frac{\cos\theta}{z}\,\tilde{\Psi}_4 = \frac{1}{2}\int_{\tau^{(4)\prime}} d\tau^{(4)\prime}\ \frac{\mu(r',z',\theta')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^2} = -\frac{1}{2\sigma_4}\int\limits_0^\infty dr' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^\infty dz' \int\limits_0^{2\pi} d\theta' \times$$

$$\frac{\cos\theta'\delta_+(r')\Theta_+(z')}{r^2 + r'^2 - 2r'r\cos(\varphi - \varphi') + z^2 + z'^2 - 2z'z\cos(\theta - \theta')}\,. \qquad (6.11)$$

Строго говоря, стандартное правило относится к ситуации с ограниченным (компактным) источником, тогда как источник в (6.10) не ограничен. Тем не менее, применение этого правила здесь законно потому, что интеграл (6.11) существует. Для аккуратности мы могли бы придумать предельную процедуру перехода от интегрирования по конечному объему к интегрированию по всему пространству, что не изменило бы сути дела.

Теперь проделаем над выражением (6.11) три последовательных операции: 1) интегрирование по φ' при помощи (С.4), 2) интегрирование по r' и 3) удаление множителя $\cos\theta$ после переопределения $\theta' = \theta + \beta$, как это было описано в §2. После этого

$$\tilde{\Psi}_4 = -\frac{1}{\pi}\,z\int\limits_0^\infty dz' \int\limits_0^\pi \frac{d\beta\ \cos\beta}{r^2 + z^2 + z'^2 - 2z'z\cos\beta}\,. \qquad (6.12)$$

Следующий шаг есть интегрирование (6.12) по β при помощи (С.5):

$$\tilde{\Psi}_4 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dz'}{z'}\left(\frac{r^2 + z^2 + z'^2}{[(r^2 + z^2)^2 + 2(r^2 - z^2)z'^2 + z'^4]^{1/2}} - 1\right),$$

где, наконец, последний интеграл может быть вычислен с помощью (C.6). Это дает окончательно

$$\tilde{\Psi}_4 = \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \ln \frac{1}{r} \,. \tag{6.13}$$

Полученное решение (6.13), соответствующее Θ-источнику в пр. ч. (6.9), отличается от решения (5.13a) только последним членом. Однако в действительности этот член есть вырожденное 2D-решение (4.14b) и, в то же время, независимое от z решение следующего уравнения [ср. с (4.13b)]:

$$\overline{\Delta}_z^{(4)} \Xi_2 = \Delta_r^{(2)} \Xi_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \Xi_2 = - \frac{\delta_+(r)}{r} \,.$$

Таким образом, $\Psi_4 = \tilde{\Psi}_4 + \Xi_2$, и мы получаем

$\star$

Функция

$$\Psi_4 = \ln \frac{1}{[r^2 + z^2]^{1/2}} \,, \tag{6.14}$$

удовлетворяет уравнению с точечным (но не δ-образным) источником

$$\overline{\Delta}_z^{(4)} \Psi_4 = - \frac{\delta_+(r)}{r} \left[1 - \Theta_+(z)\right] \equiv \bar{s}_z^{(4)}. \tag{6.15}$$

Действительно, для заданного интервала изменения z как радиальной координаты, $z \geq 0$,

$$1 - \Theta_+(z) = \begin{cases} 1, & z = 0; \\ 0, & z > 0. \end{cases} \tag{6.16}$$

Заметим, что ситуация в некотором смысле парадоксальна. Обобщенная функция (6.16) конечна (несингулярна) в точке $z = 0$; поэтому источник в (6.15), $\bar{s}_z^{(4)}$, хотя и локализованный в одной точке $r = 0, z = 0$ является "более слабым", чем истинный δ-источник. С другой стороны, логарифмическая расходимость в точке $r = 0, z = 0$ функции (6.14) также является более слабой, чем расходимость $\sim \bar{R}^{-2}$, которая для $n = 4$ соответствовала бы δ-источнику. Если бы мы попытались выделить источник $\bar{s}_z^{(4)}$ при помощи свертки с основными функциями, как это делалось в §4 для уравнения Лапласа, то потерпели бы неудачу, поскольку подобные свертки обращаются в нуль. Тем не менее, производная от $\bar{s}_z^{(4)}$ по z дает обычный δ-источник.

