

Аккреционные процессы в астрофизике

Глава 1

под редакцией Н. И. Шакуры

Авторы главы 1: Г. В. Липунова, К. Л. Маланчев, Н. И. Шакура

Оглавление

1	Стандартная модель дисковой аккреции	5
1.1	Введение	5
1.2	Уравнения дисковой аккреции	8
1.3	Вязкость в аккреционных дисках	13
1.3.1	Уравнения Рейнольдса. Тензор Рейнольдса	14
1.3.2	Проблема замыкания	17
1.3.3	Коэффициент турбулентной вязкости	18
1.3.4	Путь перемешивания	20
1.3.5	Параметр турбулентной вязкости α	22
1.4	Тонкие диски	25
1.4.1	Уравнения радиальной структуры	25
1.4.2	Решение при постоянном темпе аккреции	26
1.4.3	Радиальная скорость вещества в тонком диске	27
1.4.4	Аккреция на черную дыру в первом приближении	29
1.4.5	Аккреция на черную дыру	31
1.4.6	Логарифмический потенциал	34
1.4.7	Энерговыделение в геометрически тонких дисках	40
1.4.8	Излучение диска	44
1.5	Стационарные α -диски	46
1.5.1	Уравнения вертикальной структуры	48
1.5.2	Решение вертикальной структуры	52
1.5.3	Радиальные зависимости физических параметров в стационарных α -дисках	59
1.6	Нестационарная дисковая аккреция	71
1.6.1	Основное уравнение нестационарной аккреции	71
1.6.2	Решения линейного уравнения вязкой эволюции диска	73
1.6.3	Эволюция вязкого диска неограниченного размера	74

1.6.4	Решение для диска с фиксированным внешним радиусом	78
1.6.5	Решения нелинейного уравнения эволюции вязкого α -диска	83
1.6.6	Эволюция α -диска из кольца вещества	88
1.6.7	Решение для α -диска в двойной системе	100
1.7	Численное моделирование нестационарной дисковой аккреции	113
1.7.1	Решение уравнения вязкой эволюции	113
1.7.2	Решение уравнений вертикальной структуры	121
1.7.3	Пример численного моделирования кривой блеска рентгеновской Новой типа FRED	124
1.8	Дополнение. О выводе уравнений дисковой аккреции	136
1.8.1	Уравнения в цилиндрических координатах	139
1.8.2	Уравнение сохранения энергии	142
1.9	Самооблучение диска	149
1.10	Неконсервативный диск	152
1.11	Уточненная связь между ν_t и α	155

Список иллюстраций

1.1	Координаты в плоском потоке	19
1.2	Иллюстрация “сжатия” элемента расстояния вдоль радиуса неподвижного наблюдателя	33
1.3	Момент импульса h и момент вязких сил $F(h)$ в стационарном диске	39
1.4	Форма спектра аккреционного диска	45
1.5	Коэффициент непрозрачности	54
1.6	Граничные условия для нахождения вертикальной структуры	57
1.7	Вертикальная структура диска	58
1.8	Безразмерные факторы Π_z , Π_Σ , Π_ρ и Π_T	65
1.9	Радиальные зависимости в стационарном α -диске	68
1.10	Радиальные зависимости в стационарном α -диске	69
1.11	Функция Грина неограниченного диска	77
1.12	Функция Грина ограниченного диска	81
1.13	Кривые блеска рентгеновских новых типа FRED	84
1.14	Момент вязких сил в нестационарном диске	89
1.15	Фазовый портрет уравнения для определения автомодельной функции в решении для нестационарного диска на первой стадии	93
1.16	Профиль $F(h)$ в решении Любарского–Шакуры	95
1.17	Профиль $F(h)$ в решении Любарского–Шакуры на стадиях формирования языка и квазиастационарной аккреции	96
1.18	Иллюстрация распределения момента вязких сил в диске в двойной системе	102
1.19	Радиальная зависимость момента вязких сил для двух режимов непрозрачности для диска в двойной системе	103

- 1.20 Боллометрическая светимость нестационарного α -диска с постоянным внешним радиусом 110
- 1.21 Сравнение кривых блеска в разных рентгеновских диапазонах 111
- 1.22 Моделирование вспышек двух двух рентгеновских новых . 112
- 1.23 Угловое распределение интенсивности излучения диска вокруг керровской черной дыры 114
- 1.24 Узлы, которые используются для написания n -го уравнения системы 1.210 в различных схемах. Нами используется неявная схема. 118
- 1.25 Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в фотометрической полосе В. Кружками отмечены данные наблюдений [121, 122], сплошной линией — модельная кривая блеска. 125
- 1.26 Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в диапазоне 3–6 кэВ. Вертикальными линиями показаны данные спутника Ariel 5 с ошибками [123], сплошной линией — модельная кривая блеска. 126
- 1.27 Иллюстрация геометрии самооблученного диска 151

Список таблиц

1.1	Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для томсоновской непрозрачности	60
1.2	Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для непрозрачности по Крамерсу	61
1.3	Параметры функции Грина для нестационарного диска . .	83
1.4	Безразмерные параметры в уравнениях нестационарной аккреции	88
1.5	Значения параметров аналитического решения в ограниченном α -диска	105

Глава 1

Стандартная модель дисковой аккреции

Липунова Г. В., Маланчев К. Л., Шакура Н. И.

1.1 Введение

Теория аккреционных дисков имеет чрезвычайно широкую область применения в астрофизике — она используется при изучении ярких источников излучения в широком диапазоне спектра в нашей Галактике, центральных ярких областей других активных галактик, протозвезд и зарождающихся планетных систем, релятивистских струй от компактных объектов, самых ярких источников во Вселенной — гамма-всплесков и так далее.

Основу теории стандартной дисковой аккреции составляют работы Шакуры 1972 г. [1] и Шакуры и Сюняева 1973 г. [2]. Среди более ранних работ необходимо отметить статьи Горбацкого [3], Линден–Белла [4], и Прингла и Риса [5]. Развитие теории и описание многообразия процессов, сопровождающих дисковую аккрецию, можно найти в книгах Като и др. [6] и Франка и др. [7], в обзоре Абрамовича и Фраджайла [8]. Галактические диски, диски в протозвездных и протопланетных системах, в тесных двойных звездах рассматриваются в книге Морозова и Хоперкова [9]. Бисикало и др. [10] исследуют газодинамику переноса вещества в тесной двойной системе. Краткий и емкий обзор стандартной теории

дисковой аккреции, а также аспектов, касающихся дисков в карликовых и рентгеновских новых, можно найти в работе Лазоты [11].

В данной главе мы рассмотрим основные свойства стационарных и нестационарных аккреционных дисков в рамках стандартной модели, упоминая некоторые эффекты общей теории относительности. Мы выведем основные уравнения, описывающие нерадиальное падение вещества в астрофизических условиях, когда эффекты вязкого трения приводят к нагреву вещества и излучению тепловой энергии, которая наблюдается астрономическими инструментами на огромных расстояниях.

Диски образуются вокруг звезд в результате захвата гравитационным полем звезды вещества, обладающим ненулевым моментом импульса. Это может быть вещество межзвездной среды или горячая плазма, переходящая с соседней звезды. Если вращение вещества происходит преимущественно в одной плоскости, то такая структура называется аккреционным диском. В результате перераспределения момента импульса вещество приближается к центральному телу, а его гравитационная энергия высвобождается. Эта энергия переходит в кинетическую энергию убывающего к центру вращения и в тепловую энергию плазмы. Если тепловая энергия эффективно излучается, диск имеет довольно малую относительную толщину.

В этой главе мы рассмотрим в рамках стандартной модели геометрически тонкие, плоские аккреционные диски. У геометрически тонкого диска полутолщина в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии, много меньше расстояния от данной точки до центра. Если геометрически тонкий диск имеет оптическую толщину много больше единицы в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии, то уравнение энергетического баланса записывается в довольно простом виде. При этом фотоны много раз поглощаются и рассеиваются, прежде чем покинуть диск, и применимо условие локального термодинамического равновесия. Кроме того, в геометрически тонких дисках можно пренебречь радиальной адвекцией (переносом тепла с веществом по радиусу). Условие локально термодинамического равновесия предполагает равенство температуры электронной и ионной компонент плазмы. В стандартных моделях также не рассматривается потеря массы с поверхностей диска, — вещество покидает диск исключительно через его внутреннюю границу. В реальности, точнее, в современной, во многом согласованной картине астрофизических дисков, эти предположения выполняются на значительном расстоянии от центра диска.

Важно отметить, что процесс аккреции идет благодаря вязкости, обусловленной турбулентными движениями вещества в диске. Характерное время изменения радиальной структуры диска называют характерным вязким временем. Вязкое время связано со скоростью радиального движения вещества. В рамках стандартных уравнений аккреционных дисков, о которых речь пойдет в данном разделе, характерное вязкое время τ_{vis} много больше “динамического” времени τ_{dyn} , определяемого скоростью орбитального вращения. Далее, вязкое время также много больше “гидростатического” времени τ_{hyd} , за которое толщина диска меняется из-за изменения давления, и много больше “теплового” времени τ_{th} , то есть характерного времени излучения запасенной тепловой энергии и изменения температуры:

$$\tau_{\text{vis}} \gg \tau_{\text{dyn}}; \quad \tau_{\text{vis}} \gg \tau_{\text{hyd}}; \quad \tau_{\text{vis}} \gg \tau_{\text{th}}.$$

Как у звезды, структура равновесного диска зависит от его светимости. В широком интервале значений темпов аккреции светимость диска пропорциональна темпу, с которым поступает вещество. Существует критическое значение светимости, при приближении к которому эффекты давления излучения начинают играть решающую роль в формировании структуры диска. Это так называемый эддингтоновский предел светимости. Так же, как и для звезд, он определяется из условия равенства силы давления излучения и силы гравитационного притяжения, действующей на протон, в случае сферической симметрии:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4 \pi c G M m_p}{\sigma_T} \approx 1.3 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ эрг/с}. \quad (1.1)$$

Используются следующие обозначения: G — универсальная гравитационная постоянная, M — масса центрального тела, $M_\odot \approx 2 \times 10^{33}$ г — масса Солнца, m_p — масса протона, σ_T — сечение томсоновского рассеяния на свободных электронах. Применяя соотношение для эффективности излучения в процессе аккреции $L = \eta_{\text{accr}} \dot{M} c^2$, получаем критический темп аккреции в диске $\sim 10^{-8} M_\odot/\text{год}$:

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{4 \pi G M}{c \eta_{\text{accr}} \kappa_T} \approx 1.4 \times 10^{18} \frac{M}{M_\odot} \text{ г/с},$$

где мы подставили КПД аккреции $\eta_{\text{accr}} = 1/10$ (в ньютоновской метрике для диска с внутренней границей на радиусе $6 G M/c^2$ КПД аккреции

$\eta_{\text{accr}} = 1/12$) и удельное сечение томсоновского рассеяния $\kappa_T \approx 0.4 \text{ см}^2/\text{г}$. Часто в моделях дисков темпы аккреции нормируют на это значение. Оно, однако, является лишь примерной оценкой темпа аккреции, при котором и выше которого конфигурация диска определяется давлением излучения. Приближение тонкого диска перестает выполняться в области, размер которой по радиусу пропорционален темпу аккреции. В этой области может происходить истечение вещества с поверхности диска.

Различные неустойчивости могут возникать в аккреционных дисках и при темпах аккреции меньше критического. Например, при температурах и плотностях, соответствующих условиям рекомбинации ионов плазмы, развивается ионизационно-тепловая неустойчивость, в результате которой на масштабе теплового времени происходит перестройка вертикальной структуры диска [12]. Эта неустойчивость приводит, в частности, к вспышкам в карликовых новых. Вблизи центра диска, если давление излучения превосходит давление вещества, развиваются вязкая (векковая) и тепловая неустойчивости [13, 14, 15]. Тем не менее, есть значительный диапазон темпов аккреции, при которых структуру аккреционных дисков можно рассматривать в квазистационарном приближении.

1.2 Уравнения дисковой аккреции

При рассмотрении геометрически тонких дисков, удобно работать в цилиндрических координатах (r, φ, z) . Предполагаем, что в аккреционных дисках сохраняется аксиальная симметрия. Следствием этого в уравнениях будет обнуление производных по φ . Для толстых дисков или для одновременного исследования структуры вещества, истекающего с поверхности диска, используют сферическую систему координат.

Важное замечание Исторически так сложилось, что в стандартной теории дисковой аккреции, как мы ее излагаем вслед за работой [2], тензор вязких напряжений часто записывается как физически положительная величина. Далее в главе 1 эта величина встречается с обозначением $w_{r\varphi}^t = -w_{r\varphi}$.

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах при аксиальной симметрии имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения движения

Уравнения движения в цилиндрических координатах в случае аксиальной симметрии записываются как:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + N_r, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = N_\varphi, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + N_z, \quad (1.5)$$

где Φ — гравитационный потенциал, P — давление, N_r , N_φ , N_z — компоненты вязкой силы \mathbf{N} , действующей на единичную массу. Запишем компоненты \mathbf{N} в случае аксиальной симметрии:

$$\rho N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r w_{rr}) - \frac{w_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial w_{rz}}{\partial z}, \quad (1.6)$$

$$\rho N_\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 w_{\varphi r}) + \frac{\partial w_{\varphi z}}{\partial z}, \quad (1.7)$$

$$\rho N_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r w_{zr}) + \frac{\partial w_{zz}}{\partial z}, \quad (1.8)$$

где w_{ik} — компоненты тензора вязких напряжений. Выпишем эти ком-

поненты для аксиально-симметричного течения:

$$w_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.9)$$

$$w_{r\varphi} = w_{\varphi r} = \eta \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right], \quad (1.10)$$

$$w_{rz} = w_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \quad (1.11)$$

$$w_{\varphi\varphi} = 2\eta \frac{v_r}{r} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.12)$$

$$w_{\varphi z} = w_{z\varphi} = \eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \quad (1.13)$$

$$w_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.14)$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Здесь η — динамический коэффициент сдвиговой вязкости, обусловленной относительным движением слоев в веществе, ζ — коэффициент второй вязкости [16]. В дальнейшем мы не будем учитывать вторую вязкость.

Для тонкого аккреционного диска из всех компонент тензора вязких напряжений только $w_{r\varphi}$ является существенной. В результате имеем:

$$\rho N_\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_{r\varphi}), \quad (1.15)$$

$$w_{r\varphi} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\varphi}{r} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad (1.16)$$

где $\omega = v_\varphi/r$ — угловая скорость вращения вещества в диске.

Будем рассматривать тонкие стационарные диски, для которых в уравнениях движения (1.3–1.5) частные производные по времени обращаются в ноль.

Для таких дисков основными по величине членами уравнения (1.3) являются v_φ^2/r и градиент гравитационного потенциала. Для ньютоновского гравитационного потенциала $\Phi = -GM/r$, считая, что самогравитацией диска можно пренебречь, получаем кеплеровский закон:

$$\omega_K = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (1.17)$$

При этом силы давления и трения в тонком диске являются величинами следующего порядка малости.

Уравнение движения по φ

$$\rho v_r r \frac{\partial \omega r^2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w_{r\varphi}) \quad (1.18)$$

представляет собой закон сохранения момента импульса.

В направлении перпендикулярном плоскости диска выполняется гидростатическое равновесие, при котором вертикальная компонента силы тяжести уравновешена вертикальным градиентом давления. Из уравнения (1.5) имеем:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{G M}{r^3} z. \quad (1.19)$$

Уравнение сохранения энергии Уравнение сохранения энергии в общем случае записывается следующим образом [16, 17]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \left[(E + P) \mathbf{v} - (\mathbf{v} w_{ik}) + \mathbf{F}_{\text{th}} \right] = \rho \epsilon_{\text{mass}}, \quad (1.20)$$

где $E = \rho (e + v^2/2 + \Phi)$ — сумма тепловой, кинетической и потенциальной энергии в единице объема. Под знаком дивергенции стоит плотность потока энергии в среде и учтен поток энергии, связанный с работой сил давления ($P\mathbf{v}$) и вязкости ($-\mathbf{v} w_{ik}$) по поверхности рассматриваемого единичного объема. Например, в тонком плоском диске этот поток энергии радиален и равен ($-v_\varphi w_{r\varphi}$). Вектор \mathbf{F}_{th} включает другие потоки тепловой энергии: радиационные, кондуктивные, конвективные. В тонком диске основной вклад дает F_z , который включает в себя радиационный поток, переносящий энергию к излучающей поверхности диска. В общем случае можно учитывать и другие объемные источники или потери энергии: например, в результате ядерных реакций, джоулевой диссипации или охлаждения оптически-тонкой среды излучением; тогда ϵ_{mass} — темп такого нагрева или охлаждения в расчете на единицу массу.

Диссипация энергии

Рассмотрим изменение кинетической энергии в потоке, выражая полную производную скорости с помощью уравнения Навье-Стокса (уравнения (1.3)–(1.5)):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{N} \right). \quad (1.21)$$

Вычитая это выражение из уравнения для изменения полной энергии (1.20) и используя первый закон термодинамики

$$Tds = de + P d\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где s — удельная энтропия, получаем уравнение теплового баланса:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \varepsilon + \rho \epsilon_{\text{mass}} - \text{div} \mathbf{F}_{\text{th}}, \quad (1.22)$$

при постоянном во времени Φ , где

$$\varepsilon = w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (1.23)$$

— энергия, диссипирующая в единице объема в единицу времени из-за вязкости (суммирование по индексам).

В цилиндрических координатах, в осесимметричном течении:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \eta \left[4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \eta \left(\frac{\partial v_r}{r \partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2. \quad (1.24) \end{aligned}$$

В тонких аккреционных дисках v_φ значительно превосходит остальные компоненты скорости. Учтем, что v_φ не меняется по z . Тогда доминирующая составляющая в диссипации энергии имеет вид

$$\varepsilon = w_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 = \eta r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2. \quad (1.25)$$

Источник энергии в диске Главным источником энергии, которая диссипирует в диске из-за трения и которая, в принципе, может быть излучена, является высвобождаемая энергия потенциального взаимодействия при постепенном продвижении вещества к гравитирующему телу. Проиллюстрируем этот факт для тонкого кеплеровского диска.