Теперь, зная 4D-источник и используя преобразование $f_A^{(n+2,n)}$, легко вычислить nD-источник для любого четного n. Оказывается, что преобразование не изменяет его явного вида; действительно,

$$f_A^{(n+2,n)} \left[1 - \Theta_+(z)\right] = - \frac{z^{n-1}}{n-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z^{n-2}} \left[1 - \Theta_+(z)\right] \right) = 1 - \Theta_+(z)$$

благодаря формальному равенству $z\delta_+(z) = 0$. Обсуждение предыдущего абзаца переносится mutatis mutandis также и на случай четных $n > 4$.

Итак, в итоге мы установили

★

Для четных $n \geq 6$ функция

$$\Psi_n = \ln \frac{1}{[r^2 + z^2]^{1/2}} + \sum_{k=6}^{n}{}'' \frac{1}{k-4} \frac{z^{k-4}}{[r^2 + z^2]^{(k-4)/2}} \tag{6.17}$$

удовлетворяет уравнению

$$\overline{\Delta}_z^{(n)} \Psi_n = -\frac{\delta_+(r)}{r} \left[1 - \Theta_+(z)\right] \equiv \bar{s}_z^{(n)}.$$

К счастью, с самого начала общий коэффициент при Ψ_n случайно был выбран так, что $\bar{s}_z^{(n)}$ не несет зависимости от n.

Заканчивая этот параграф, мы должны сказать, что существует теорема, утверждающая, что каждая обобщенная функция, носителем которой является только одна точка, есть комбинация δ-функций и их производных [14], доказательство дается в терминах конечных функционалов на непрерывных функциях. Эта теорема имеет следствием тот факт, что решение уравнения Лапласа со степенной сингулярностью генерируется как раз такой комбинацией. Теорема также распространяется на уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами (в некоторой системе координат, если такая существует). Однако наша ситуация является более тонкой. По мнению автора, во-первых, не существует ненулевых конечных функционалов, связанных с обобщенной функцией (6.16) в классе основных функций. Во-вторых, рассмотренные уравнения с оператором анти-z-лапласианом и их решения для $n > 3$ вообще, и в том числе для четных n, не являются уравнениями и решениями, удовлетворяющими указанной теореме. Несомненно, этот вопрос требует дополнительных исследований с точки зрения функционального анализа, что выходит за рамки данной работы.

7 Вновь вихреподобные и другие кольцевые решения

Выделение источников для вихреподобных решений анти-дубль-лапласовых уравнений делается по аналогии с предыдущим параграфом.

Введем анти-дубль-лапласову совокупность, D_n:

$$D_n = \{\psi_n,\ \overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\psi_n,\ \overline{\overline{s}}^{(n)}\}.$$

Имея такой мощный инструмент как преобразование $f_A^{(n+2,n)}$, не составляет труда построить любую из величин D_{n+2} из D_n. Действительно, различие между соответствующими A_n и D_n целиком относится к их "r-частям", а "z-части"очень схожи. Нет даже необходимости в таком пояснении, т. к. проверяется непосредственно, что

$$D_{n+2} = f_A^{(n+2,n)} D_n.$$

Результаты предсказуемы и формулируются порознь для двух рассматриваемых случаев.

Нечетные n**.** В данном случае начинаем с D_3. Что касается операторов, то $\overline{\overline{\Delta}}^{(3)}$ совпадает с оператором (2.4), который следует переобозначить как $\overline{\Delta}_r^{(3)}$: $\overline{\overline{\Delta}}^{(3)} = \overline{\Delta}_r^{(3)}$. Вместо (2.7), где мы определили Ω_φ традиционным способом, здесь дадим другое определение, отличающееся на численный коэффициент:

$$\int\limits_0^\infty dr\, r \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\ \Omega_\varphi = 4\pi, \tag{7.1}$$

чтобы источник $\overline{\overline{s}}^{(3)}$ имел единообразный вид с §6,

$$\overline{\overline{s}}^{(3)} = -\delta(r-a)\delta_+(z). \tag{7.2}$$

[Следует писать $\delta(z) = \delta(\vec{z}) = \delta_+(z)/2$ в (7.2) в соответствии с общей формулой (4.3).] Теперь, вместо (2.11), вихреподобное 3D-решение перепишется в виде

$$\psi_3 = \frac{1}{\pi}\, r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha\, \frac{1}{R}\,,$$

где, напомним (3.7),

$$R = [r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha + z^2]^{1/2}.$$

Тогда, окончательно

★

Для нечетных $n \geq 3$ *функция*

$$\psi_n = \frac{1}{\pi}\, r \sum_{k=3}^{n}{}' \frac{(k-4)!!\,(n-k-1)!!}{(k-3)!!\,(n-k)!!} \times$$

$$\int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha\, \frac{z^{k-3}}{[r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha + z^2]^{(k-2)/2}}$$

удовлетворяет уравнению

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\psi_n = -\delta(r-a)\,\delta_+(z) \equiv \overline{\overline{s}}^{(n)}.$$

Четные n**.** В этом случае возникает та же самая проблема при выделении источников, что и в п. 6.2, однако она разрешается тем же способом и точным соответствием на каждом шаге вывода. Заметим только, что вместо решения (4.13b) уравнения (4.14b), мы должны использовать решение (3.25) уравнения (3.24) с источником $\propto \delta(r-a)$. Таким образом,

---

$\star$

Для $n=4$ *и всех четных* $n \geq 6$ *функции*

$$\psi_4 = \frac{1}{\pi}\, r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha\; \ln \frac{1}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{1/2}} \tag{7.3}$$

и

$$\psi_n = \frac{1}{\pi}\, r \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha\; \ln \frac{1}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{1/2}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\, r \sum_{k=6}^{n}{}'' \frac{1}{k-4} \int\limits_0^\pi d\alpha \cos\alpha\, \frac{z^{k-4}}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{(k-4)/2}}$$

соответственно есть решения уравнения

$$\overline{\overline{\Delta}}^{(n)}\psi_n = -\delta(r-a)\,[1-\Theta_+(z)] \equiv \overline{\overline{s}}^{(n)}.$$

7.1 Кольцевые решения к анти-z-лапласианам

Существуют еще решения анти-z-лапласовых уравнений, соответствующие кольцевым источникам, они во всем подобны решениям (6.6) и (5.13) и генерируются ими, преобразование $f_A^{(n+2,n)}$ действует и в этом случае. Добавим их к списку решений для сравнения с вихреподобными.

$\star$

Для нечетных n *функция*

$$\chi_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k=3}^{n}{}' \frac{(k-4)!!\,(n-k-1)!!}{(k-3)!!\,(n-k)!!} \int\limits_0^\pi d\alpha\, \frac{z^{k-3}}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{(k-2)/2}} \tag{7.4}$$

$(n \geq 3)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\overline{\Delta}_z^{(n)}\chi_n = -\frac{\delta(r-a)}{r}\,\delta_+(z),$$

тогда как для $n=4$ и четных $n \geq 6$ функции

$$\chi_4 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi d\alpha\ \ln \frac{1}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{1/2}} \tag{7.5}$$

и

$$\chi_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi d\alpha\ \ln \frac{1}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{1/2}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\ \sum_{k=6}^{n}{}'' \frac{1}{k-4}\int\limits_0^\pi d\alpha\, \frac{z^{k-4}}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{(k-4)/2}} \tag{7.6}$$

соответственно удовлетворяют уравнению

$$\overline{\Delta}_z^{(n)}\chi_n = -\frac{\delta(r-a)}{r}\,[1-\Theta_+(z)].$$

В обоих случаях с целью проверки выполнимости однородных уравнений $\overline{\Delta}_z^{(n)}\chi_n = 0$ для функций (7.4), (7.5) и (7.6) требуется интегральное тождество

$$\int\limits_0^\pi d\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{R^k} - k\,\frac{ar\sin^2\alpha}{R^{k+2}}\right) = \int\limits_0^\pi d\alpha\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{R^k}\right) = 0.$$

7.2 Тривиальные кольцевые решения к анти-r-лапласианам

До сих пор ничего не было сказано о решениях, соответствующих анти-r-лапласианам в nD-пространстве ($n>3$). Существенно отметить, что в данном случае нет разницы между нечетными и четными nD-решениями. nD-обобщение уравнения (2.4) есть

$$\overline{\Delta}_r^{(n)}\xi_n \equiv \left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\xi_n = -r\Omega_\varphi^{(n)}(r,z) \equiv \bar{s}_r^{(n)}. \tag{7.7}$$

Переопределим $\Omega_\varphi^{(n)}$ так, чтобы обобщить (7.1) на nD-пространство:

$$\int_{\tau^{(n)}} d\tau^{(n)}\,\Omega_\varphi^{(n)} = (n-2)\sigma_n, \tag{7.8}$$

где $d\tau^{(n)}$ дается (A.4), после этого источник в (7.7) приобретает вид

$$\bar{s}_r^{(n)} = -\sigma_{n-2}\delta(r-a)\,\delta(\vec{z}) = -\delta(r-a)\,\frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}}.$$

Ситуация очень простая. Решение строится подобно §2 при использовании соотношения (5.5) в декартовой системе координат z_1, z_2, $\ldots$, z_{n-2} (см. Приложение A), где следует записать $\delta(\vec{z}) = \delta(z_1)\delta(z_2)\ldots\delta(z_{n-2})$. Ответ —