Учитывая выражения (1.7), (1.10) и (1.25), можно показать, что в тонком диске выполняется тождество

$$\rho v_\varphi N_\varphi + \varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi w_{r\varphi}). \quad (1.26)$$

Для записи $\rho v_\varphi N_\varphi$ используем уравнение (1.21). Пусть масса центрального тела и задаваемый ею гравитационный потенциал не меняются во времени. Получим

$$\rho v_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\varphi w_{r\varphi})}{\partial r} - \varepsilon. \quad (1.27)$$

Здесь мы опустили слагаемое $v_r \partial P / \partial r$, которое в кеплеровском диске является малым по сравнению с другими, то есть мы пренебрегаем работой, совершаемой силами давления.

Итак, энергия гравитационного взаимодействия, выделяемая по мере приближения вещества к центру, переходит в кинетическую энергию орбитального движения, перераспределяется по диску из-за работы вязких сил, переносящих момент импульса, и тратится на нагрев [15, 18].

1.3 Вязкость в аккреционных дисках

Ключевая гипотеза моделей аккреционных дисков заключается в турбулентной природе их вязкости [1, 2, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Значения коэффициентов молекулярной вязкости, полученные из исследований свойств жидкостей и газов не могут объяснить наблюдаемые свойства астрофизических дисков. Необходимый темп переноса массы к центру диска и сопутствующий ему перенос момента импульса наружу могут быть объяснены только при больших значениях вязкости вещества диска, на много порядков превышающих молекулярную вязкость. Турбулентное движение вещества может приводить к значительным напряжениям $w_{r\varphi}$ в диске. Более того, число Рейнольдса в астрофизических дисках очень велико, и это само по себе может служить основанием для развития сильной турбулентности вне зависимости от конкретных механизмов ее возникновения.

Дифференциальное вращение кеплеровских газовых дисков считается основным источником их турбулизации. Как показано в главе ??, в тонких ламинарных кеплеровских дисках имеет место вязко-конвективная неустойчивость, в результате которой в дисках может возникать турбулентность.

Перенос момента импульса мелкомасштабными магнитными полями в аккреционных дисках был предложен в работе [2]. В конце 1950-х — начале 1960-х годов Е. П. Велихов [26] и С. Чандрасекар [27] открыли

МГД-неустойчивость в сдвиговых течениях с угловой скоростью, падающей наружу при наличии затравочного полоидального магнитного поля. Важность этой неустойчивости для аккреционного диска была показана в расчетах Бальбуса и Хаули (см. обзоры [22, 28]). Дискковая аккреция с магнитными полями рассматривалась во многих работах (см., например, [29, 30, 31, 32, 33]).

На современном этапе развития теории нет единого мнения по поводу вида записи вязких напряжений в вязком потоке. Большинство исследователей используют концепцию α -вязкости [1, 2].

В § 1.2 полагалось, что выведенные уравнения описывают средние крупномасштабные движения газа. Турбулентность появляется в результате перехода части энергии крупномасштабных движений в энергию случайных возмущений меньших масштабов. Такие хаотические движения среды в общем случае имеют очень сложную структуру, и их индивидуальное описание не представляется возможным. Численное решение этих нелинейных уравнений не может быть достигнуто в настоящее время ввиду непомерных вычислительных затрат, необходимых для такой задачи. Аналитическое решение неограниченной задачи с гладкими начальными условиями также не получено; решение уравнения Навье–Стокса является одной из семи задач тысячелетия, оглашенных в 2000 г. Математическим институтом Клэя [34]. В прикладных задачах используют, в основном, методы, основанные на различных приближениях, например метод осреднения по Рейнольдсу, метод крупных вихрей [35].

1.3.1 Уравнения Рейнольдса. Тензор Рейнольдса

Рейнольдс предложил разложить гидродинамические поля реальных сред на две составляющие — усредненные поля и пульсационные (хаотические) поля, и после этого провести осреднение уравнений. Например, для компоненты скорости положим $v_i = \bar{v}_i + v'_i$, для давления $p = \bar{p} + p'$ и т.д. Средние поля являются всегда гладкими и медленно меняющимися. Пульсационные поля являются хаотическими и в пространстве и во времени. Отметим, что в остальных разделах мы будем обозначать локальную осредненную плотность турбулизованного вещества через ρ без черты сверху.

Осреднение уравнений Навье–Стокса при соблюдении правил, предложенных Рейнольдсом, приводит к уравнениям движения для осредненных величин — уравнениям Рейнольдса. При этом метод осредне-

ния не имеет решающего значения, это может быть временное усреднение, пространственное, теоретико-вероятностное осреднение по статистическому ансамблю с привлечением гипотезы эргодичности¹. Временные и пространственные средние величины сходятся к теоретико-вероятностным средним значениям, если случайный процесс стационарный и пространственно-однородный. Второе условие всегда является математической идеализацией. На практике приходится говорить лишь об однородности в некоторой ограниченной области пространства и времени. Общим условием сходимости усредняемых по времени или пространству значений к теоретико-вероятностным средним значениям является условие эргодичности.

Выпишем уравнение Навье–Стокса в тензорных обозначениях:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = f_i - \frac{\partial (P \delta_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.28)$$

где f_i — компоненты внешней силы, действующей на единичный объем вещества.

Для несжимаемой жидкости ($\rho = const$) мы воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial (v_i v_k)}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k},$$

в частности, заменим второе слагаемое слева в (1.28) на $\partial(v_i v_k)/\partial x_k$.

Проведем осреднение по правилам Рейнольдса ([36], Глава 2), часть которых выглядит следующим образом:

$$\overline{f'} = 0, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}, \quad \overline{v_i \cdot v_k} = \overline{v_i} \cdot \overline{v_k} + \overline{v'_i \cdot v'_k}.$$

Переноса массы в среднем движении за счет турбулентности не происходит: $\overline{\rho v'_i} = 0$.

В осредненном уравнении Рейнольдса, из-за нелинейности исходного уравнения, обнаруживаем появление дополнительного члена, зависящего

¹При вероятностном осреднении рассматривается совокупность гидродинамических течений для одинаковых граничных условий. Подразумевается, что гидродинамические поля турбулентного течения (физические величины как функции времени и координаты, описывающие движение среды в некоторой области пространства) представляют собой случайные поля в смысле, принятом в теории вероятностей. Каждая конкретная реализация такого поля характеризуется своей вероятностной мерой [36].

го от пульсационного поля скорости (со штрихом):

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i v_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial (\overline{v'_i v'_k})}{\partial x_k} \right) = \bar{f}_i - \frac{\partial (\bar{P} \delta_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{w_{ik}}}{\partial x_k}.$$

Чтобы выяснить смысл последнего члена, рассмотрим осредненный по времени поток импульса:

$$\overline{\Pi_{ik}} = \bar{P} \delta_{ik} + \rho \overline{v_i v_k} - (\overline{w_{ik}} - \rho \overline{v'_i v'_k}). \quad (1.29)$$

Первые два слагаемые справа отвечают за обратимый (механический) перенос импульса средним движением. Мы видим, что для турбулентного движения тензор вязких напряжений, зависящий от свойств среды, дополняется членом, связанным с хаотическими течениями (в скобках). Таким образом, турбулентные движения приводят к обмену импульсом между объемами жидкости, и влияние турбулентного перемешивания аналогично вязкости. Следующая запись уравнений Рейнольдса подчеркивает эту трактовку:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = \frac{\bar{f}_i}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{P} \delta_{ik})}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{v'_i v'_k} \right). \quad (1.30)$$

Здесь использовано выражение тензора вязких напряжений в несжимаемой жидкости $w_{ik} = \eta (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i)$ (см., например, главу 2 в [16]) и применено условие несжимаемости жидкости.

Величина

$$R_{ik} = -\rho \overline{v'_i v'_k} \quad (1.31)$$

называется тензором турбулентной вязкости Рейнольдса. Вид этого члена неизвестен и для решения уравнений Рейнольдса приходится делать предположения, в той или иной степени эмпирически обоснованные. Главная проблема феноменологической теории турбулентности состоит в нахождении неизвестных турбулентных потоков (потока импульса для приведенных выше уравнений) через осредненные параметры состояния среды — это так называемая проблема замыкания.

Сжимаемая жидкость Для случая сжимаемой жидкости вместо осреднения Рейнольдса используется весовое осреднение, предложенное

Фавром [37]. Средневзвешенная скорость равна $\tilde{v}_i = \overline{\rho v_i} / \bar{\rho}$, где черта над величиной означает осреднение Рейнольдса (временное осреднение). Скорость потока тогда представляется как сумма взвешенно-осредненной и пульсационной (по Фавру) скоростей: $v_i = \tilde{v}_i + v_i''$. Теперь $\overline{v_i''} \neq 0$ (усреднение по ансамблю) при $\tilde{v}_i'' = 0$ (средневзвешенное усреднение, усреднение по ансамблю), но по-прежнему турбулентные движения не приводят к переносу массы, $\overline{\rho v_i''} = 0$ (см., например, [25], глава 3).

После такого представления гидродинамических функций и осреднения по времени уравнения Навье–Стокса при $\rho \neq const$ получается уравнение движения, которое также можно записать в компактной форме, аналогичной (1.30), но дополнительный член, который соответствует турбулентной вязкости, оказывается более сложного вида:

$$R_{ik}^* = -\overline{\rho v_i'' v_k''} + \eta \left(\frac{\partial \overline{v_i''}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k''}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \overline{v_k''}}{\partial x_k} \right). \quad (1.32)$$

При этом игнорируются флуктуации коэффициента молекулярной вязкости η . Таким образом, если происходят флуктуации плотности в среде, то тензор вязкости не разделяется на две составляющие — зависящую только от свойств среды (вязкости η и осредненной \tilde{v}_i ламинарного течения) и зависящую только от турбулентной динамики потока (члены с пульсационной скоростью). На практике ожидается, однако, что в последнем выражении второе слагаемое, включающее молекулярную вязкость, окажется много меньше первого [38].

1.3.2 Проблема замыкания

Вид тензора Рейнольдса не может быть найден из гидродинамических уравнений. Вторые моменты $\overline{v_i' v_k'}$ можно выразить через моменты третьего и более высоких порядков ($\overline{v_i' v_j' v_k'}$ и т.д.), но число неизвестных всегда будет больше числа уравнений. Невозможность получить замкнутую систему уравнений для конечного числа моментов гидродинамических полей является следствием нелинейности уравнений гидродинамики. В случае весового осреднения, задача еще больше усложняется ([25], глава 3).

Необходимость решения практических задач привела к тому, что было проведено большое число экспериментов с турбулентными течениями.

На базе этих исследований строились полуэмпирические теории турбулентности, которые систематизировали полученные результаты.

Важные шаги в этом направлении были сделаны Буссинеском (конец XIX века), Тэйлором, Прандтлем и Карманом в 20-е и 30-е годы XX века. Полуэмпирические теории турбулентности строятся на основе аналогии между турбулентностью и молекулярной вязкостью. Применение самых простых теорий позволяет замкнуть уже самые первые уравнения гидродинамических полей — для низших моментов (уравнения Рейнольдса). В результате уравнения Рейнольдса могут решаться при выражении R_{ik} через некие крупномасштабные характеристики потока. Эти характеристики описывают передачу тепла и импульса через турбулентную среду. Крупномасштабные характеристики турбулентности существенно зависят от геометрии границ потока и характера внешних воздействий, которые весьма различны в разных ситуациях. Поэтому, с одной стороны, говорят о неоднозначности полуэмпирических замыкающих соотношений. С другой стороны, использование более сложных замыкающих соотношений не приводит ни к более общим решениям, ни к уточнению решений. Таким образом, очень часто предпочтение отдается простым моделям, и одновременно решается задача о границах применимости конкретных полуэмпирических теорий турбулентности (см. [25], § 1.1.6).

1.3.3 Коэффициент турбулентной вязкости

Уравнения Рейнольдса могут быть решены только при дополнении их замыкающими соотношениями, которые связывают упомянутые величины и усредненные характеристики гидродинамического потока (давление, плотность, температура, средняя скорость). Так строятся полуэмпирические модели турбулентности. Большинство из них основаны на градиентной гипотезе Буссинеска (1897) о том, что существует линейная связь между турбулентным тензором вязкости и тензором сдвига, который является линейной комбинацией членов $\partial \bar{v}_j / \partial x_i$ при наличии некоторых локальных коэффициентов пропорциональности (коэффициентов турбулентного переноса). Однако необходимо сделать конкретные предположения об этих коэффициентах.

Рассмотрим малую площадку внутри турбулентного потока (Рис. 1.1). Считаем ее плоской и положим, что осредненное движение направлено вдоль этой площадки (вдоль оси x). Пусть площадка лежит в плоскости $z = 0$. Сила трения, приходящаяся на единицу площади, направленная

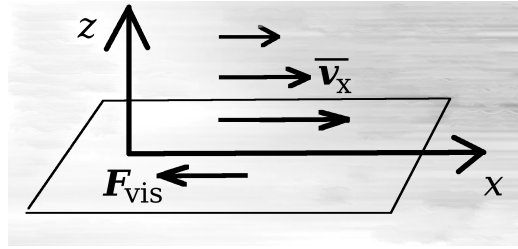


Рис. 1.1: Координаты в плоском потоке.

вдоль оси x , будет равна:

$$\overline{w_{xz}} - \rho \overline{v'_x v'_z} = \rho \nu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} - \rho \overline{v'_x v'_z}.$$

Согласно так называемой градиентной гипотезе Буссинеска между вязкими и турбулентными потоками импульса имеется аналогия и можно положить

$$-\rho \overline{v'_x v'_z} = \rho \nu_t \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z}, \quad (1.33)$$

вводя коэффициент пропорциональности ν_t . Такой подход, если известен кинематический коэффициент турбулентной вязкости ν_t , заменяющий обычный коэффициент молекулярной вязкости, позволяет решать уравнения Рейнольдса обычными методами. Коэффициент турбулентной вязкости не может быть выведен из микроскопических соображений.

Градиентная модель хорошо работает для квазистационарных течений. Предполагается, что в структуре развитой турбулентности установилось локальное равновесие, при котором характеристики турбулентности в каждой точке потока целиком определяются локальными характеристиками поля осредненного течения вблизи этой точки, а также локальными осредненными параметрами состояния самой среды.

Обычно ν_t значительно превосходит ν по величине. Коэффициент турбулентной вязкости, в отличие от коэффициента молекулярной вязкости, описывает не физические свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения. Его величина зависит от способа усреднения по ансамблю аналогичных течений. Полуэмпирическая модель турбулентности может быть построена, если ν_t оценивается в ходе экспериментов. Например, известно, что для случая движения турбулентного потока в плоском канале ν_t не может быть постоянной величиной, так как опытным путем устанавливается, что вблизи стенок

$\nu_t \rightarrow 0$. А в турбулентном пространственно-неограниченном потоке зачастую вполне обоснованно положить, что $\nu_t = const$ (см. § 5.8 в [36]).

Таким образом, мы перешли от неизвестного тензора Рейнольдса к коэффициенту турбулентной вязкости, который тоже неизвестен. Выбор его представляет собой отдельную задачу, для решения которой, в свою очередь, были предложены другие полуэмпирические теории. В них, в частности, используется понятие пути перемешивания. Это понятие играет важную роль в теории турбулентной вязкости аккреционных дисков.

1.3.4 Путь перемешивания

Введенное Прандтлем (1925) в теорию турбулентности понятие пути перемешивания позволяет не только просто выразить через длину пути перемешивания коэффициенты турбулентного обмена (в частности, коэффициент турбулентной вязкости), но и получить для некоторых частных случаев определяющие соотношения для турбулентных потоков. Путь перемешивания — это расстояние, которое проходит элементарный объем газа в турбулизованном потоке, прежде чем этот объем окончательно перемешивается с окружающей средой. Это расстояние в известном смысле аналогично длине свободного пробега в кинетической теории газов.

Турбулентные напряжения являются результатом переноса импульса за счет пульсаций турбулентной скорости. Гипотеза Прандтля состоит в том, что вихри, смещающиеся в виде “струек” по координате z на длину “пути перемешивания” ξ'_z , сохраняют тот импульс, каким они обладали на исходном уровне. Такое рассмотрение аналогично картине турбулентной диффузии примеси вещества. На высоте $z + \xi'_z$ пульсация скорости v'_x может быть представлена как разница между собственной скоростью струйки $\bar{v}_x(z)$ (средней скоростью потока на исходной высоте) и скоростью окружающего потока $\bar{v}_x(z + \xi'_z)$. Линеаризация профиля осредненной скорости \bar{v}_x дает нам: $\bar{v}_x(z + \xi'_z) = \bar{v}_x(z) + \xi'_z \partial \bar{v}_x / \partial z$. Запишем таким образом соотношение Прандтля для переноса импульса:

$$v'_x = -\xi'_z \partial \bar{v}_x / \partial z . \quad (1.34)$$

В случае плоского сдвигового потока получаем для компоненты тензора

Рейнольдса(1.31):

$$R_{xz} \equiv -\rho \overline{v'_x v'_z} = \rho \overline{\xi'_z v'_z} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z}. \quad (1.35)$$

Если определить кинематический коэффициент турбулентной вязкости

$$\nu_t = \overline{\xi'_z v'_z}, \quad (1.36)$$

то формула (1.35) терминологически согласуется с градиентной гипотезой (см. выражение (1.33)). Формула (1.36) аналогична формуле для коэффициента молекулярной вязкости: $\nu = l_m v_m$, где l_m — длина свободного пробега молекул, v_m — скорость их теплового движения. “Мера обмена” в турбулентном потоке ν_t также является произведением расстояния и скорости, с которой происходит турбулентный обмен, — скорости перемешивания. Величина ξ'_z по сути является случайной (пульсационной) величиной.

Для практического применения формулы (1.35) необходимо также оценить скорость перемешивания, что и делает Прандтль [39]. В результате перемешивания сама скорость перемешивания должна снижаться по мере выравнивания условий (скоростей) в среде. Отсюда следует предположение, что скорость перемешивания должна быть пропорциональна градиенту скоростей среднего движения $\partial \overline{v_x} / \partial z$. Это рассуждение одновременно означает, что пульсации скоростей по разным направлениям близки по абсолютным значениям, то есть $v'_z \sim v'_x$ [36]. Поэтому используем (1.34), подставляя в (1.35), и получим:

$$R_{xz} = \rho \overline{(\xi'_z)^2} \left| \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} \right| \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z},$$

где модуль введен с целью того, чтобы знак тензора турбулентной вязкости был тот же, что у $\partial \overline{v_x} / \partial z$. Это соответствует тому факту, что импульс передается от быстрее движущихся слоев к более медленным слоям. Тогда для кинематического коэффициента турбулентной вязкости получится формула Прандтля [39]:

$$\nu_t = \alpha^* L^2 \left| \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} \right|, \quad (1.37)$$

где α^* — безразмерная величина порядка 1. Сам по себе локальный путь перемешивания ξ'_z является слишком неопределенной величиной, которую невозможно измерить. Здесь длина L , или путь перемешивания, уже

не случайная величина. По порядку величины она равна $\sqrt{(\xi'_z)^2}$ и характеризует масштаб турбулентности. Теперь осталось установить зависимость L от координат, например, эмпирически.

Выражение (1.37) может быть получено также из соображений размерности. Для этого учитывается принцип локального подобия турбулентного переноса (§ 3.3 в [25]), — коэффициенты турбулентного переноса в каждой точке зависят только от свойств среды в этой точке, от локального значения масштаба турбулентности L и от некоторых характеристик осредненного течения. Иными словами, ν_t является функцией величин ν , L , $\partial \overline{v_x} / \partial z$. Масштаб L характеризует геометрию турбулентного течения или характерный размер. Вдали от твердой поверхности можно исключить ν из списка параметров, и по соображениям размерности следует формула Прандтля (1.37). Постоянный множитель α^* устанавливается для каждого конкретного типа движения на основании экспериментальных данных.

1.3.5 Параметр турбулентной вязкости α

Рассмотрим аккреционный диск, в котором вращение происходит по круговым орбитам и скорости вращения лежат в плоскостях, параллельных плоскости симметрии диска. Расположив воображаемую стенку перпендикулярно к радиусу в данной точке на расстоянии r_* от центра, найдем силу трения, приходящуюся на единицу ее площади.

Осредненная скорость вещества в диске с большой точностью тангенциальна этому радиусу, так как скорость вращения доминирует над остальными компонентами. Пусть воображаемая стенка вращается вокруг центра с осредненной скоростью потока. Сила трения направлена тангенциально, и равна плотности потока φ -компоненты импульса в радиальном направлении. Если предположить, как было указано в § 1.3.1 после формулы (1.32), что первый член в тензоре турбулентной вязкости, определяемый только динамикой течения, доминирует над вторым членом, в которой входит коэффициент молекулярной вязкости η , то $r\varphi$ -компонента напряжения трения на стенке в данном случае будет равна

$$\left(\overline{w_{r\varphi}} - \overline{\rho v_r'' v_\varphi''} \right)_{r=r_*} = \left(\overline{\rho \nu r \frac{d\omega}{dr}} - \overline{\rho v_r'' v_\varphi''} \right)_{r=r_*},$$

где использовано выражение для компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат (см. главу 2 в книге Ландау и Ливши-

ца [16]).

Как это принято, будем обозначать через $w_{r\varphi}^t$ величину, противоположную по знаку компоненте тензора вязких напряжений в диске в цилиндрической системе координат². Следуя градиентной гипотезе (см. § 1.3.3 и выражение (1.33)), можно записать:

$$w_{r\varphi}^t \equiv \overline{\rho v_r'' v_\varphi''} = -\bar{\rho} \nu_t r \frac{d\omega}{dr}, \quad (1.38)$$

где ν_t — кинематический коэффициент турбулентной вязкости [см²/с]. Для кеплеровского диска из (1.38) получаем:

$$w_{r\varphi}^t = \frac{3}{2} \omega_K \nu_t \bar{\rho}. \quad (1.39)$$

$$w_{r\varphi} = -\frac{3}{2} \omega_K \nu_t \bar{\rho}. \quad (1.40)$$

Согласно следствию гипотезы Прандтля (1.36), $\nu_t = \overline{v_t l_t}$, где v_t и l_t — скорость и длина турбулентного перемешивания, которые в турбулентном потоке принимают случайные значения³. Применяя в диске соотношение Прандтля для переноса по радиусу турбулентной скорости

$$v_t = l_t r \left| \frac{d\omega}{dr} \right|$$

(сравним с (1.34)), получаем, подставляя в (1.38), что

$$w_{r\varphi}^t = \bar{\rho} \overline{v_t^2} \equiv m_t^2 \bar{\rho} v_s^2,$$

где осредненная квадратичная турбулентная скорость (пульсационная компонента скорости вещества в диске) $\overline{v_t^2}$ выражена через скорость звука v_s и число Маха $m_t^2 = \overline{v_t^2}/v_s^2$.

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$w_{r\varphi}^t = \alpha P, \quad (1.41)$$

где безразмерная величина α называется турбулентным параметром, P — полное давление (равное сумме газового и лучистого).

²При такой договоренности $w_{r\varphi}^t$ положительна для аккреционных дисков. В англоязычной литературе часто используется обозначение $t_{r\varphi} = -w_{r\varphi}^t$.

³Они аналогичны величинам v'_x и ξ'_z , рассмотренным в § 1.3.4.

Модели дисков, в которых источником вязкости принимается турбулентность и используется связь (1.41), называются α -дисками. В самых простых моделях этот коэффициент полагается фиксированным во всем аккреционном диске. Его величина может быть найдена из сопоставления с наблюдениями транзиентных явлений, которые являются проявлениями вязкой эволюции дисков при нестационарной аккреции на космические объекты.

Приравняем (1.40) величине $\alpha \bar{\rho} v_s^2$ и получим для кеплеровского диска связь между безразмерным турбулентным параметром и кинематическим коэффициентом вязкости:

$$\nu_t = \frac{2}{3} \alpha v_s^2 \frac{1}{\omega_K} = \frac{2}{3} \alpha v_s z_{\text{hyd}}, \quad (1.42)$$

где введена “гидростатическая полутолщина” диска, которая получается путем приближенного интегрирования (1.19):

$$z_{\text{hyd}} \equiv \sqrt{\frac{p}{\rho} \frac{1}{\omega_K^2}} = \frac{v_s}{\omega_K}.$$

С учетом следствия гипотезы Прандтля (1.36), $\nu_t = \overline{v_t l_t}$, мы можем записать:

$$\alpha = \frac{\overline{v_t l_t}}{\frac{2}{3} v_s z_{\text{hyd}}}.$$

Из общих соображений становится ясно, что параметр α — величина, не превосходящая единицу. Действительно, если турбулентные движения имеют скорость больше звуковой, ударные волны быстро гасят такие движения. Неравенство же $l_t > z_{\text{hyd}}$ означало бы, что турбулентность носит анизотропный характер, так как поперечная толщина диска ограничена величиной $\sim z_{\text{hyd}}$.

Использование параметра α оправдывает себя в ситуациях, когда он может считаться примерно постоянной величиной. Как показано в последние десятилетия, такое приближение хорошо описывает многообразие наблюдаемых явлений в источниках с дисковой аккрецией. Численное моделирование вспышек в карликовых новых и рентгеновских транзиентах демонстрирует, что для определенных диапазонов физических условий в этих астрофизических дисках параметр α может считаться константой. Были получены его типичные значения: $10^{-2} - 1$ [40, 41].

Отметим, что встречаются астрофизические условия, когда нельзя ожидать выполнения соотношения $w_{r\varphi}^t = \alpha P$ с постоянным α , например, в зонах с частичной ионизацией. Магнитные поля и излучение могут влиять на развитие дисковой турбулентности и на параметр турбулентной вязкости.

1.4 Тонкие диски

1.4.1 Уравнения радиальной структуры

Выпишем уравнения дисковой аккреции для геометрически тонких α -дисков. Мы будем пренебрегать зависимостями физических параметров в диске от z , производя усреднение (интегрирование) по вертикали. Будем рассматривать диски без радиальной адвекции (переноса тепла с веществом по радиусу) и без потери массы с поверхностей диска. В таких дисках угловая скорость вращения вещества диска на каждом радиусе r приблизительно равна угловой скорости вращения свободной частицы. Другими словами, $v_r \ll v_\varphi$.

Параметрами, определяющими структуру геометрически тонкого диска, являются масса гравитирующего центра M , внутренний радиус аккреционного диска r_{in} и темп аккреции \dot{M} .

Уравнение сохранения массы Введем поверхностную плотность

$$\Sigma_0(t, r) = \int_{-z_0}^{+z_0} \rho(t, r, z) dz, \quad (1.43)$$

где z_0 — полутолщина диска на радиусе r . Как мы договорились ранее, для тонких дисков скорости не меняются по z . Интегрируя (1.2) по высоте, получаем:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma_0 v_r r). \quad (1.44)$$

Произведение в скобках в правой части этого выражения, умноженное на 2π , по смыслу равно радиальному потоку вещества в диске [г/с] через цилиндрическую поверхность радиуса r .

r -компонента уравнения движения Для тонкого стационарного диска основными по величине в этом уравнении являются члены

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (1.45)$$

что в случае ньютоновского потенциала равносильно закону Кеплера:

$$\omega_K = \frac{\sqrt{GM}}{r^{3/2}}.$$

Потенциалы, учитывающие искривление пространства вокруг черной дыры Шварцшильда, обсуждаются в разделе 1.4.5.

φ -компонента уравнения движения Проинтегрируем по вертикали φ -компоненту уравнения движения (1.4), умноженную на ρr^2 :

$$\Sigma_0 v_r r \frac{\partial (\omega r^2)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (W_{r\varphi} r^2), \quad (1.46)$$

где

$$W_{r\varphi}(t, r) = \int_{-z_0}^{+z_0} w_{r\varphi}^t(t, r, z) dz. \quad (1.47)$$

1.4.2 Решение при постоянном темпе аккреции

Из уравнения неразрывности (1.44) в стационарном случае следует, что

$$\Sigma_0 v_r r = const.$$

Определим темп аккреции как массу вещества, пересекающего поверхность цилиндра с радиусом r за единицу времени:

$$\dot{M} \equiv 2\pi r v_r \Sigma_0. \quad (1.48)$$

Знак минус введен, чтобы в будущем оперировать положительной величиной \dot{M} и скомпенсировать тот факт, что в аккреционном диске при движении массы к центру $v_r < 0$.

Для постоянного темпа аккреции уравнение сохранения момента импульса (1.46) легко интегрируется:

$$\dot{M} \omega r^2 - 2\pi W_{r\varphi} r^2 = const. \quad (1.49)$$

Так записывается закон сохранения момента импульса стационарного диска. Константа может быть определена из граничных условий на внутреннем радиусе диска:

$$\dot{M} (h - h_{\text{in}}) = F - F_{\text{in}},$$

где F — момент вязких сил между соседними кольцами диска (положительная величина по нашей договоренности)

$$F = 2 \pi W_{r\varphi} r^2, \quad (1.50)$$

удельный момент импульса $h = \omega r^2$, а нижний индекс означает величины на внутреннем краю диска.

Закон сохранения момента импульса можно записать в виде:

$$W_{r\varphi} = \frac{\dot{M} \omega}{2 \pi} f(r) \quad \text{или} \quad F = \dot{M} h f(r), \quad (1.51)$$

где функция $f(r) = 1 - h_{\text{in}}/h + F_{\text{in}}/(\dot{M} h)$ содержит информацию о внутренних граничных условиях на тензор вязких напряжений (вид $f(r)$ при $\dot{M}(r) \neq \text{const}$ см. в разд. 1.5.3). Например, в случае черной дыры принимается условие равенства нулю тензора вязких напряжений, так как внутренний радиус диска ограничен радиусом последней устойчивой орбиты, с которой вещество свободно падает на черную дыру. Тогда вдали от внутреннего радиуса $f(r) \approx 1$. При аккреции на замагниченную звезду тензор напряжений на внутреннем краю диска будет зависеть от величины магнитного поля, и соответственно меняется его радиальное распределение. При достаточно сильном магнитном поле центрального объекта аккреция вещества может прекращаться на внутреннем радиусе диска. Такие диски называются дисками-накопителями [42]. В диске-накопителе момент вязких сил F постоянен по радиусу вблизи внутренней границы, а вид F на больших радиусах зависит от условий на внешней границе.

1.4.3 Радиальная скорость вещества в тонком диске

Оценим радиальную компоненту скорости вещества в диске в стационарном режиме из φ -компоненты уравнения движения, воспользовавшись её следствием (1.51) в приближении $f(r) \sim 1$, справедливом в

квазистационарном случае вдали от центра, и определением темпа аккреции (1.48):

$$\langle v_r \rangle = \frac{\dot{M}}{2\pi r \Sigma_0} = \frac{W_{r\varphi}}{\omega r \Sigma_0}.$$

В последней формуле стоит усредненная скорость, радиальная скорость в аккреционном потоке имеет флуктуационный характер. Вообще говоря, каждая частица вещества не двигается по спирали к центру. Очевидно, что скорость, с которой вещество приближается к тяготеющему телу, зависит от величины вязкости.

Воспользуемся формулой (1.40) и получим:

$$|v_r| = \frac{3}{2} \frac{\nu_t}{r}, \quad (1.52)$$

где приближенно положено $W_{r\varphi} \approx 2 z_0 w_{r\varphi}$ и $\Sigma_0 \approx 2 z_0 \rho$ (ср. (1.43) и (1.47)).

Характерное время передвижения вещества по радиальной координате к центру

$$\tau_{\text{vis}} \sim \frac{r}{|v_r|} = \frac{2}{3} \frac{r^2}{\nu_t}.$$

Делая предположение о α -вязкости в диске и используя связь (1.42) между ν_t и α , полученные формулы перепишем в виде:

$$|v_r| = \alpha v_s \frac{z_0}{r} = \alpha v_\varphi \left(\frac{z_0}{r} \right)^2, \quad (1.53)$$

$$\tau_{\text{vis}} = \frac{1}{\alpha \omega_K} \left(\frac{z_0}{r} \right)^{-2}. \quad (1.54)$$

В геометрически тонком диске вязкое время много больше характерного динамического времени

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \frac{r}{v_\varphi} \sim \frac{1}{\omega_K}. \quad (1.55)$$

1.4.4 Аккреция на черную дыру в первом приближении

Характерной особенностью черной дыры является существование области, из которой не выходят никакие частицы. В случае черной дыры Шварцшильда эта область ограничена радиусом горизонта

$$R_g = 2 G M / c^2 .$$

Из-за сильного увеличения силы притяжения появляется область, где круговые орбиты теряют свою устойчивость. В этой области частицы падают на черную дыру по спирали. Для Шварцшильдовской черной дыры радиус последней устойчивой орбиты равен $R_{\text{ISCO}} = 3 R_g$.

В первом приближении вводят потенциал Пачинского–Виты

$$\Phi_{\text{PW}} = -\frac{G M}{r - R_g} .$$

Для круговых орбит скорость движения свободных частиц можно найти, приравнявая

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{d\Phi_{\text{PW}}}{dr} = \frac{G M}{(r - R_g)^2} .$$

Удельный момент импульса пробной частицы в потенциале Пачинского–Вита:

$$h^{\text{PW}} = v_\varphi^{\text{PW}} r = \sqrt{\frac{G M r}{(1 - \frac{R_g}{r})^2}} .$$

Для исследования устойчивости используем эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = \frac{K^2}{2r^2} + \Phi,$$

где K — удельный момент свободно движущейся частицы. Первое слагаемое в правой части — это центробежный потенциал.

Условие устойчивости — равенство нулю второй производной.

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = 0$$

Энергия частицы с единичной массой

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{K^2}{2r^2} + \Phi = \frac{v_r^2}{2} + \frac{v_\varphi^2}{2} + \Phi$$

Мы использовали, что $K = v_\varphi r$.

1.4.5 Аккреция на черную дыру

В главе ??, посвященной релятивистским стандартным дискам, будет изложена теория, начала которой были заложены работой Новикова и Торна [43]. Для ознакомления с астрофизическими аспектами теории также рекомендуем книги [44, 45]. Здесь мы опишем только основные особенности поведения диска вблизи черной дыры.

Вблизи черной дыры искривление пространства-времени играет решающую роль в строении аккреционного диска. Нарушается приближение тонкого аккреционного диска, согласно которому вещество вращается по приблизительно круговым орбитам. Поток вещества на черную дыру ускоряется, становится существенно сверхзвуковым по радиальной координате и, начиная с некоторого радиуса, идет в режиме свободного падения.

Свободное падение вещества проходит с сохранением момента импульса. При этом нет потока вязкого тензора наружу, что выражается равенством его нулю на внутренней границе диска: $F_{in} = 2\pi W_{r\varphi} r_{in}^2 = 0$. Это условие подтверждается численными одномерными расчетами гидродинамических уравнений в пост-ньютоновском потенциале [46]. Оказывается, условие равенства нулю тензора вязких напряжений наступает вблизи радиуса последней устойчивой орбиты (ISCO⁴).

Для невращающихся черных дыр радиус последней круговой устойчивой орбиты $r_{ISCO} = 3R_s$, где шварцшильдовский радиус R_s — радиус горизонта невращающейся черной дыры, —

$$R_s = 2GM/c^2.$$

Радиус r_{ISCO} для вращающейся черной дыры находится в метрике пространства-времени Керра и дан точной формулой (??) в § ??.

На радиусах меньше $3R_s$ нет энерговыделения, происходящего из-за вязкости. Отметим, что в этих областях излучение может генерироваться в результате процессов, в которых участвуют плазма и магнитные поля.

Таким образом, при аккреции на шварцшильдовскую черную дыру граничное условие на внутреннем радиусе записывается как

$$W_{r\varphi}(r = 3R_s) = 0.$$

Используем уравнение (1.49) при $\dot{M} = const$ в виде

$$\dot{M}(\omega_{in} - \omega) = 2\pi W_{r\varphi},$$

⁴innermost stable circular orbit (англ.)

или, для момента вязких сил,

$$F = \dot{M}(h - h_{\text{in}}), \quad (1.56)$$

где h_{in} — удельный момент импульса вещества на последней устойчивой орбите у черной дыры.