$\star$

Для всех $n \geq 3$ функция

$$\xi_n = \frac{1}{\pi}\,r\int\limits_0^\pi d\alpha\cos\alpha\,\frac{1}{[r^2+a^2-2ar\cos\alpha+z^2]^{(n-2)/2}}$$

удовлетворяет уравнению

$$\overline{\Delta}_r^{(n)} \xi_n = -\delta(r-a)\, \frac{\delta_+(z)}{z^{n-3}} \,.$$

Мы видим, что это тривиальное nD-решение не имеет привлекательной асимптотики рассмотренных ранее, оно обладает типичным nD-поведением. Для законченности, введем также и анти-r-лапласову совокупность, B_n:

$$B_n = \{\xi_n,\ \overline{\Delta}_r^{(n)} \xi_n,\ \bar{s}_r^{(n)}\},$$

которая обладает свойством типа (4.19), т. е. в ней действует преобразование $f_L^{(n+2,n)}$, которое действовало в лапласовой совокупности:

$$B_{n+2} = f_L^{(n+2,n)} B_n.$$

8 Заключение

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1. Несомненно, все nD-решения уравнений, включающих анти-z-лапласиан или анти-дубль-лапласиан, в принципе могут быть получены с помощью процедуры, описанной в §2, а именно обращением к соотношениям (5.6) и (5.7) и сверткой фундаментального решения уравнения Пуассона с подобранным (пробным) источником. Однако этот путь ведет к большим техническим трудностям. В (r, z)-системе непосредственное интегрирование еще относительно просто для $n = 4$, как это было продемонстрировано в п. 6.2, но уже для $n = 5$ возникают промежуточные подынтегральные выражения, содержащие специальные функции с тригонометрическими функциями в роли аргументов, что выходит за рамки табличных интегралов. Трудности такого рода неизбежно должны возрастать при переходе ко все возрастающим n. Именно поэтому преобразование $f_A^{(n+2,n)}$ спасает ситуацию, — нет проблем в получении решений с произвольным (большим) n.

2. Все полученные здесь решения (или их подынтегральные выражения) имеют то преимущество, что они являются алгебраическими функциями от z и $\bar{R}$ (или R) плюс логарифмической функцией от $\bar{R}$ (или R) для четных n. В последнем случае возможно получить решения анти-z-лапласовых и анти-дубль-лапласовых уравнений с источником $\propto \delta_+(z)$ вместо $\propto 1 - \Theta_+(z)$. Однако такие решения задействуют обратные тригонометрические функции от r и z и не имеют замечательных асимптотических свойств, о которых шла речь. Заметим, что благодаря соотношениям (5.9b) и (5.9c) достаточно просто получить нечетномерные решения с источником $\propto \delta'_+(z)$, но это не входит в программу нашего исследования.

3. Нам было технически проще работать с анти-z-лапласианами в §6, чем с анти-дубль-лапласианами. — Намного проще получить явный вид точечного источника, чем кругового. Фактически мы нашли фундаментальные нечетномерные решения (6.6) соответствующих уравнений. Четномерные решения (6.17) могут быть названы только условно-фундаментальными, поскольку играют роль фундаментальных, пока дело касается только их интегрирования в 2D-пространстве. Вихреподобные решения в §7 могут быть получены теперь (со знанием источников) с помощью соотношений (5.7) для перехода от анти-z-лапласиана к анти-дубль-лапласиану и сверток этих (условно-)фундаментальных решений в 2D-пространстве, т. е. интегрированием по $d\tau^{(2)} = r dr d\varphi$ с кольцевым "источником"$\propto \delta(r - a)$ подобно процедуре, описанной в §2.

4. Подчеркнем, что не δ-образный 4D-источник не мог быть выделен посредством сверток с непрерывными функционалами, как это делалось в §4. Поэтому, для получения источников в последующих четных nD мы можем использовать только первый из предложенных в начале §6 способов: способ формальных преобразований.

5. Напомним еще раз, что переход от "лапласовой части"в операторах к "анти-лапласовой части"для какого-либо подпространства означает переход от скалярного объекта к другим геометрическим объектам. В следующей работе мы покажем, что анти-лапласианы имеют непосредственную связь с оператором ∇^2, примененным к векторным и поливекторным объектам в подпространствах nD-пространства. Однако уже здесь по аналогии с §2 ясно, что в случае $n = 4$ представленные решения, т. е.