В стационарном, внешне неограниченном диске, при равенстве нулю тензора вязких напряжений на внутренней границе, для функции, определенной в (1.51), имеем:

$$f(r) = 1 - h_{\text{in}}/h(r) + F_{\text{in}}/(\dot{M}h) = 1 - h_{\text{in}}/h(r). \quad (1.57)$$

В ньютоновском приближении $f(r) = 1 - \sqrt{r_{\text{in}}/r}$ и

$$W_{r\varphi} = \frac{\dot{M}\omega}{2\pi} (1 - \sqrt{r_{\text{in}}/r}).$$

Для приближенного учета эффектов общей теории относительности около невращающихся черных дыр можно использовать потенциал Пачинского–Виты [47]:

$$\Phi_{\text{PW}} = -\frac{GM}{r - R_s}. \quad (1.58)$$

Для круговых орбит свободных частиц скорость движения можно найти из уравнения (1.3):

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{d\Phi_{\text{PW}}}{dr}. \quad (1.59)$$

В результате получаем

$$\frac{v_\varphi^{\text{PW}}}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{r R_s}}{(r - R_s)}.$$

и удельный момент импульса пробной частицы в потенциале Пачинского–Вита:

$$h^{\text{PW}} = v_\varphi^{\text{PW}} r = \sqrt{\frac{GM r}{(1 - \frac{2GM}{c^2 r})^2}}. \quad (1.60)$$

Модифицированный потенциал (1.58) часто используется (например, при подстановке в уравнение (1.45)), так как он довольно хорошо аппроксимирует эффекты искривления метрики вблизи черной дыры Шварцшильда. Разные приближения потенциала, в частности, применимые для случая вращающихся черных дыр, можно найти в книге Като и др. [6].

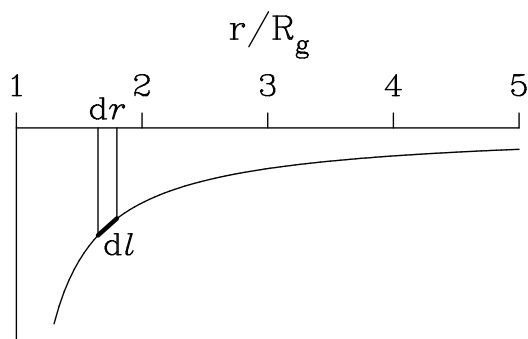


Рис. 1.2: Иллюстрация “сжатия” элемента расстояния dl вдоль радиуса, измеряемого неподвижным наблюдателем.

Выпишем стационарную метрику Шварцшильда в виде квадрата интервала между двумя событиями, разделенными во времени и пространстве

$$ds^2 = -(1 - R_s/r) dt^2 + (1 - R_s/r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta + \sin^2 \theta d\varphi).$$

Здесь t , r , θ , φ — шварцшильдовские координаты. Из-за искривления пространства–времени вблизи черной дыры элемент расстояния dl вдоль радиуса, который измеряет локальный неподвижный наблюдатель, длиннее соответствующего координатного отрезка dr (см. Рис. 1.2):

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - R_s/r}}.$$

1.4.6 Логарифмический потенциал

Для описания релятивистского движения вблизи черной дыры Шварцшильда воспользуемся следующим “логарифмическим” потенциалом (Ландау, Лифшиц 1975; Торн и др., 1986)

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \ln \left(1 - \frac{R_g}{r} \right) = c^2 \ln \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}}.$$

Логарифмический потенциал дает точное решение задачи о движении частицы вблизи Шварцшильдовской черной дыры.

Запишем метрику Шварцшильда

$$ds^2 = -(1 - R_g/r) dt^2 + (1 - R_g/r)^{-1} dr^2 + r^2(d^2\theta + \sin^2\theta d^2\varphi).$$

где t , r , θ , и φ — Шварцшильдовы координаты.

Для описания релятивистского движения вблизи черной дыры Шварцшильда воспользуемся следующим “логарифмическим” потенциалом [45, 48, 49]:

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \ln \left(1 - \frac{R_g}{r} \right) = c^2 \ln \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}}. \quad (1.61)$$

Здесь $\sqrt{1 - R_g/r}$ — функция длительности в метрике Шварцшильда. Она определяет красное смещение сигнала, испускаемого вблизи черной дыры, и темп хода часов локального неподвижного наблюдателя τ_l по сравнению с темпом хода часов на бесконечности t :

$$d\tau_l/dt = \sqrt{1 - R_g/r}. \quad (1.62)$$

Время на движущейся частице связано со временем, измеряемым локальным неподвижным наблюдателем, как

$$d\tau_p/d\tau_l = \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.63)$$

Импульс \mathbf{p} и энергия E_{local} релятивистской частицы с массой покоя m_o относительно локального неподвижного наблюдателя равны

$$\mathbf{p} = \frac{m_o \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_{\text{local}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$ для частиц, двигающихся в экваториальной плоскости. Можно также ввести понятие “энергии на бесконечности” E . Эта величина сохраняется вдоль траектории частицы. Найдем ее.

Рассмотрим частицу, пролетающую мимо неподвижного наблюдателя, расположенного на расстоянии r от центра черной дыры. В системе отсчета, связанной с этим наблюдателем, запишем уравнение движения частицы:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau_l} = -\frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \nabla \Phi. \quad (1.64)$$

Отметим, что потенциал Φ обладает сферической симметрией. Домножаем уравнение (1.64) на \mathbf{v}

$$\mathbf{v} \frac{d}{d\tau_l} \left(\frac{m_o \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = -\frac{m_o \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \nabla \Phi = -\frac{m_o \mathbf{v} \mathbf{e}_r}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\Phi}{dl}, \quad (1.65)$$

где \mathbf{e}_r — единичный радиальный вектор в декартовой системе отсчета локального наблюдателя. Далее дифференцируем левую часть (1.65):

$$\frac{1}{2} \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv^2}{d\tau_l} + \frac{1}{2} \frac{m_o v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv^2}{d\tau_l} = - \frac{m_o \mathbf{v} \mathbf{e}_r}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\Phi}{dl}.$$

Умножаем на $(1-v^2/c^2)^{3/2}$ и, уничтожая слева два одинаковых члена с разными знаками, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau_l} (1-v^2/c^2) = (1-v^2/c^2) \frac{dl}{d\tau_l} \frac{d}{dl} \ln(1-R_g/r)^{1/2},$$

учитывая для радиальной скорости равенство $v_r = dl/d\tau_l$, что дает

$$\frac{d}{d\tau_l} \ln(1-v^2/c^2) = \frac{d}{d\tau_l} \ln(1-R_g/r).$$

В результате получим соотношение

$$(1-R_g/r) / (1-v^2/c^2) = \text{const}.$$

Следовательно, у свободно движущейся частицы сохраняется величина

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sqrt{1-\frac{R_g}{r}} = E_{\text{local}} \sqrt{1-\frac{R_g}{r}} = \text{const}, \quad (1.66)$$

а локально измеряемая энергия E_{local} меняется в гравитационном поле черной дыры. Величину E называют “энергией на бесконечности” [45]. Для фотона, у которого масса покоя $m_o = 0$, из (1.66) следует связь между его частотой в системе отсчета локального наблюдателя ν_o и его частотой, детектируемой на бесконечности $\nu_\infty = \nu_o \sqrt{1-R_g/r}$, описывающая эффект красного смещения.

В нерелятивистском приближении энергия \mathcal{E}_N частицы приобретает известный вид:

$$E - m_o c^2 = \mathcal{E}_N = m_o v^2/2 - m_o G M/r.$$

Найдем теперь компоненты скорости частицы в экваториальной плоскости. У свободно движущейся частицы с массой m_o сохраняется момент импульса

$$h_p = \frac{m_o v_\varphi r}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (1.67)$$

Из уравнений (1.66) и (1.67), с учетом $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$, получим

$$\frac{v_r^2}{c^2} = 1 - \frac{m_o^2 c^4}{E^2} \left(\frac{h_p^2}{r^2 m_o^2 c^2} + 1 \right) \left(1 - \frac{R_g}{r} \right) \quad (1.68)$$

Перепишем последнее выражение, домножив на $E^2/(m_o^2 c^4)$, учитывая (1.63), (1.66) и соотношение

$$\frac{v_r^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau_p} \right)^2 \frac{m_o^2 c^4}{E^2}.$$

Получим в результате закон движения частицы с энергией E (идентично точному решению в ОТО, см. [44]):

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau_p} \right)^2 = \frac{E^2}{m_o^2 c^4} - \left(\frac{h_p^2}{r^2 m_o^2 c^2} + 1 \right) \left(1 - \frac{R_g}{r} \right).$$

Упомянем, что в приближении ньютоновского потенциала, данный закон движения выглядит как [50]:

$$v_r^2 = \frac{2}{m_o} \left(\mathcal{E}_N + m_o \frac{GM}{r} \right) - \frac{h_N^2}{r^2 m_o^2},$$

где $h_N = m_o v_\varphi r = const.$

Рассмотрим частицы на круговых орбитах вокруг шварцшильдской черной дыры. При таком движении обращается в ноль как v_r так и $dr/d\tau_p$. Удобно ввести эффективный потенциал [44]

$$V(r) = \left(\frac{h_p^2}{r^2 m_o^2 c^2} + 1 \right) \left(1 - \frac{R_g}{r} \right).$$

Для круговых орбит его первая производная обращается в ноль (он имеет экстремум). Система уравнений

$$\frac{dr}{d\tau_p} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

дает значение момента импульса на круговой орбите

$$h_p^2 = \frac{m_o^2 r R_g c^2}{2 - 3R_g/r}. \quad (1.69)$$

Возведем в квадрат (1.67) и из (1.69) получим тангенциальную скорость, измеряемую локальным наблюдателем,

$$\frac{v_\varphi}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_g}{r - R_g}}. \quad (1.70)$$

Для локального наблюдателя угловая скорость вращения частицы равна

$$\omega_l = \frac{v_\varphi}{r} = \frac{c}{\sqrt{2}r} \sqrt{\frac{R_g}{r - R_g}}. \quad (1.71)$$

Для бесконечно удаленного наблюдателя, учитывая (1.62), получаем:

$$\omega = \frac{c \sqrt{R_g}}{\sqrt{2} r^{3/2}} = \frac{\sqrt{GM}}{r^{3/2}}, \quad (1.72)$$

— выражение, совпадающее с классическим выражением, следующим из закона Кеплера.

Устойчивые орбиты по критерию Рэля [51] невозможны там, где $dh_p/dr < 0$. Из этого условия можно найти, что последняя устойчивая орбита имеет радиус $r_{\text{ISCO}} = 3R_g$.

Подставим в выражение (1.66) скорость $v_\varphi = c/2$ на r_{ISCO} и найдем энергию частицы, вращающейся на последней устойчивой круговой орбите. Энергия этой частицы $E = m_o c^2 2\sqrt{2}/3$ меньше ее энергии покоя на бесконечности $m_o c^2$. Получаем, что при перемещении частицы из бесконечности к шварцшильдовской черной дыре, то есть, в процессе аккреции, выделилась энергия, равная $(m_o c^2 - E) \approx 0.0572 m_o c^2$. То есть КПД выделения энергии в процессе аккреции на невращающуюся черную дыру равен $\sim 6\%$. Расчет в метрике Керра показывает, что энергия связи частицы максимальна в случае экстремально вращающейся черной дыры и равна $1 - \sqrt{1/3} \approx 0.423$ энергии покоя [17].

Извлекая корень квадратный из (1.69), получим удельный момент импульса частиц на круговых орбитах в метрике Шварцшильда

$$h = \frac{h_p}{m_o} = \frac{\sqrt{GM r}}{\sqrt{1 - \frac{3GM}{c^2 r}}}. \quad (1.73)$$

На Рис. 1.3 сверху показана зависимость удельного момента импульса пробных частиц от радиуса орбиты в поле черной дыры. Также для

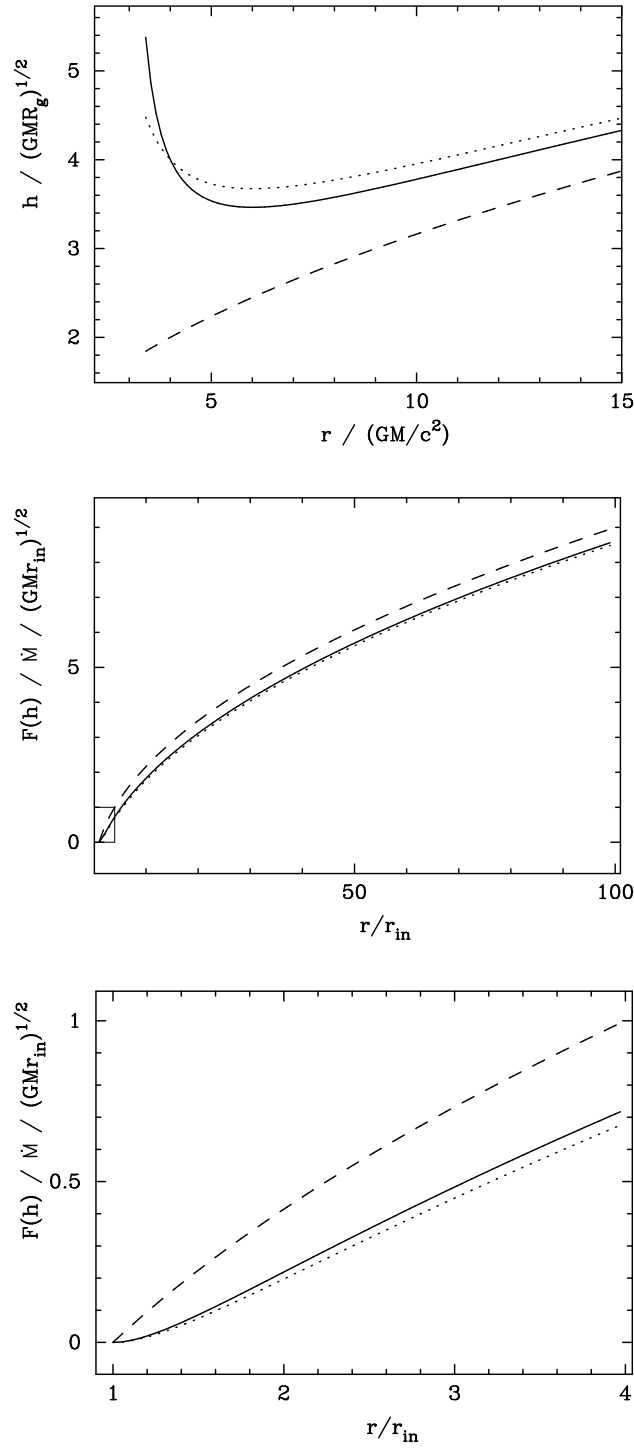


Рис. 1.3: Удельный момент импульса h пробных частиц в поле черной дыры (сверху) и момент вязких сил $F(h)$ в стационарном диске, нормированные значения. Внутренний радиус диска $r_{in} = 3R_g = 6GM/c^2$. Сплошные линии показывают зависимости в точном логарифмическом потенциале (1.61), пунктирные — в потенциале Пачинского-Виты, штриховые — в ньютоновском приближении. На среднем рисунке выделена прямоугольная область, увеличенно показанная на нижнем рисунке.

сравнения показан случай в ньютоновском потенциале (штриховая линия) и в потенциале Пачинского-Виты (пунктир). В поле черной дыры Шварцшильда минимальное значение момента импульса h наступает на радиусе последней устойчивой орбиты $6GM/c^2$. В отличие от случая ньютоновского потенциала, на этом радиусе обращается в ноль первая производная удельного углового момента dh/dr (см. Рис. 1.3, сверху). Как и в приближенном потенциале Пачинского-Виты (1.58), так и в точном потенциале (1.61), радиус последней устойчивой орбиты находится на $3R_g$. Однако энергия связи в потенциале Пачинского-Виты отличается от значения в метрике Шварцшильда:

$$\text{Потенциал Ньютона: } (m_0 c^2 - E) = (1/12) m_0 c^2 ;$$

$$\text{Потенциал Пачинского-Виты: } (m_0 c^2 - E) = (1/16) m_0 c^2 ;$$

Логарифмический потенциал и

$$\text{метрика Шварцшильда: } (m_0 c^2 - E) = (1 - 2\sqrt{2}/3) m_0 c^2 .$$

Круговые орбиты существуют только до радиуса, где $v_\varphi = c$. В логарифмическом потенциале последняя круговая орбита лежит на $3R_g/2$, что совпадает со значением, рассчитываемым точно в ОТО. В потенциале Пачинского-Виты последняя круговая орбита находится на $2R_g$.

На Рис. 1.3 также изображены зависимости моментов вязких сил в диске, полученные по формуле (1.56). Отметим, что и для потенциала Пачинского-Виты и для логарифмического потенциала на последней устойчивой орбите обращается в ноль как само значение момента вязких сил, так и его первая производная (см. Рис. 1.3, внизу).

1.4.7 Энерговыделение в геометрически тонких дисках

Вернемся к рассмотрению дисков в ньютоновском приближении. Подробный разбор уравнения баланса энергии приведен, например, в приложении книги [6]. Для диска энергия, диссипирующая в единице объема в единицу времени, равна

$$\varepsilon = \rho \nu_t r^2 \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 . \quad (1.74)$$

В общем случае в оптически толстых дисках выделение энергии ε может быть дано в виде степенной зависимости от температуры и плотности [52].

В самом простом приближении, в геометрически тонком диске вся энергия, выделяющаяся из-за трения в кольце диска, излучается с нижней и верхней поверхностей этого кольца. Энергия, выделяемая в единицу времени с единицы поверхности геометрически тонкого диска в расчете на одну сторону:

$$Q_{\text{vis}}(t, r) \equiv \int_0^{+z_0} \varepsilon(t, r, z) dz = -\frac{1}{2} W_{r\varphi} r \frac{d\omega}{dr}. \quad (1.75)$$

Заметим, что последняя формула работает и в случае так называемых дисков-накопителей [42], в которых темп аккреции равен нулю. Если привлечь уравнение сохранения момента импульса в виде (1.51), то для аккрецирующего диска получаем:

$$Q_{\text{vis}} = -\frac{\dot{M}}{4\pi} \omega r \frac{d\omega}{dr} f(r). \quad (1.76)$$

Для кеплеровского диска последние выражения можно переписать в виде (с учетом (1.74)):

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi}^t = \frac{9}{4} \rho \nu_t \omega_K^2, \quad Q_{\text{vis}} = \frac{3}{4} \omega_K W_{r\varphi} = \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} f(r). \quad (1.77)$$

Можно видеть, что характерное вязкое время (1.54) в геометрически тонком диске намного больше, чем характерное тепловое время, за которое меняется тепловая энергия в единице объема:

$$\tau_{\text{th}} \sim \frac{\rho v_s^2}{\varepsilon} \sim \frac{1}{\alpha \omega_K}, \quad (1.78)$$

где мы воспользовались (1.42).