функции (6.14) и (7.3), являются θ-компонентами векторов, ортогональных к радиальному направлению в 2D-пространстве. Для бо́льших n ситуация представляется более интригующей, поскольку задействуются уже компоненты $(n-3)$-поливекторов.

6. Вообще, не вполне ясно пока, что значит с точки зрения физики конечность (несингулярность) источника. Заметим, что "ну о-очень"красивые четномерные решения с 2D-асимптотикой было бы соблазнительно применить к описанию "свойств пространства"на больших масштабах, в соответствии со сказанным во Введении. Так, четномерное оно или нечетномерное? Или, смотря где? И что мы вообще знаем о пространстве, времени, материи? Эти категории могут быть зависимыми, например, мерность окружающего пространства в данном масштабе — определяться характером и распределением находящейся в нем материи. Но время разработки строгих концепций такого рода, по-видимому, еще не пришло, — пока можем строить только фантастические предположения. Трудно также удержаться от еще одной фантазии. Известно, что зачастую дифференциальные операторы соответствуют физическим величинам или геометрическим понятиям; таковы, например, операторы импульса и момента импульса в квантовой механике. Другой пример — дифференциальный орератор $\pounds_{\xi}$, производная Ли (см. например [19]), соответствует бесконечно малому сдвигу пространства на вектор $\vec{\xi}$. Но не существует ли какого-либо физического или геометрического соответствия оператору преобразования $f_L^{(n+2,n)}$ или $f_A^{(n+2,n)}$? Если бы удалось его найти, не означало бы это принципиальной возможности осуществить переход из nD-пространства в $(n+2)D$-пространство?

7. В данной работе мы изложили "горячие результаты"нашего исследования, поэтому и логика изложения следовала его естественному развитию и порядку получения результатов. В следующей работе мы намерены изложить геометрическую и физическую интерпертацию анти-лапласианов, в соответствии с которой дать их полное определение, включающее также угловые переменные в сферических системах координат. Мы приведем решения с угловыми переменными, которые обладают рядом интересных свойств в стиле изложенных. Мы также намерены заняться практически более значимым вычислением полей скоростей и сил из полученных функций тока и потенциалов соответственно.

Приложение А: x- и (r, z)-системы координат

В наших обозначениях nD-сферическая система координат задается радиальным расстоянием x и $n-1$ углами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Для краткости назовем ее x-системой, а угол λ_1 назовем старшим углом. Значения, принимаемые углами лежат в интервалах $0 \le \lambda_k \le \pi$ для $k = 1, 2, \ldots, n-2$ и $0 \le \lambda_{n-1} \le 2\pi$. (Для сравнения, в 3D $\lambda_1 = \theta$, а $\lambda_2 = \varphi$, причем $0 \le \theta \le \pi$ и $0 \le \varphi \le 2\pi$.)

Введенная x-система может быть соотнесена с nD-декартовой системой координат следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \lambda_1, \\ x_2 &= x \sin \lambda_1 \cos \lambda_2, \\ &\ldots, \\ x_{n-1} &= x \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \ldots \sin \lambda_{n-2} \cos \lambda_{n-1}, \\ x_n &= x \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \ldots \sin \lambda_{n-2} \sin \lambda_{n-1}. \end{aligned}$$

Метрику x-системы запишем в "свернутом"виде:

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + x^2 d\varsigma_1^2 \tag{A.1}$$

$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$, где

$$\begin{aligned} d\varsigma_1^2 &= d\lambda_1^2 + \sin^2\lambda_1 d\varsigma_2^2, \\ d\varsigma_2^2 &= d\lambda_2^2 + \sin^2\lambda_2 d\varsigma_3^2, \\ &\ldots, \\ d\varsigma_{n-2}^2 &= d\lambda_{n-2}^2 + \sin^2\lambda_{n-2}^2 d\varsigma_{n-1}^2, \\ d\varsigma_{n-1}^2 &= d\lambda_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Или, в компонентах,

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 1, \\ g_{\lambda_1\lambda_1} &= x^2, \\ g_{\lambda_2\lambda_2} &= x^2 \sin^2\lambda_1, \\ &\ldots, \\ g_{\lambda_{n-1}\lambda_{n-1}} &= x^2 \sin^2\lambda_1 \sin^2\lambda_2 \ldots \sin^2\lambda_{n-2}. \end{aligned}$$

Ковариантный элемент объема метрики (A.1) есть

$$d\tau^{(n)} = d\sigma_n x^{n-1} dx,$$

где

$$d\sigma_n = \sin^{n-2}\lambda_1 \sin^{n-3}\lambda_2 \cdots \sin \lambda_{n-2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \cdots d\lambda_{n-2}\, d\lambda_{n-1};$$

заметим, что $\int d\sigma_n = \sigma_n$ есть величина, определенная формулой (4.2).