Для геометрически тонкого аккреционного диска с нулевым значением тензора вязкости на внутренней границе диска и с кеплеровским распределением момента импульса имеем (см. (1.57)):

$$Q_{\text{rad}} = -\frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}} \right),$$

где r_{in} — радиус внутренней границы диска.

Наиболее общим выражением для расчета вязкого нагрева в кеплеровском диске будет формула, справедливая и в случае нулевого темпа аккреции,

$$Q_{\text{vis}} = \frac{3}{8\pi} \frac{\omega_K F}{r^2} \quad \text{или} \quad Q_{\text{vis}} = \frac{3}{8\pi} F \frac{(GM)^4}{h_K^7}, \quad (1.79)$$

где h_K — удельный момент импульса частиц, F — момент вязких сил (1.50).

Уравнение энергетического баланса для геометрически тонких дисков отражает тот факт, что тепловая энергия, выделившаяся из-за вязкости на радиусе r , полностью излучается на том же радиусе:

$$Q_{\text{vis}}(r) = Q_{\text{rad}}(r), \quad (1.80)$$

где $Q_{\text{rad}}(r)$ — поток излучения с одной из двух поверхностей аккреционного диска. Последнее уравнение требует коррекции в случае высокого темпа аккреции, при $\gtrsim \dot{M}_{\text{Edd}}$ оказывается, что необходимо учитывать радиальный перенос тепловой энергии.

В приближении того, что диск излучает как черное тело, можно характеризовать его поток эффективной температурой:

$$Q_{\text{rad}} = \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4, \quad T_{\text{eff}} \propto r^{-3/4}. \quad (1.81)$$

Максимальная эффективная температура на поверхности диска T_{max} достигается на радиусе

$$r_{\text{max}} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 r_{\text{in}},$$

и равна

$$T_{\text{max}} = 2^{3/4} \left(\frac{3}{7}\right)^{7/4} \left(\frac{GM\dot{M}}{\pi\sigma_{\text{SB}}r_{\text{in}}^3}\right)^{1/4} = 2 \left(\frac{3}{7}\right)^{7/4} \left(\frac{L_{\text{d}}}{\pi\sigma_{\text{SB}}r_{\text{in}}^2}\right)^{1/4}.$$

или

$$T_{\text{max}} = 1.15 \left(\frac{\dot{m}}{\eta_{0.1} m_x}\right)^{1/4}.$$

В последней формуле введена полная болометрическая светимость диска с двух поверхностей, равная половине высвобожденной гравитационной энергии вещества, падающего из бесконечности на гравитирующий центр:

$$L_{\text{d}} = 2 \times 2\pi \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} Q_{\text{rad}} r \, dr = -\frac{1}{2} \dot{M} \frac{GM}{r_{\text{in}}}.$$

Удельная потенциальная энергия частицы при перемещении с бесконечности на внутренний край диска уменьшается с нуля до $-GM/r_{\text{in}}$. Половина этой энергии высвечивается, а половина — переходит в кинетическую энергию вращения.

Такая “теорема вириала” неприменима для отдельных колец в диске. Проинтегрируем энергию, выделенную диском на расстояниях $r \gg r_{\text{in}}$ с двух сторон диска:

$$2 \int \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} 2\pi r dr = \frac{3}{2} \dot{M} \frac{GM}{r},$$

— она в три раза превышает объем высвобожденной гравитационной энергии. Это происходит из-за того, что вместе с моментом импульса, который переносится наружу от центра при аккреции вещества, переносится и часть энергии.

Действительно, используя определения интегральных величин (1.47), (1.48) и (1.75), домножим на $2\pi r$ и проинтегрируем по толщине диска уравнение энергетического баланса (1.27), не забывая, что мы договорились для аккреционных дисков использовать положительную величину $w_{r\varphi}^t = -w_{r\varphi}$. Получим

$$\dot{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi^2}{2} + \Phi \right) = 2\pi r \cdot 2Q_{\text{vis}} + \frac{\partial}{\partial r} (\omega_K F), \quad (1.82)$$

где $F = 2\pi r^2 W_{r\varphi}$ — полный момент вязких сил между соседними кольцами, введенный в разделе 1.4.2. Итак, энергия гравитационного взаимодействия, выделяемая по мере приближения вещества к центру, тратится на диссипацию (излучение с двух сторон диска) и перераспределяется по диску в результате работы вязких сил, переносящих момент импульса.

Еще один важный вывод можно сделать из рассмотрения последнего уравнения. В диске выделяется тепло и он может излучать, даже если темп аккреции равен нулю. Если на внутренней границе невозможен сток вещества, радиальное движение вещества в диске к его центру может остановиться, например, когда центральное тело — вращающаяся нейтронная звезда с сильным магнитным полем. При этом вязкие силы не перестают работать, вещество греется, тепло переходит в излучение. Энергия в такой диск поступает вместе с моментом импульса через внутреннюю границу диска.

1.4.8 Излучение диска

Спектральная плотность потока излучения, наблюдаемая от плоского аккреционного диска на расстоянии d от него (эрг/см²/с/Гц), равна интегралу по всему диску от интенсивности на телесный угол, под которым видно элементарное кольцо диска,

$$F_\nu = \frac{2\pi}{d^2} \cos i \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} I_\nu r dr, \quad (1.83)$$

где i — угол наклона диска к лучу зрения, $I_\nu(r)$ — интенсивность излучения с поверхности диска (см. раздел 1.9).

В фотосфере диска на разных радиусах могут иметь значение следующие процессы формирования излучения (см., например, [53]):

- Свободно-свободные и свободно-связанные переходы,
- Рассеяние на свободных электронах,
- Комптон–эффект (рассеяние на холодных электронах),
- Обратный Комптон–эффект (если энергия электронов и/или ионов очень большая),
- Линии, уширенные в результате вращения диска

В изотермичной атмосфере, если не учитывать рассеяние, формируется планковский спектр. На каждом радиусе диск излучает как черное тело температуры T_{eff} с интенсивностью:

$$B_\nu(T_{\text{eff}}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_{\text{eff}}} - 1}. \quad (1.84)$$

Спектральный поток, проинтегрированный по радиусу диска, показан на рис. 1.4.

Для спектра диска, изображенного на рис. 1.4, характерно степенное распределение для среднего интервала частот. Найдем показатель этой степени. Практически во всем диске, за исключением центральных областей (которые, однако, дают подавляющий вклад в общий объем излучаемой энергии), эффективная температура характеризуется простой

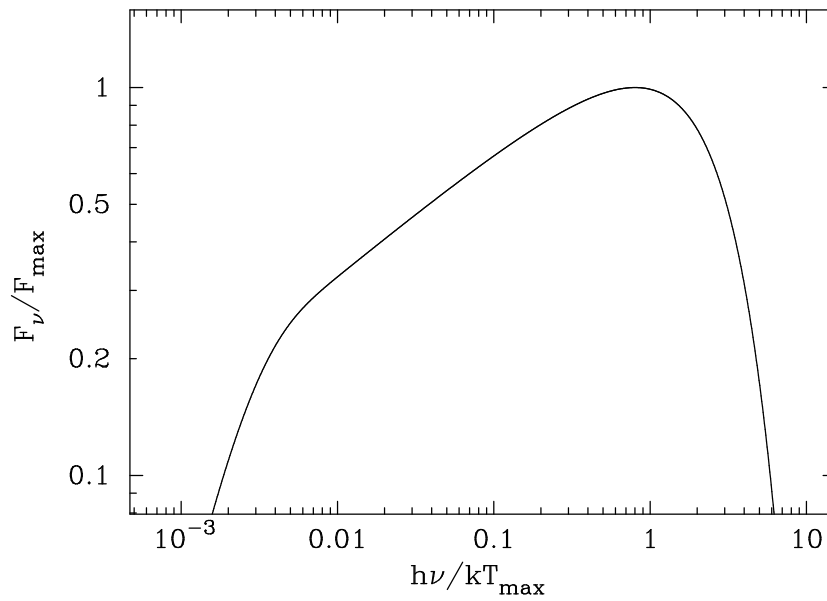


Рис. 1.4: Спектральное распределение плотности потока излучения стандартного оптически-толстого геометрически-тонкого диска в ньютоновской метрике. По горизонтальной оси отложена частота излучения, нормированная на $k T_{\max}/h$. По вертикальной оси — спектральная плотность потока в единицах $[\text{эрг Гц}^{-1} \text{см}^{-2} \text{с}^{-1}]$, нормированная на значение в максимуме, который наступает при значении абсциссы ≈ 0.8 . Максимум распределения νF_{ν} наступает при ≈ 2.5 .

степенной зависимостью от радиуса (1.81). Подставляя $r = r_0(T_0/T_{\text{eff}})^{4/3}$ и (1.84) в интеграл (1.83), получаем

$$F_\nu = \frac{16\pi}{3d^2} \cos i \left(\frac{kT_0}{h} \right)^{8/3} \frac{h\nu^{1/3}}{c^2} r_0^2 \int_{x_{\text{in}}}^{x_{\text{out}}} \frac{x^{5/3}}{e^x - 1} dx,$$

где была произведена замена $x = h\nu/kT_{\text{eff}} = (h\nu/kT_0)(r/r_0)^{3/4}$.

Радиус r_0 может быть выбран достаточно близко к r_{in} и $T_0 \approx T_{\text{max}}$ без большой потери точности. Тогда $x = (h\nu/kT_{\text{max}})(r/r_{\text{in}})^{3/4}$. На тех частотах, когда выполняются условия $x_{\text{in}} \ll 1$ и $x_{\text{out}} \gg 1$, интеграл в последнем выражении мало меняется по величине для разных ν и приблизительно равен интегралу в пределах от нуля до бесконечности, выражаемому с помощью специальных гамма-функции и дзета-функции Римана $(10/9)\Gamma(2/3)\zeta(8/3) \approx 1.93$. Итак, для большого интервала частот $(r_{\text{in}}/r_{\text{out}})^{3/4} < h\nu/kT_{\text{max}} < 1$ спектральная плотность потока излучения диска зависит от частоты по закону $F_\nu \propto \nu^{1/3}$.

Для однородной атмосферы при наличии рассеяния спектр будет отличаться от чернотельного [54]:

$$I_\nu \simeq \sqrt{\frac{\kappa_a}{\kappa_a + \kappa_{\text{sc}}}} B_\nu(T_{\text{eff}}),$$

где κ_a — коэффициент поглощения, κ_{sc} — коэффициент рассеяния на свободных электронах. Если рассеяние на электронах доминирует над поглощением и если спектр диска подвержен комптонизации, изменение формы рентгеновского спектра диска вокруг компактного объекта звездной массы приближенно описывается параметром увеличения жесткости спектра f_c :

$$\mathcal{F}_\nu = \frac{1}{f_c^4} \pi B_\nu(f_c T_{\text{eff}}),$$

где \mathcal{F}_ν — спектральный поток с единичной поверхности в полупространство. Произведение $f_c T_{\text{eff}}$ называют цветовой температурой. Четвертая степень объясняется тем, что полная излученная энергия диска не зависит от формы спектра.

1.5 Стационарные α -диски

Как мы видели в § 1.4, использование проинтегрированных (или усредненных) по вертикальной координате уравнений неразрывности и дви-

жения позволяет найти радиальную структуру тонких стационарных аккреционных дисков. Раздельное рассмотрение вертикальной и радиальной структуры диска возможно по причине того, что характерные времена, — вязкое и гидростатическое, — имеют существенно разные масштабы. Характерное гидростатическое время соответствует времени изменения толщины диска на данном радиусе в результате изменения его центральной температуры. По соображениям размерности эта величина пропорциональна полутолщине диска, деленной на скорость звука: $z_0/v_s \sim 1/\omega_K \sim \tau_{\text{dyn}}$, и соответствует динамическому времени, которое много меньше вязкого в тонком диске (см. § 1.4.3).

Вертикальная структура аккреционных дисков в общем случае (как стационарных, так и нестационарных) описывается системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, точное решение которых при заданных граничных условиях может быть найдено численными методами. В некотором смысле расчет вертикальной структуры диска аналогичен расчету внутреннего строения звезды [52]. Система дифференциальных уравнений для вертикальной структуры диска решалась в ряде работ (см., например, [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]).

Диск можно разделить на зоны (А, В и С) по типу процессов, преобладающих в формировании непрозрачности, и по тому, какое давление играет определяющую роль, газовое или лучистое [2]. Высокотемпературная зона с основным вкладом давления излучения в уравнение гидростатического равновесия может формироваться в самых центральных областях диска — так называемая зона А. В этой области непрозрачность определяется рассеянием на электронах. Ряд исследований посвящен неустойчивостям в этой области [13, 14, 15]. Было показано, что в рамках стандартной модели в зоне А диск характеризуется тепловой и вязкой неустойчивостью. Вертикальная структура может быть описана в политропном приближении. В зоне А вклад в перенос энергии к поверхности дает турбулентная конвекция [62, 63]. При высоких темпах аккреции, $\dot{M} \gtrsim \dot{M}_{\text{Edd}}$, зона с преобладающим давлением излучения значительно увеличивается в размере и, кроме того, стандартная модель диска должна быть модифицирована: необходимо учитывать некеплеровость вращения газа в диске из-за растущего вклада радиального градиента давления и нелокальный характер уравнения баланса энергии из-за переноса тепла по радиусу [64].

Для быстрых оценок можно использовать следующие формулы: граница между зонами А и В, где газовое давление и давление излучения

дают равный вклад, находится на радиусе:

$$R_{AB}/(3 R_s) \sim 80 (m_x \alpha)^{2/21} (\dot{M}/\dot{M}_{\text{Edd}})^{16/21},$$

граница между В и С, где равны сечения процессов рассеяния и поглощения фотонов:

$$R_{BC}/(3 R_s) \sim 330 (\dot{M}/\dot{M}_{\text{Edd}})^{2/3}.$$

Внешняя граница зоны С, за которой начинается рекомбинация водорода:

$$R_C/(3 R_s) \sim 10^5 (\dot{M}/\dot{M}_{\text{Edd}}/m_x)^{1/3}.$$

Мы отнормировали темп аккреции на критический темп аккреции $\dot{M}_{\text{Edd}} = 1.4 \times 10^{18} m_x$ г/с (см. § 1.1), радиус — на радиус последней устойчивой орбиты вокруг черной дыры $3 R_s$, массу центрального объекта — на массу Солнца: $m_x = M/M_\odot$.

В данной главе мы рассмотрим диск в тех областях, где его структура устойчива и описывается стандартными уравнениями. В разделе 1.5.1 выпишем уравнения аккреционного диска в рамках стандартной модели [2]. В разделах 1.5.2 и 1.5.3 мы рассмотрим зоны В и С, для которых выпишем стационарные решения.

1.5.1 Уравнения вертикальной структуры

1. Уравнение гидростатического баланса

Уравнение гидростатического баланса по z -координате в ньютоновской метрике и в случае тонкого диска имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\omega_K^2 z, \quad (1.85)$$

где $P(z)$ — полное давление в диске, равное сумме давления излучения $P_{\text{rad}}(z) = aT^4/3$, где $a = 7.56 \times 10^{-15}$ эрг/см³/К⁴ — радиационная постоянная, и давления газа $P_{\text{gas}}(z)$, которое определяется из уравнения состояния идеального газа:

$$P_{\text{gas}} = \frac{\rho kT}{\mu m_p},$$

μ — средний молекулярный вес вещества в диске, $T(z)$ — температура, $\rho(z)$ — плотность вещества.

2. Генерация энергии

Рассмотрим на данном радиусе выделенное тепло между плоскостью симметрии диска и данным уровнем на высоте z как функцию вертикальной координаты z :

$$Q_{\text{vis}}(z) = \int_0^z \varepsilon \, d\tilde{z}.$$

Скорость генерации энергии ε [эрг · см⁻³ · с⁻¹] в кеплеровском диске определяется тензором вязких напряжений, полученным из (1.77):

$$\frac{dQ_{\text{vis}}}{dz} = \frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi}^t. \quad (1.86)$$

Компонента тензора турбулентной вязкости в диске $w_{r\varphi}^t(z)$ локально выражается через полное давление в этом месте при помощи параметра α :

$$w_{r\varphi}^t = \alpha P.$$

Эти уравнения представляют собой самую простую гипотезу об энерговыделении в диске. Возможно моделирование вертикальной структуры и при более сложных предположениях. Например, в [65] рассмотрена турбулентная диффузия в диске, которая определяет зависимость вязкого нагрева и величину самого α -параметра от z .

3. Перенос излучения в диске

Если непрозрачность в диске не превышает определенных значений, перенос энергии по вертикали к поверхностям диска осуществляется электромагнитным излучением. Предполагаем, что в толще диска выполняется условие локального термодинамического равновесия (ЛТР), то есть выполняется закон Кирхгофа, согласно которому [53, 66]

$$j_\nu = 4\pi \kappa_a(\nu) B_\nu(T),$$

где j_ν — удельный коэффициент излучения [эрг с⁻¹ г⁻¹ стер⁻¹ Гц⁻¹], $\kappa_a(\nu)$ — удельный коэффициент поглощения [см² г⁻¹], $B_\nu(T)$ — Планковское распределение [эрг с⁻¹ см⁻² стер⁻¹ Гц⁻¹], $T(z)$ — температура.