Лапласиан для метрики (A.1) имеет вид

$$\Delta^{(n)} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} x^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sin^{n-2}\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \sin^{n-2}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{1}{\sin^2\lambda_1 \sin^{n-3}\lambda_2} \times \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \sin^{n-3}\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \frac{1}{\sin^2\lambda_1 \sin^2\lambda_2 \sin^{n-4}\lambda_3} \frac{\partial}{\partial \lambda_3} \sin^{n-4}\lambda_3 \frac{\partial}{\partial \lambda_3} +$$

$$\ldots + \frac{1}{\sin^2\lambda_1 \sin^2\lambda_2 \cdots \sin^2\lambda_{n-3}\sin^2\lambda_{n-2}}\,\frac{\partial^2}{\partial\lambda_{n-1}^2}\Bigg). \tag{A.2}$$

Введем теперь (r, z)-систему, которая является прямым произведением 2D- и $(n-2)$D-сферических систем с координатами r, φ и $z, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-3}$ соответственно. Все предыдущие величины могут быть построены mutatis mutandis из величин в x-системе. Декартову систему координат также представим как прямое произведение соответствующих 2D- и $(n-2)$D-систем:

$$\begin{array}{rcl}
r_1 &=& r\cos\varphi,\\
r_2 &=& r\sin\varphi,\\
z_1 &=& z\cos\theta_1,\\
z_2 &=& z\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&& \ldots\\
z_{n-3} &=& \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-4}\cos\theta_{n-3},\\
z_{n-2} &=& \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-4}\sin\theta_{n-3}.
\end{array}$$

Метрика (r, z)-системы есть сумма соответствующих метрик типа (A.1):

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 + z^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2(\ldots + \sin^2\theta_{n-4}d\theta_{n-3}^2)\ldots)). \tag{A.3}$$

Элемент объема для метрики (A.3) есть произведение соответствующих элементов:

$$d\tau^{(n)} = d\sigma_2 d\sigma_{n-2} r z^{n-3} dr\, dz, \tag{A.4}$$

где

$$\begin{array}{rcl}
d\sigma_2 &=& d\varphi,\\
d\sigma_{n-2} &=& \sin^{n-4}\theta_1 \sin^{n-5}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-4}\, d\theta_1\, d\theta_2 \cdots d\theta_{n-4}\, d\theta_{n-3}.
\end{array}$$

Дивергенция какого-либо вектора $\vec{v} = (v^r, v^\varphi, v^z, v^{\theta_1}\ldots, v^{\theta_{n-3}})$,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r v^r) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial v^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,(z^{n-3}v^z) +$$
$$\frac{1}{\sin^{n-4}\theta_1}\,\frac{\partial}{\partial\theta_1}\,(\sin^{n-4}\theta_1 v^{\theta_1}) + \frac{1}{\sin^{n-5}\theta_2}\,\frac{\partial}{\partial\theta_2}\,(\sin^{n-5}\theta_2 v^{\theta_2})$$
$$+ \ldots + \frac{1}{\sin\theta_{n-4}}\,\frac{\partial}{\partial\theta_{n-4}}\,(\sin\theta_{n-4}v^{\theta_{n-4}}) + \frac{\partial v^{\theta_{n-3}}}{\partial\theta_{n-3}}, \tag{A.5}$$

и лапласиан,

$$\Delta^{(n)} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{z^{n-3}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,z^{n-3}\,\frac{\partial}{\partial z} +$$
$$\frac{1}{z^2}\Bigg(\frac{1}{\sin^{n-4}\theta_1}\,\frac{\partial}{\partial\theta_1}\,\sin^{n-4}\theta_1\,\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^{n-5}\theta_2}\,\frac{\partial}{\partial\theta_2}\,\sin^{n-5}\theta_2\,\frac{\partial}{\partial\theta_2}$$
$$+ \ldots + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-5}\sin^2\theta_{n-4}}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-3}^2}\Bigg), \tag{A.6}$$

также являются суммами соответствующих дивергенций и лапласианов типа (A.2).