Выпишем моменты стационарного уравнения переноса излучения [67]. Предполагаем, что среда неподвижна в направлении распространения

излучения — по z . Нулевой момент уравнения переноса получается в результате интегрирования по всем телесным углам основного уравнения переноса излучения. После интегрирования его по частоте получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{dQ_{\text{rad}}(z)}{dz} = 4\pi(\kappa_{\text{p}} B_{\nu}(T) - \kappa_{\text{a}} J(z)), \quad (1.87)$$

где κ_{a} — средний по частоте удельный коэффициент поглощения, при термодинамическом равновесии равный планковскому среднему κ_{p} [67], $Q_{\text{rad}}(z)$ — поток лучистой энергии по z , $B(T) = \sigma_{\text{SB}} T^4 / \pi$ — интегральная по частоте функция Планка, $J(z)$ — интегральная по частоте средняя интенсивность излучения, входящего в слой dz . Физический смысл этого уравнения ясен: изменение потока лучистой энергии равно энергии, поступающей в результате излучения вещества (этот член записан при помощи закона Кирхгофа), минус энергия, поглощаемая веществом.

Первый момент уравнения лучистого переноса получается путем умножения на косинус угла к единичной площадке, деления на c и интегрирования по всем телесным углам. По смыслу это уравнение выражает сохранение полного импульса излучения:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP_{\text{rad}}(\nu)}{dz} = -(\kappa_{\text{a}}(\nu) + \kappa_{\text{s}}(\nu)) \frac{Q_{\text{rad}}(\nu)}{c}. \quad (1.88)$$

Здесь присутствуют зависящий в общем случае от частоты коэффициент рассеяния $\kappa_{\text{s}}(\nu, z)$, а также $Q_{\text{rad}}(\nu, z)$ и $P_{\text{rad}}(\nu, z)$ — поток лучистой энергии вдоль z и лучистое давление на частоте ν соответственно. Сила давления излучения уравновешивает изменение импульса излучения в результате взаимодействия с веществом.

Рассматривая моменты уравнения, мы избавляемся от угловой переменной. Средняя интенсивность излучения J_{ν} является нулевым моментом интенсивности. Спектральный поток лучистой энергии Q_{ν} — первым моментом, давление излучения P_{rad} — вторым моментом. Как известно, каждый момент уравнения переноса содержит в себе величину следующего порядка. Решение таких систем уравнений требует наложения некоторых дополнительных замыкающих соотношений. Основным методом замыкания для изотропного поля излучения является эддингтоновское приближение.

Средняя интенсивность излучения $J(z)$ связана по определению с плотностью лучистой энергии соотношением:

$$\varepsilon_{\text{rad}} = \frac{4\pi J}{c}. \quad (1.89)$$

Для изотропного поля излучения имеет место простая связь между плотностью лучистой энергии и давлением излучения:

$$P_{\text{rad}} = \frac{\varepsilon_{\text{rad}}}{3}. \quad (1.90)$$

Это приближение хорошо выполняется в случае геометрически тонкого диска (как оптически толстого, так и тонкого).

Для оптически-толстого диска (оптическая толщина $\tau \gg 1$) можно провести рассмотрение в “диффузионном приближении”: в первом моменте уравнения переноса излучения (1.87) полагаем, что изменение dQ_{rad} несущественно, а рассматриваем второй момент уравнения переноса излучения (1.88). Таким образом, спектр излучения близок к чернотельному: $J(z) = B(T)$. Из соотношения (1.89) следует, что $\varepsilon_{\text{rad}} = 4\pi B(T)/c \equiv aT^4$, и при учете изотропии поля излучения, проинтегрировав по частотам, получаем из (1.88):

$$\frac{c}{3\kappa_{\text{R}}\rho} \frac{d(aT^4)}{dz} = -Q_{\text{rad}}, \quad (1.91)$$

где введен коэффициент непрозрачности Росселанда $\kappa_{\text{R}}(z)$:

$$\frac{1}{\kappa_{\text{R}}} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_{\text{a}}(\nu) + \kappa_{\text{s}}(\nu)} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}. \quad (1.92)$$

Если рассмотреть усредненные по z величины, получаем:

$$Q_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \frac{c}{\kappa_{\text{R}} \rho z_0} \varepsilon_{\text{rad}}. \quad (1.93)$$

Вертикальная структура дисков при учете переноса энергии излучения и конвекции была рассмотрена в [55] при двух вариантах вязкости, пропорциональной давлению газа и пропорциональной полному давлению.

4. Зависимость поверхностной плотности от z .

Введем величину $\Sigma(z)$ — поверхностную плотность диска, “набирающуюся” до некоторой высоты z и с ее помощью перепишем уравнение (1.43):

$$\frac{d\Sigma}{dz} = \rho. \quad (1.94)$$

1.5.2 Решение вертикальной структуры

В этом разделе описан подход к решению уравнений вертикальной структуры диска, предложенный и осуществленный в работе [59]. Метод заключается в поиске подобных решений системы уравнений, приведенной к безразмерному виду, с использованием степенных аппроксимаций коэффициента непрозрачности и темпа выделения энергии от ρ и T . Полученное решение сравнивается с результатом другого решения в работе Сулейманова и др. [68], и показано согласие обоих методов.

При достаточно больших температурах ($> 10^6$ К) главную роль в непрозрачности играют процессы томсоновского рассеяния на свободных электронах. Соответствующая область диска, в которой в то же время преобладает газовое давление, называется зоной В. Дальше от центра преобладают процессы фотоионизации ионов тяжелых элементов и свободно-свободные переходы — зона С. Вкладом давления излучения в полное давление в этих двух зонах пренебрегаем. В зоне В это предположение заметно ограничивает точность решения, если $P_{\text{rad}} \gtrsim (0.2 \div 0.3) P_{\text{gas}}$.

При расчете вертикальной структуры диска будем считать, что в энергию излучения переходит все тепло, выделенное в результате работы вязких сил в диске на данных r и z . В частности, выполняется локальное уравнение баланса энергии (1.80). Заменим везде $Q_{\text{rad}}(z) = Q_{\text{vis}}(z) = Q(z)$.

Выищем вместе уравнения вертикальной структуры диска (1.85), (1.86), (1.91) и (1.94):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} &= -\omega_K^2 z, \\ \frac{d\Sigma}{dz} &= \rho, \\ \frac{dQ}{dz} &= \frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi}^t, \\ \frac{c}{3\kappa_R \rho} \frac{d(aT^4)}{dz} &= -Q. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Для α -дисков темп энерговыделения ε пропорционален давлению.

Коэффициент непрозрачности представляем в виде степенной зависимости

$$\kappa_R = \kappa_0 \frac{\rho^\zeta}{T^\gamma}. \quad (1.96)$$

Для водородных дисков

$$\zeta = \Upsilon = 0, \quad \varkappa_0 = 0.4 \text{ см}^2/\Gamma, \quad \text{если } \varkappa_T \gg \varkappa_{\text{ff}}, \quad (1.97)$$

$$\zeta = 1, \Upsilon = 7/2, \quad \varkappa_0 = 6.45 \cdot 10^{22} \text{ см}^5 \cdot \text{К}^{7/2} \cdot \Gamma^{-2}, \quad \text{если } \varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T. \quad (1.98)$$

Для дисков из вещества с солнечным химическим составом [7, 69, 70].

$$\begin{aligned} \zeta = \Upsilon = 0, \quad \varkappa_0 = 0.335 \text{ см}^2/\Gamma, \quad \text{если } \varkappa_T \gg \varkappa_{\text{ff}}, \\ \zeta = 1, \Upsilon = 7/2, \quad \varkappa_0 \approx 5 \cdot 10^{24} \text{ см}^5 \cdot \text{К}^{7/2} \cdot \Gamma^{-2}, \quad \text{если } \varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T, \end{aligned} \quad (1.99)$$

Расчеты поглощения в плазме с учетом коллективных и квантовых эффектов, вырождения электронов и т.д., производимые проектом OPAL Ливерморской лабораторией [71] (см. Рис. 1.5) лучше согласуются с немного другой зависимостью от температуры в области доминирующего поглощения:

$$\zeta \approx 1, \Upsilon \approx 5/2, \quad \varkappa_0 \approx 1.5 \cdot 10^{20} \text{ см}^5 \cdot \text{К}^{5/2} \cdot \Gamma^{-2}, \quad \text{если } \varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T. \quad (1.100)$$

Вводим для удобства описания безразмерную переменную⁵

$$\sigma = \frac{2\Sigma(z)}{\Sigma_0},$$

а также безразмерные функции этой переменной:

$$p = P(z)/P_c, \quad \theta = T(z)/T_c, \quad z' = z/z_0, \quad j = \rho(z)/\rho_c \quad \text{и} \quad q = Q(z)/Q_0.$$

Символами P_c , T_c , ρ_c , обозначены физические величины в экваториальной плоскости диска. $Q_0 = (ac/4)T_{\text{eff}}^4$ — чернотельный поток с одной поверхности диска. Перепишем систему уравнений (1.95) в следующем

⁵В оригинальной статье [59] параметром Σ_0 обозначена половина полной поверхностной плотности диска. Из-за этого есть отличия в числовых коэффициентах некоторых приведенных ниже по тексту формул по сравнению с формулами в [59].

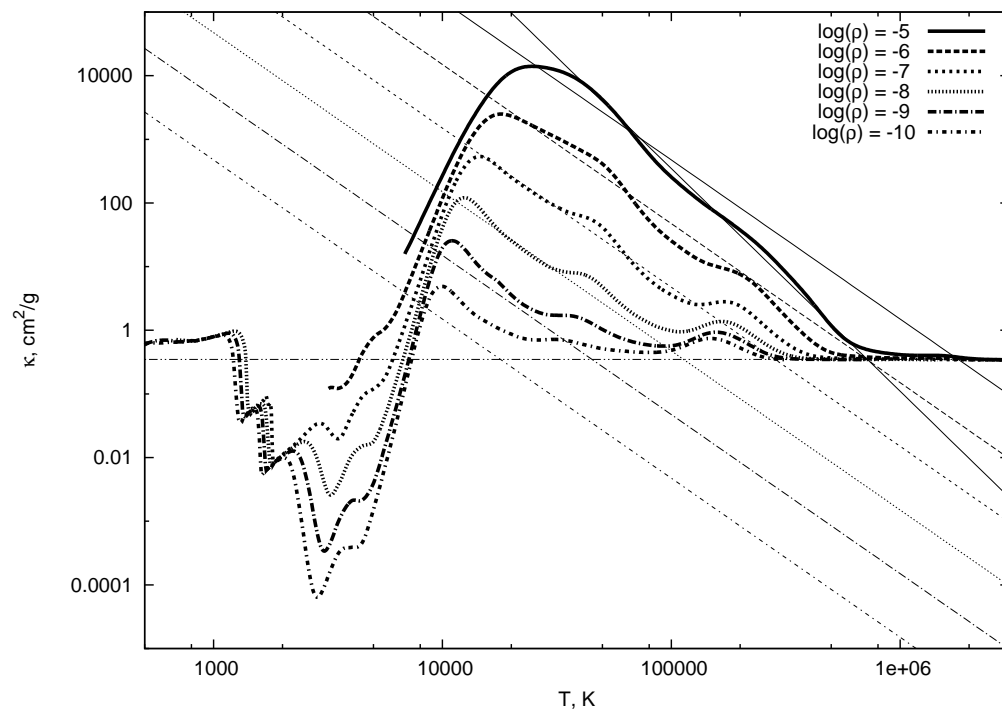


Рис. 1.5: Зависимость коэффициента непрозрачности от плотности и температуры по данным проекта OPAL [71] и расчетов для низкотемпературной области [72] в среде с солнечным химсоставом. Горизонтальная прямая соответствует величине коэффициента рассеяния на свободных электронах $\kappa_0 \simeq 0.34 \text{ см}^2/\text{г}$. Для плотности $\rho = 10^{-5} \text{ г см}^{-3}$ показаны две аппроксимации: (1.98) и более подходящая в области высоких температур зависимость $\kappa_R = 1.2 \times 10^{25} \rho T^{-7/2} \text{ см}^5 \text{ К}^{7/2}/\text{г}^2$.

виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{d\sigma} &= -\Pi_1 \Pi_2 z' ; & \Pi_1 &= \frac{\omega_K^2 z_0^2 \mu}{\Re T_c} ; \\
 \frac{dz'}{d\sigma} &= \Pi_2 \frac{\theta}{p} ; & \Pi_2 &= \frac{\Sigma_0}{2 z_0 \rho_c} ; \\
 \frac{dq}{d\sigma} &= \Pi_3 \theta ; & \Pi_3 &= \frac{3}{4} \frac{\alpha \omega_K \Re T_c \Sigma_0}{Q_0 \mu} \equiv \frac{\alpha \Re T_c \Sigma_0}{W_{r\varphi} \mu} ; \\
 \frac{d\theta}{d\sigma} &= -\Pi_4 \frac{q j^\zeta}{\theta^{\gamma+3}} ; & \Pi_4 &= \frac{3}{32} \left(\frac{T_{\text{ef}}}{T_c} \right)^4 \frac{\Sigma_0 \kappa_0 \rho_c^\zeta}{T_c^\gamma} .
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Удельная величина диссипации энергии $\varepsilon/\rho = \partial Q/\partial \Sigma$ определяет зависимость температуры от z . В принципе, интенсивное перемешивание в диске может привести к ситуации, когда выделение энергии на единицу массы не зависит от высоты z . Величина ε при этом зависит только от плотности. При этом исчезает температурная зависимость в уравнении, описывающем выделение энергии (третья строчка в (1.101)), и Π_3 становится равным 1.

Чтобы найти решение (1.101), то есть найти четыре функции $p(\sigma)$, $z'(\sigma)$, $q(\sigma)$, $\theta(\sigma)$ и четыре неизвестных параметра, надо поставить восемь граничных условий — четыре на поверхности диска и четыре в его плоскости симметрии. В [59] проведено численное интегрирование системы уравнений и затабулированы значения $\Pi_{1..4}$. Эти значения приведены в Таблицах 1.1 и 1.2. На Рис. 1.7 изображено решение для функций $z'(\sigma)$, $p(\sigma)$, $\theta(\sigma)$ и $q(\sigma)$ в режиме непрозрачности по Крамерсу. Другие случаи показаны в работе [59].

В плоскости симметрии диска при $\sigma = 0$ имеем очевидные условия:

$$p(0) = 1; \quad z'(0) = 0; \quad q(0) = 0; \quad \theta(0) = 1.$$

Естественным образом также устанавливаются два первых граничных условия на поверхности диска:

$$z'(1) = 1; \quad q(1) = 1.$$

Поверхность диска определяем как уровень, на котором происходит термализация излучения. Из приближенного решения уравнений переноса излучения и гидростатического баланса вблизи поверхности диска могут

быть найдены граничные условия на давление и температуру. Обращаем внимание, что есть разница в граничных условиях для разных режимов непрозрачности (см. рис. 1.6). В зоне В с преобладающей ролью поглощения за поверхность диска принят уровень фотосферы, где оптическая толщина, рассчитываемая снаружи, равна $2/3$. В зоне с преобладающей ролью томсоновского рассеяния в качестве поверхности диска берется уровень, где эффективная оптическая глубина, рассчитываемая с учетом процессов рассеяния, равна 1.

Приведем вывод оставшихся граничных условий в двух режимах непрозрачности.

Будем измерять оптическую толщину τ с поверхности диска по направлению к его плоскости симметрии, то есть по направлению уменьшения z . На глубине фотосферы диска, где $\tau \sim 1$, используем решение уравнений переноса излучения и лучистого равновесия для фотосферы в условиях ЛТР для не зависящего от частоты коэффициента поглощения в приближении Эддингтона [66]:

$$\frac{T}{T_{\text{eff}}} = \left(\frac{1 + \frac{3}{2}\tau}{2} \right)^{1/4}. \quad (1.102)$$

Непрозрачность по Крамерсу. Пусть безразмерная переменная $\sigma = 1$ на уровне, где $\tau = 2/3$ и $T = T_{\text{eff}}$. Используя определение параметра Π_4 , получаем граничное условие на безразмерную температуру θ :

$$\theta(\sigma = 1) = \left[\frac{16}{3} \frac{\Pi_4}{\tau_0} \right]^{1/4},$$

где мы ввели безразмерный параметр τ_0 , пропорциональный полной оптической толщине аккреционного диска (см. (1.98)):

$$\tau_0 = \frac{\Sigma_0 \kappa_0 \rho_c}{2 T_c^{7/2}}.$$

Эта величина является свободным параметром задачи и меняется в широких пределах (от нескольких единиц до $\sim 10^6$).

Чтобы определить граничное условие для безразмерного давления, используем уравнение гидростатического баланса (первое в системе (1.95)). Разделим обе его части на коэффициент непрозрачности κ_R и произведем замену переменных с помощью формулы

$$d\tau = -\kappa_R \rho dz.$$

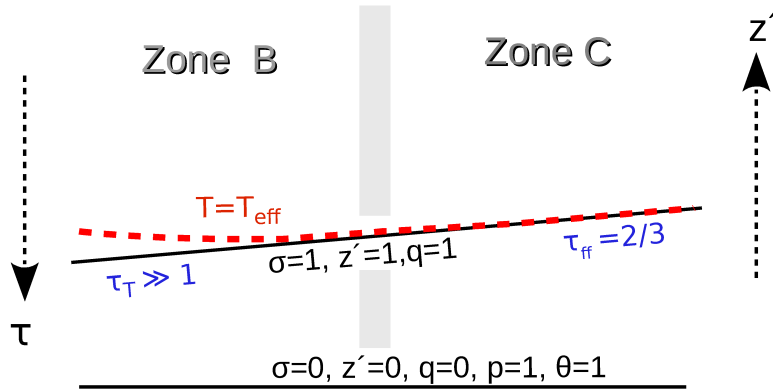


Рис. 1.6: Поверхности, на которых заданы граничные условия для уравнений вертикальной структуры: верхняя поверхность диска и его экваториальная плоскость, показанные сплошными линиями. Для них указаны значения безразмерной координаты σ и безразмерных функций. Стрелки показывают направления увеличения безразмерной высоты в диске $z' = z/z_0$ и оптической толщины τ , рассчитываемой снаружи по направлению к экваториальной плоскости. Зоны диска с доминированием разных процессов в непрозрачности условно разделены серой полосой. В зоне В (слева) оптическая глубина на поверхности диска $\tau_T(\tau^* = 1) \gg 1$, а в зоне С (справа) $\tau_{\text{ff}} = 2/3$. Штриховой линией качественно изображен уровень, на котором температура диска равна эффективной температуре исходящего излучения.