Приложение B: больше сведений об $a_{k,n}$

Коэффициенты $a_{k,n}$ могут быть представлены и в другой форме, эквивалентной (3.13):

$$a_{k,n} = \frac{(n-3)!!}{(n-4)!!}\,\frac{(k-4)!!\,(n-k-1)!!}{(k-3)!!\,(n-k)!!}\,. \tag{B.1}$$

Напомним, что $(-1)!! = 1$ и $0!! = 1$ по определению. Из вида (B.1) ясно, что коэффициенты $a_{k,n}$ обладают свойством симметрии

$$a_{k,n} = a_{n-k+3,n}, \tag{B.2}$$

в частности,

$$a_{n,n} = a_{3,n} = 1.$$

Помимо (3.12) существует еще одно рекуррентное соотношение при фиксированных k ($k \le n-2$):

$$a_{k,n} = a_{k,n-2}\,\frac{(n-3)(n-k-1)}{(n-4)(n-k)}\,,$$

которое позволяет быстро вычислить "треугольник"значений $a_{k,n}$. Мы приводим его здесь для первых семи нечетных n.

$n=3$	1						
$n=5$	1	1					
$n=7$	1	2/3	1				
$n=9$	1	3/5	3/5	1			
$n=11$	1	4/7	18/35	4/7	1		
$n=13$	1	5/9	10/21	10/21	5/9	1	
$n=15$	1	6/11	5/11	100/231	5/11	6/11	1
...				...			

Докажем теперь, что

$$\sum_{k=3}^{n}{}' a_{k,n} = \frac{(n-3)!!}{(n-4)!!}\,. \tag{B.3}$$

С этой целью введем коэффициенты $b_{k,n}$, которые отличаются от $a_{k,n}$ нормировкой:

$$a_{k,n} = \frac{(n-3)!!}{(n-4)!!}\,b_{k,n}, \tag{B.4}$$

$$b_{k,n} = \frac{(k-4)!!\,(n-k-1)!!}{(k-3)!!\,(n-k)!!}\,. \tag{B.5}$$

В соответствии с (B.3) и (B.4) нужно доказать, что

$$\sum_{k=3}^{n}{}' b_{k,n} = 1.$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = (-1)^m \binom{-1/2}{m},$$

см. [21], стр. 772, где, по определению,

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}\,. \tag{B.6}$$

Поскольку k и n нечетные числа, положим $k = 2l+1$ и $n = 2q+1$, после чего коэффициенты (B.5) можно представить в виде

$$b_{k,n} = \tilde{b}_{l,q} = (-1)^{q-1}\binom{-1/2}{l-1}\binom{-1/2}{q-l}.$$

В [21] приводится следующая формула суммирования для произвольных комплексных чисел a и b (см п.13 на стр. 616):

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}. \tag{B.7}$$

С помощью (B.7) можно вычислить значение следующей суммы:

$$\sum_{l=1}^{q}\binom{-1/2}{l-1}\binom{-1/2+\epsilon}{q-l} = \binom{-1+\epsilon}{q-1}. \tag{B.8}$$

Для вычисления искомой суммы коэффициентов необходимо получить (B.8) при $\epsilon = 0$. Однако при $\epsilon = 0$ пр. ч. (B.8) является неопределенным выражением, поэтому возьмем его предельное значение при $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\binom{-1+\epsilon}{q-1} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(q)\Gamma(1-q+\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(q-\epsilon)\Gamma(1-q+\epsilon)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sin\pi(q-\epsilon)}{\epsilon\,\pi} = (-1)^{q-1},\end{aligned}$$

где произведена допустимая замена $\Gamma(q)$ на $\Gamma(q-\epsilon)$ под знаком предела. Возвращаясь к искомой сумме,

$$\sum_{k=3}^{n}{}' \, b_{k,n} = \sum_{l=1}^{q}\tilde{b}_{l,q} = (-1)^{q-1}\lim_{\epsilon\to 0}\binom{-1+\epsilon}{q-1} = 1,$$

что завершает наше доказательство. Возможно, существует его более элегантный вариант, но он не был найден.

Приведем также "треугольник"значений $b_{k,n}$ (подобно предыдущему для $a_{k,n}$), поскольку именно коэффициенты $b_{k,n}$ входят в окончательные выражения для нечетномерных решений §6 и §7.

$n=3$	1						
$n=5$	1/2	1/2					
$n=7$	3/8	1/4	3/8				
$n=9$	5/16	3/16	3/16	5/16			
$n=11$	35/128	5/32	9/64	5/32	35/128		
$n=13$	63/256	35/256	15/128	15/128	35/256	63/256	
$n=15$	231/1024	63/512	105/1024	25/256	105/1024	63/512	231/1024
...				...			

Приложение C: список интегралов

Мы даем по [21] интегралы и формулу для суммирования, необходимые при выводах в §4 и §6.