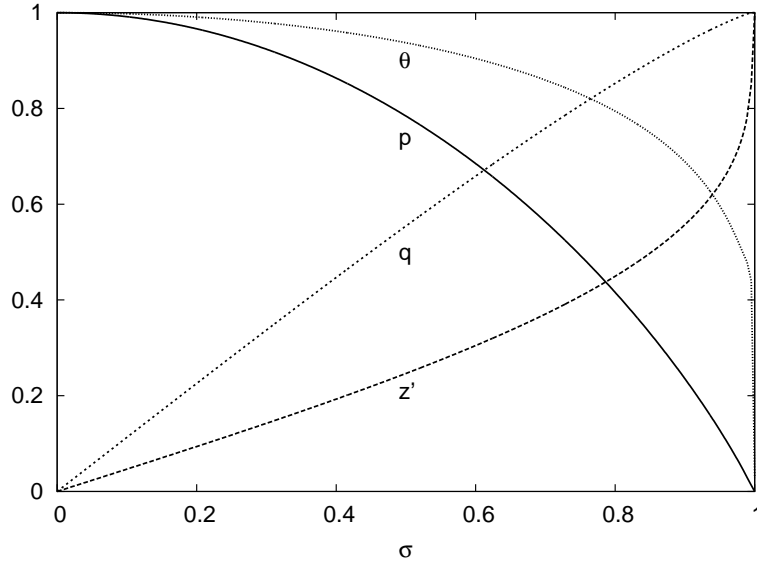


Рис. 1.7: Решение системы (1.101) в виде безразмерных функции от безразмерной переменной σ , пропорциональной колонковой плотности: температура $\theta(\sigma)$, давление $p(\sigma)$, поток излучения $q(\sigma)$ и высота в диске $z'(\sigma)$. В плоскости симметрии диска $\sigma = 0$, на поверхности $\sigma = 1$.

Получим с учетом (1.98):

$$\frac{1}{2} \frac{dP^2}{d\tau} = \frac{\omega_K^2 z_0 \Re T^{9/2}}{\kappa_0 \mu}.$$

Вблизи фотосферы координата z практически не меняется и равна z_0 . Интегрируя последнее уравнение от $\tau = 0$ до $\tau = 2/3$, получаем в результате граничное условие на безразмерное давление:

$$p(\sigma = 1) = \left[\frac{3}{16 \cdot 2^{1/8}} \frac{\Pi_1 \Pi_2}{\Pi_4} \left(\frac{16}{3} \frac{\Pi_4}{\tau_0} \right)^{17/8} f(\tau = 2/3) \right]^{1/2},$$

где

$$f(\tau) = \int_0^\tau \left(1 + \frac{3}{2} \tilde{\tau} \right)^{9/8} d\tilde{\tau}, \quad f(\tau = 2/3) \approx 1.05.$$

На Рис. 1.7 изображено решение системы уравнений для данного случая.

Томсоновское рассеяние. Если в фотосфере велика роль процессов рассеяния, то термализация наступает на глубине, где так называемая эффективная оптическая толщина диска порядка 1:

$$\tau^* = - \int_{z_0}^{\infty} (\kappa_{\text{ff}} \kappa_{\text{T}})^{1/2} \rho \, dz \approx 1.$$

Эффективная оптическая толщина набирается как $\sqrt{\kappa_{\text{ff}}(\kappa_{\text{T}} + \kappa_{\text{ff}})} \rho \, dz$ (см., например, [73, 74]), что приближенно дает последнее условие. На этой глубине оптическая толщина по рассеянию намного превосходит 1:

$$\tau_{\text{T}}(\tau^* = 1) = - \int_{z_0}^{\infty} \kappa_{\text{T}} \rho \, dz \gg 1$$

и $T \simeq T_{\text{eff}} (3 \tau_{\text{T}}/4)^{1/4}$ из (1.102). Таким образом, граничное условие на безразмерную температуру имеет следующий вид:

$$\theta(\sigma = 1) \simeq \left[\frac{8 \Pi_4 \tau_{\text{T}}(\tau^* = 1)}{\kappa_{\text{T}} \Sigma_0} \right]^{1/4}.$$

Для давления можно соответственно получить:

$$p(\sigma = 1) = 2 \Pi_1 \Pi_2 \frac{\tau_{\text{T}}(\tau^* = 1)}{\kappa_{\text{T}} \Sigma_0}.$$

Удобным свободным параметром оказывается величина

$$\delta = \frac{\kappa_{\text{T}} \Sigma_0 / 2}{\tau_{\text{T}}(\tau^* = 1)}, \quad (1.103)$$

которая представляет собой отношение оптической толщины по рассеянию от поверхности диска до его плоскости симметрии к оптической толщине по рассеянию на глубине термализации.

1.5.3 Радиальные зависимости физических параметров в стационарных α -дисках

Интерпретация наблюдений источников с аккреционными дисками как протяженных объектов, свойства которых существенно изменяются

Таблица 1.1: Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для томсоновской непрозрачности

в зависимости от десятичного логарифма свободного параметра δ .

$\log \delta$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
6.00	6.99	0.492	1.150	0.460
5.80	6.96	0.493	1.150	0.460
5.60	6.92	0.495	1.150	0.460
5.40	6.87	0.496	1.150	0.460
5.20	6.82	0.498	1.150	0.460
5.00	6.77	0.500	1.150	0.460
4.80	6.70	0.503	1.150	0.460
4.60	6.63	0.505	1.150	0.460
4.40	6.55	0.508	1.150	0.460
4.20	6.47	0.512	1.150	0.460
4.00	6.37	0.516	1.150	0.460
3.80	6.26	0.520	1.149	0.460
3.60	6.13	0.525	1.149	0.460
3.40	5.99	0.531	1.149	0.460
3.20	5.84	0.538	1.149	0.460
3.00	5.67	0.546	1.149	0.459
2.80	5.48	0.555	1.148	0.459
2.60	5.26	0.566	1.147	0.458
2.40	5.02	0.578	1.146	0.458
2.20	4.76	0.593	1.145	0.456
2.00	4.47	0.610	1.142	0.454
1.80	4.15	0.629	1.138	0.450
1.60	3.81	0.652	1.133	0.444
1.40	3.43	0.678	1.126	0.435
1.20	3.03	0.707	1.117	0.420
1.00	2.61	0.740	1.105	0.398
0.80	2.19	0.776	1.091	0.366
0.60	1.77	0.813	1.075	0.324
0.40	1.38	0.849	1.059	0.274
0.20	1.03	0.884	1.044	0.219
0.00	0.74	0.914	1.032	0.166

height

Таблица 1.2: Безразмерные параметры решения уравнений вертикальной структуры для непрозрачности по Крамерсу в зависимости от десятичного логарифма свободного параметра τ_0 . В последнем столбце приведен десятичный логарифм от оптической

$\log \tau_0$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	$\log \tau$
6.00	7.75	0.465	1.131	0.399	6.046
5.80	7.71	0.466	1.131	0.399	5.847
5.60	7.67	0.468	1.131	0.399	5.646
5.40	7.62	0.469	1.131	0.399	5.445
5.20	7.56	0.471	1.131	0.399	5.245
5.00	7.50	0.473	1.131	0.399	5.045
4.80	7.44	0.475	1.131	0.399	4.845
4.60	7.36	0.477	1.131	0.399	4.644
4.40	7.27	0.480	1.131	0.399	4.444
4.20	7.18	0.483	1.131	0.399	4.244
4.00	7.07	0.487	1.131	0.399	4.043
3.80	6.95	0.491	1.131	0.399	3.843
3.60	6.82	0.496	1.131	0.399	3.643
3.40	6.67	0.501	1.131	0.399	3.443
3.20	6.50	0.508	1.131	0.398	3.243
толщи диска (1.116). 3.00	6.31	0.515	1.131	0.398	3.043
2.80	6.10	0.524	1.130	0.398	2.842
2.60	5.87	0.534	1.130	0.398	2.642
2.40	5.60	0.546	1.129	0.397	2.442
2.20	5.31	0.560	1.128	0.397	2.241
2.00	4.98	0.576	1.126	0.395	2.040
1.80	4.62	0.596	1.124	0.393	1.839
1.60	4.23	0.619	1.120	0.389	1.638
1.40	3.79	0.647	1.114	0.383	1.434
1.20	3.33	0.679	1.106	0.371	1.232
1.00	2.83	0.716	1.095	0.354	1.025
0.80	2.34	0.756	1.081	0.326	0.819
0.60	1.86	0.798	1.065	0.286	0.613
0.40	1.42	0.838	1.050	0.237	0.406
0.20	1.05	0.876	1.036	0.185	0.202
0.00	0.75	0.908	1.025	0.136	-0.001
height					

от центра к периферии, требует расчета радиальных зависимостей физических параметров в диске. Для этого необходимо решить уравнение переноса момента импульса, что сделано в случае стационарного диска в §1.4, а также необходимо решить уравнения вертикальной структуры, чему посвящен предыдущий раздел. В работе Сулейманова и др. [68] были даны аналитические аппроксимации радиальных зависимостей параметров в диске, которые мы опишем ниже.

Будем рассматривать следующие физические параметры: поверхностную плотность $\Sigma(r)$, полутолщину диска $z_o(r)$, плотность $\rho_c(r)$ и температуру $T_c(r)$ в плоскости симметрии диска при $z = 0$. Необходимо договориться, что мы считаем поверхностью диска. При исследовании наблюдаемых спектров оказывается удобным принять, что поверхность диска соответствует уровню, на котором Росселандова оптическая глубина $\tau_R = 2/3$.

Вертикальная структура диска определяется уравнениями (1.101) при известных значениях безразмерных параметров $\Pi_{1..4}$. Выразим из (1.101) величины z_0 , Σ , ρ_c и T_c . В получающиеся выражения будут входить основные задаваемые параметры диска (темп аккреции, масса центрального объекта, параметр турбулентности α) и радиальная структура через $\omega_K(r)$ и $W_{r\varphi}(r)$. Радиальную зависимость интегрированной по вертикали компоненты тензора вязких напряжений $W_{r\varphi}(r)$ берем для случая стационарного диска, — формулу (1.76), — а угловую скорость вращения полагаем равной кеплеровской $\omega_K = \sqrt{GM/R^3}$. Распределение $W_{r\varphi}(r)$ определяет распределение по радиусу потока излучения с поверхности диска. Напомним, что в диске с постоянным темпом аккреции функция $f(R)$, которая описывает влияние граничных условий на поверхностное натяжение $W_{r\varphi}(r)$, записывается так (ср. с (1.51)):

$$f(r) = \frac{2\pi W_{r\varphi}(r)}{\dot{M}\omega} = \frac{F}{\dot{M}h}.$$

Для тонкого диска при $\dot{M} = const$ при нулевом тензоре вязких напряжений на внутреннем радиусе справедливо

$$f(r) = \frac{8\pi}{3} \frac{Q_{\text{vis}}}{\dot{M}\omega^2} = 1 - \frac{h_{\text{in}}}{h}.$$

Для случая $\dot{M} = \dot{M}(r, t) \neq const$ надо использовать функцию $f(r)$ в

общем виде:

$$f(r) = \frac{F(h, t)}{\dot{M}_{\text{in}}(t) h} = \frac{F(h, t)/h}{\partial F(h, t)/\partial h|_{h=h_{\text{in}}}} . \quad (1.104)$$

Отнормируем темп аккреции на внутренней границе диска и другие параметры диска на их характерные значения в двойных системах с компонентами звездных масс:

$$\begin{aligned} M &= m_x M_{\odot}, & \dot{M} &= \dot{M}_{17} \times 10^{17} \text{ г/с}, \\ r &= R_7 \times 10^7 \text{ см (зона В)} \quad \text{или} \quad r = R_{10} \times 10^{10} \text{ см (зона С)}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

В качестве характерного значения коэффициента \varkappa_0 из выражения (1.96) мы используем в зоне В величину $\varkappa_{\text{T}}^* = 0.335 \text{ см}^2/\text{г}$, полученную аппроксимацией к табличным значениям [69, 70], для среды с весовыми долями водорода $X = 0.69$ и гелия $Y = 0.27$, и величину $\varkappa_0^* = 5 \times 10^{24} \text{ см}^5 \text{ г}^{-2} \text{ К}^{7/2}$ в зоне С [7, глава 5]. Соответствующий молекулярный вес μ равен 0.62. В среде с таким химическим составом поглощение излучения происходит, главным образом, в результате фотоионизации ионов тяжелых элементов. Если в формулах радиальных зависимостей физических параметров диска положить все параметры $\Pi_{1..4}$ равными 1, $\varkappa_{\text{T}} = 0.4 \text{ см}^2/\text{г}$, $\varkappa_0 = 6.4 \times 10^{22} \text{ см}^5 \text{ г}^{-2} \text{ К}^{7/2}$ и $\mu = 0.5$, то они совпадут с выражениями из [6, глава 3], выведенными для водородных дисков.

Зона В В этой зоне основной вклад в непрозрачность дают процессы рассеяния на свободных электронах, газовое давление больше радиационного. Используя формулу (1.76) для тепла, выделяющегося в диске из-за вязкости, и нормируя параметры согласно (1.105), получим после решения системы алгебраических уравнений с $\Pi_{1..4}$ (правой части систе-

мы (1.101)):

$$\begin{aligned}
 z_0/r &= 0.0092 m_x^{-7/20} \dot{M}_{17}^{1/5} \alpha^{-1/10} R_7^{1/20} f(r)^{1/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{-2/5} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{1/10} \Pi_z, \\
 \Sigma_0 &= 5.1 \times 10^3 m_x^{1/5} \dot{M}_{17}^{3/5} \alpha^{-4/5} R_7^{-3/5} f(r)^{3/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{4/5} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{-1/5} \Pi_\Sigma [\Gamma/\text{см}^2], \\
 \rho_c &= 2.8 \times 10^{-2} m_x^{11/20} \dot{M}_{17}^{2/5} \alpha^{-7/10} R_7^{-33/20} f(r)^{2/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{6/5} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{-3/10} \Pi_\rho [\Gamma/\text{см}^3], \\
 T_c &= 8.2 \times 10^6 m_x^{3/10} \dot{M}_{17}^{2/5} \alpha^{-1/5} R_7^{-9/10} f(r)^{2/5} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{1/5} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{1/5} \Pi_T [\text{K}].
 \end{aligned} \tag{1.106}$$

Комбинации безразмерных параметров Π_z , Π_Σ , Π_ρ и Π_T связаны следующим образом с параметрами $\Pi_{1..4}$:

$$\begin{aligned}
 \Pi_z &= \Pi_1^{1/2} \Pi_3^{1/10} \Pi_4^{-1/10} \approx 2.6, \\
 \Pi_\Sigma &= \Pi_3^{4/5} \Pi_4^{1/5} \approx 0.96, \\
 \Pi_\rho &= \Pi_1^{-1/2} \Pi_2^{-1} \Pi_3^{7/10} \Pi_4^{3/10} \approx 0.67, \\
 \Pi_T &= \Pi_3^{1/5} \Pi_4^{-1/5} \approx 1.2.
 \end{aligned} \tag{1.107}$$

Их величины в зависимости от свободного параметра δ показаны на Рис. 1.8 слева. Свободный параметр δ определяется выражением (1.103) и может быть оценен из полной оптической толщи диска τ и параметров диска следующим образом:

$$\delta = \sqrt{\frac{\kappa_0 \rho_c T_c^{-7/2}}{\varkappa_T}} \tau X(\delta), \tag{1.108}$$

где $\tau = \varkappa_T \Sigma_0/2$ и численный множитель

$$X(\delta) = \delta \int_{1-1/\delta}^1 (P/P_c)^{1/2} (T/T_c)^{-9/4} d\sigma \sim 2 \tag{1.109}$$

не зависит от абсолютных значений параметров диска и определяется в результате интегрирования уравнений вертикальной структуры. Значение δ может быть найдено рекурсивно с любой точностью, но такой

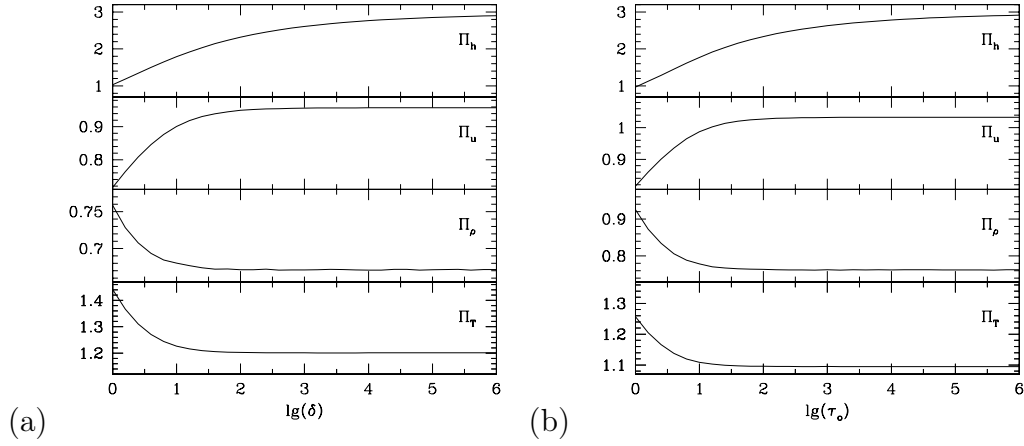


Рис. 1.8: Слева: зависимости безразмерных факторов Π_z , Π_Σ , Π_ρ и Π_T для зоны В (формулы 1.107). Справа: те же безразмерные факторы для зоны С (формулы 1.113). По горизонтальным осям отложены логарифмы безразмерных параметров, которые характеризуют оптическую толщину диска в каждой зоне. Зависимости заимствованы из [68] и построены для значений из Таблицы 1.1 (графики слева) и Таблицы 1.2 (графики справа).