1). С использованием п. 7 на стр. 91 ($n = 2q+1$)

$$\int dz\, \frac{z^{n-3}}{(\varepsilon^2+z^2)^{n/2}} =$$

$$\int dz\, \frac{z^{2(q-1)}}{(\varepsilon^2+z^2)^{q+1/2}} = \frac{z^{2q-1}}{(2q-1)\varepsilon^2(\varepsilon^2+z^2)^{q-1/2}}\,. \tag{C.1}$$

2). С использованием п. 6 на стр. 30 [$n = 2(m+2)$, $n = 4$ при $m = 0$]

$$\int dz\, \frac{z^{n-3}}{(\varepsilon^2+z^2)^{n/2}} =$$

$$\frac{1}{2}\int du\, \frac{u^m}{(\varepsilon^2+u)^{m+2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-\varepsilon^2)^{m-k}}{(m-k+1)(\varepsilon^2+u)^{m-k+1}}\,, \tag{C.2}$$

где обозначено $u = z^2$, и

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

есть стандартное выражение для биномиальных коэффициентов [ср. с (B.6), m и k – целые неотрицательные числа].

3). В выражении для суммы

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{m-k}}{m-k+1} =$$

$$\frac{(-1)^m}{m+1}\left[\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k} - (-1)^{m+1}\right] = \frac{1}{m+1} = \frac{2}{n-2}, \tag{C.3}$$

первый член в квадратных скобках обращается в нуль (см. стр. 606, п. 3).

Непосредственно используются нижеследующие табличные интегралы.

4). стр. 181, п. 5:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,, \tag{C.4}$$

5). стр. 414, п. 22:

$$\int_0^\pi \frac{dx\,\cos x}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{b}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right), \tag{C.5}$$

6). стр. 102, п. 8:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c)}\right|. \tag{C.6}$$

Литература

[1] M. Davis et al., *On the Virgo supercluster and the mean mass density of the Universe*, Astrophys. J., **238** (1980), pt. 2, L113–L116; Li-Zhi Fang & Wen Xu, *The flatness of the mass-to-light ratio on large scales*, Astrophys. J., **522** (1999), no. 2, pt. 2, L85–L88.

[2] A. D. Popova, *Friedmann cosmology in alternative spatial dimensions. Solutions and tests.*, Astron. & Astrophys. Trans., **8** (1995), no. 3, 165–194; A. D. Popova, B. G. Sidharth, *Is the Universe asymptotically spatially two dimensional*, Non Linear World (ed. W. De Gruyter, Berlin – New York), **4** (1997), no. 4, 493–504.

[3] А. Д. Попова, *Космологическое красное смещение как эффект уменьшения размерности времени в больших масштабах*, Ж. Мат. о-ва "Белка", **4** (1994), 1–9.

[4] G. T. Gillies, *The Newtonian gravitational constant: recent measurements and related studies*, Rep. Progr. Phys. (UK), **60** (1997), no. 2, 151–255.

[5] А. Д. Попова, *Квантовая космология: нужна ли?* в сб. *100 лет квантовой теории. История. Физика. Философия* (под ред. В. В. Казютинского, М.: "РИА-Природа", 2002).

[6] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, в 2-х т. (М.: "Мир", 1990).

[7] С. К. Чаттерджи, *Сокровенная мудрость Индии* (М.: "Сфера", 2001).

[8] Дж. Дж. Томсон, *Электричество и материя.* Приложение: В. Томсон, *О вихревых атомах* (М.–Л., Госиздат, 1928).

[9] А. К. Тимирязев, *Введение в теоретическую физику* (М.–Л.: ГТТИ, 1933).

[10] N. P. Kasterin, *On Sir J. J Thomson's model of a light-quantum*, Philosophical Magazine, ser.7, **2** (1926), no. 12, 1208–1212.

[11] Г. Ламб, *Гидродинамика* (М.: Гостеортехиздат, 1947).

[12] П. Аппель, *Руководство теоретической (рациональной) механики. т. 3. Равновесие и движение сплошных сред* (М.: 1911)

[13] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними* (М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958).

[14] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций* (М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958).

[15] A. D. Popova, *Impossible solutions?* E-print Archive *math-ph*/0010022.

[16] М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели* (М.: "Наука", 1977).

[17] Л. Милн-Томсон, *Теоретическая гидродинамика* (М.: "Мир", 1964).

[18] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. IV, ч. 2 (М.: "Наука", 1981).

[19] Я. А. Схоутен, *Тензорный анадиз для физиков* (М.: "Наука", 1965).

[20] Г. Корн и Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: "Наука", 1970).

[21] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков и О. И. Маричев, *Интегралы и ряды* (М.: "Наука", 1981).

Оглавление