подход будет избыточен в смысле реального применения полученных радиальных зависимостей. Достаточно использовать следующую оценку:

$$\delta = 440 m_x^{-1/20} \dot{M}_{17}^{1/10} \alpha^{-4/5} R_7^{3/20} f(R)^{1/10} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{21/20} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{-1/5} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{1/2}. \quad (1.110)$$

Вблизи центрального объекта при больших темпах аккреции в диске имеется зона с преобладающей ролью давления излучения (зона А). Радиус, на котором сравниваются давление излучения $aT_c^4/3$ и давление газа $\rho_c \mathcal{R}T_c/\mu$ в плоскости симметрии диска (граница между зонами А и В, [2]), приближенно оценивается как

$$R_{AB} \sim 10^7 m_x^{1/3} \dot{M}_{17}^{16/21} \alpha^{2/21} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{8/21} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*}\right)^{6/7} \text{ см.} \quad (1.111)$$

Здесь взяты характерные значения безразмерных параметров $\Pi_{1..4}$ и $f(r) = 1$.

При уменьшении темпа аккреции зона В сдвигается по радиусу к центру диска, уступая место зоне С.

Зона С Основной вклад в непрозрачность дают процессы поглощения свободно-свободными и связанно-свободными переходами, и газовое давление много больше радиационного. Так же, как и раньше, из правой части системы (1.101) и выражений (1.76) и (1.105), можем найти радикальные зависимости параметров диска:

$$\begin{aligned}
 z_0/r &= 0.020 m_x^{-3/8} \dot{M}_{17}^{3/20} \alpha^{-1/10} R_{10}^{1/8} f(r)^{3/20} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{-3/8} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{1/20} \Pi_z, \\
 \Sigma_0 &= 33 m_x^{1/4} \dot{M}_{17}^{7/10} \alpha^{-4/5} R_{10}^{-3/4} f(r)^{7/10} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{3/4} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{-1/10} \Pi_\Sigma [\Gamma/\text{см}^2], \\
 \rho_c &= 8.0 \times 10^{-8} m_x^{5/8} \dot{M}_{17}^{11/20} \alpha^{-7/10} R_{10}^{-15/8} f(r)^{11/20} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{9/8} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{-3/20} \Pi_\rho [\Gamma/\text{см}^3], \\
 T_c &= 4.0 \times 10^4 m_x^{1/4} \dot{M}_{17}^{3/10} \alpha^{-1/5} R_{10}^{-3/4} f(r)^{3/10} \left(\frac{\mu}{0.6}\right)^{1/4} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*}\right)^{1/10} \Pi_T [\text{К}],
 \end{aligned}
 \tag{1.112}$$

Напомним, что \dot{M}_{17} — нормированный темп аккреции на внутренней границе диска. Заметим, что при $\dot{M}(r, t) \neq const$ в формулах (1.106) и (1.112) надо подставлять в качестве темпа аккреции величину на внутренней границе диска. Это удобно, поскольку именно она определяет в большинстве случаев энергетику наблюдаемых аккрецирующих систем. $M_{\text{in}}(t) f(r) = F(h, t)/h$.

С учетом записи $f(r) = F/(\dot{M}_{\text{in}} h)$ формулы (1.106) и (1.112) радикальных зависимостей в диске могут быть использованы и для описания “мертвых” дисков или “дисков-накопителей” [42], то есть дисков, в которых по каким-то причинам невозможен уход вещества через его внутреннюю границу, то есть $\dot{M}_{\text{in}} = 0$. Так как внутренний темп аккреции и $f(r)$ всегда встречаются в виде произведения в выражениях для физических параметров, во всех формулах их комбинация может быть заменена отношением потока вязких сил к удельному моменту импульса согласно (1.104).

Комбинации безразмерных параметров связаны с параметрами $\Pi_{1..4}$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Pi_z &= \Pi_1^{19/40} \Pi_2^{-1/20} \Pi_3^{1/10} \Pi_4^{-1/20} \approx 2.6, \\
 \Pi_\Sigma &= \Pi_1^{1/20} \Pi_2^{1/10} \Pi_3^{4/5} \Pi_4^{1/10} \approx 1.03, \\
 \Pi_\rho &= \Pi_1^{-17/40} \Pi_2^{-17/20} \Pi_3^{7/10} \Pi_4^{3/20} \approx 0.76, \\
 \Pi_T &= \Pi_1^{-1/20} \Pi_2^{-1/10} \Pi_3^{1/5} \Pi_4^{-1/10} \approx 1.09,
 \end{aligned} \tag{1.113}$$

и показаны на Рис. 1.8(b) в зависимости от свободного параметра τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{\varkappa_0 \rho_c}{T_c^{7/2}} \frac{\Sigma_0}{2} = 500 \frac{\dot{M}_{17}^{1/5} f(r)^{1/5}}{\alpha^{4/5}} \left(\frac{\mu}{0.6} \right) \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*} \right)^{2/5} \frac{\Pi_3^{4/5} \Pi_4^{3/5}}{\Pi_1^{1/5} \Pi_2^{2/5}}, \tag{1.114}$$

приблизительно равного

$$\tau_0 \sim 300 \dot{M}_{17}^{1/5} \alpha^{-4/5} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*} \right)^{2/5}. \tag{1.115}$$

Полная оптическая толщина диска

$$\tau = \int_0^h \varkappa_0 \rho^2 T^{-7/2} dz \tag{1.116}$$

определяется в процессе численного решения уравнений вертикальной структуры и однозначно зависит от τ_0 (см. Таблицу 1.2). Приведем также формулу, аппроксимирующую табличные значения с ошибкой меньше 1% при $\tau_0 > 6$:

$$\tau \approx 1.042 \tau_0^{1.006}. \tag{1.117}$$

Зависимости параметров в зонах В и С изображены на рис. 1.9 и 1.10. Граница между зонами В и С приблизительно определяется из равенства \varkappa_T и $\varkappa_0 \rho T^{-7/2}$ в плоскости симметрии диска:

$$R_{BC} \sim 5 \times 10^7 m_x^{1/3} \dot{M}_{17}^{2/3} \left(\frac{\mu}{0.6} \right)^{-1/3} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_0^*} \right)^{-2/3} \left(\frac{\varkappa_T}{\varkappa_T^*} \right)^{4/3} \text{ см}$$

для характерных значений безразмерных параметров $\Pi_{1..4}$ и $f(r) = 1$.

За внешнюю границу зоны С примем радиус, где начинается рекомбинация атомов водорода (при $T_{\text{eff}} \sim 10^4$ К). При этом в диске развивается тепловая неустойчивость, а в переносе энергии к поверхности начинает играть роль конвекция из-за значительного увеличения коэффициента

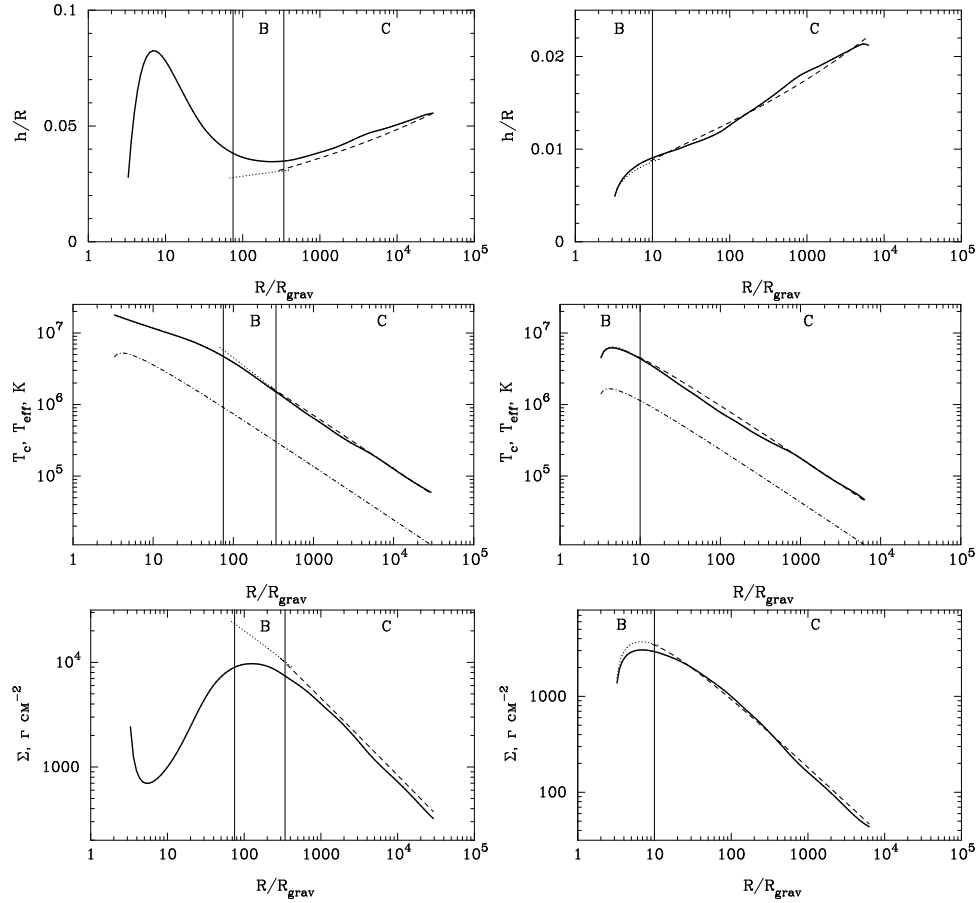


Рис. 1.9: Сверху вниз: относительная полутолщина диска z_0/r , температура центральная T_c и эффективная T_{eff} (штрих-пунктир), поверхностная плотность Σ_0 . Параметры диска: $m_x = 10$, $\mu = 0.62$, $\alpha = 0.3$, слева: $M_{17} = 33.6$ или $L_{\text{bol}} = 0.2 L_{\text{Edd}}$, справа: $M_{17} = 0.336$ или $L_{\text{bol}} = 0.002 L_{\text{Edd}}$. Сплошная линия — результат численного решения [68], пунктир — формулы (1.106) в зоне В, штриховая линия — формулы (1.112) в зоне С. Рисунки из работы [68].

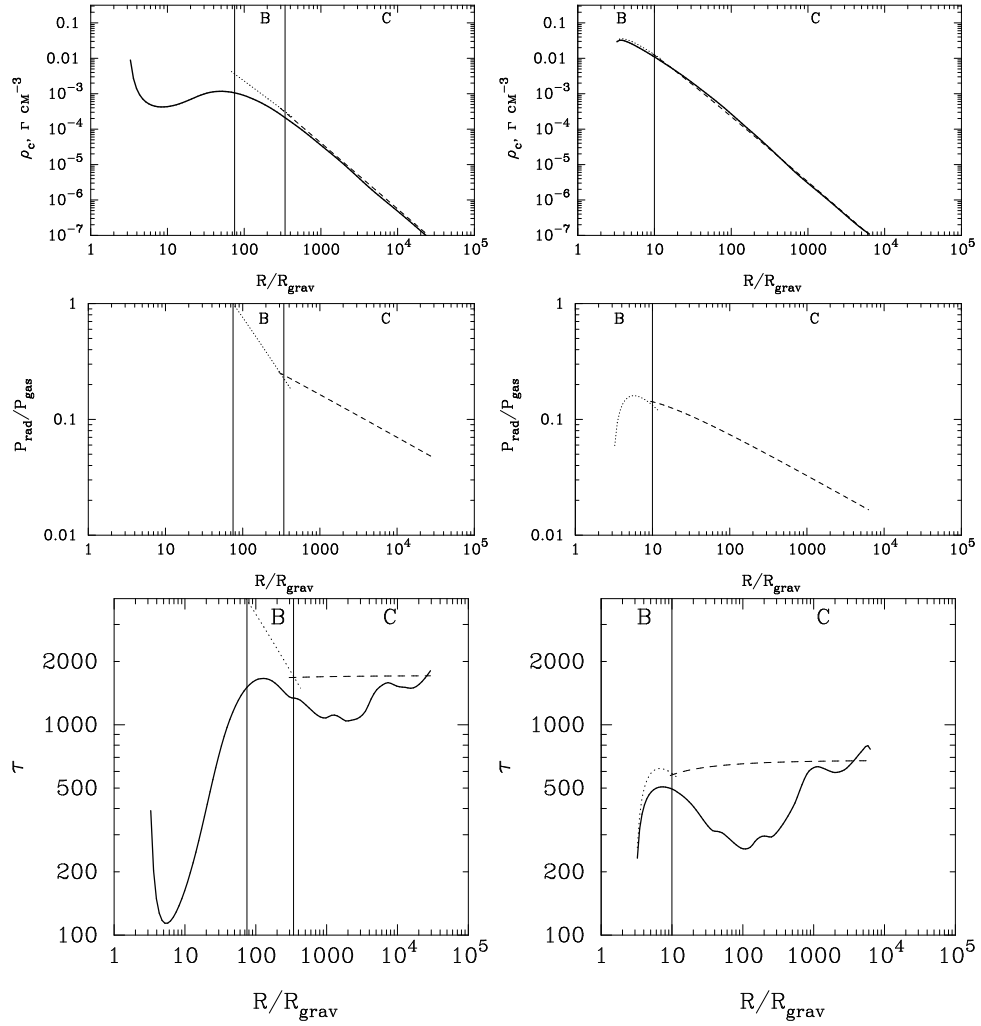


Рис. 1.10: Сверху вниз: плотность в плоскости симметрии ρ_c , отношение лучистого к газовому давлению, оптическая толщина τ . Параметры диска: $m_x = 10$, $\mu = 0.62$, $\alpha = 0.3$, слева: $\dot{M}_{17} = 33.6$ или $L_{\text{bol}} = 0.2 L_{\text{Edd}}$, справа: $\dot{M}_{17} = 0.336$ или $L_{\text{bol}} = 0.002 L_{\text{Edd}}$. Обозначения как на Рис. 1.9. Рисунки из работы [68].

непрозрачности вещества [12, 55]. В тех областях уже нельзя аппроксимировать коэффициент непрозрачности κ_R законом Крамерса. Приравняв правую часть (1.76) и $\sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4$, получим:

$$R_C \approx 3.5 \times 10^{10} m_x^{1/3} \dot{M}_{17}^{1/3} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{5000 \text{ K}} \right)^{-4/3} \text{ см.} \quad (1.118)$$

При учете облучения внешних частей диска центральным потоком граница R_C сдвигается дальше от центра. Это происходит в случае, если поток рентгеновского излучения, падающий на поверхность диска, термализуется в его внешних слоях и нагревает их так, что эффективная температура поверхности диска не опускается ниже $\sim 10^4$ К [61].

Толщина диска. Для часто имеющего интерес интервала значений общих параметров диска величины $\lg(\delta)$ и $\lg(\tau_0)$ лежат в пределах от 2 до 4. Для этих значений рассмотренные комбинации из величин $\Pi_{1,2,3,4}$ практически не меняются с радиусом, и внутри каждой зоны можно использовать характерные значения:

$$(\text{зона В}) \quad \Pi_z \approx 2.6, \quad \Pi_\Sigma = 0.96, \quad \Pi_\rho = 0.67, \quad \Pi_T = 1.2, \quad (1.119)$$

$$(\text{зона С}) \quad \Pi_z \approx 2.6, \quad \Pi_\Sigma = 1.03, \quad \Pi_\rho = 0.76, \quad \Pi_T = 1.09. \quad (1.120)$$

Рассмотрим диск, вещество которого состоит исключительно из водородной плазмы ($\mu = 0.5$), и примем величину непрозрачности $\kappa_R = 6.4 \times 10^{22} \rho T^{-7/2} \text{ см}^2/\text{г}$ (Като и др. [6]; в работе [2] использована близкая величина), которая определяется только свободно-свободными переходами электронов в плазме. Она на два порядка меньше величины непрозрачности для связанно-свободных переходов κ_0^* , однако результирующее изменение физических величин будет подавлено низкими степенями, в которых коэффициент непрозрачности входит в выражения (1.112). Например, полутолщина диска изменится за счет непосредственного уменьшения κ_0 и μ , а также Π_z , так как τ_0 упадет почти в 10 раз (см. (1.114) и рис. 1.8b). Таким образом, получим, что в случае $\mu = 0.5$ полутолщина диска z_0 на $\sim 25\%$ меньше, чем при $\mu = 0.62$.

Численное решение уравнений вертикальной структуры, описанное в данном разделе, дает бóльшую толщину диска по сравнению с толщиной вертикально-однородного диска, или так называемым “характерным гидростатическим масштабом”. Последний оценивается как v_s/ω , где v_s

— скорость звука в плоскости симметрии. Наличие фактора двойки было указано в [2], оно объясняется неоднородностью распределения плотности и температуры по толщине диска. Точнее, этот фактор порядка $\Pi_z \sim \sqrt{\Pi_1} \sim 2.5$, как можно видеть из первой строчки системы (1.101):

$$z_0 = \sqrt{\Pi_1} \sqrt{\frac{\Re T_c}{\mu} \frac{1}{\omega_K}}. \quad (1.121)$$

1.6 Нестационарная дисковая аккреция

1.6.1 Основное уравнение нестационарной аккреции

Вспышки, наблюдаемые в источниках с аккрецией, например, в двойных системах, в активных ядрах галактик, а также эволюция протопланетных систем представляют особенный интерес для исследования. Транзиентные явления могут быть вызваны неустойчивостями разных типов, которые, в общем случае, развиваются на разных временных шкалах. В данном разделе мы обратимся к постановке и решению задачи о нестационарной аккреции в вязком диске. Она необходима при описании транзиентных явлений, которые происходят на масштабах вязких времен вследствие перераспределения момента импульса вещества в диске по направлению от возмущенной конфигурации к стабильной.

В § 1.4.1 были введены величины, проинтегрированные по толщине диска: поверхностная плотность Σ_0 (1.43) и интегральная по толщине компонента тензора вязких напряжений $W_{r\varphi}$ (1.47). Выпишем снова полученные там уравнения сохранения массы и момента импульса (1.44) и (1.46):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma_0 v_r r), \\ \Sigma_0 v_r r \frac{\partial (\omega r^2)}{\partial r} &= -\frac{\partial}{\partial r} (W_{r\varphi} r^2). \end{aligned}$$

Подставляя комбинацию $\Sigma_0 v_r r$ из второй строчки в первую, получаем основное уравнение нестационарной аккреции:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\partial (\omega r^2) / \partial r} \frac{\partial}{\partial r} (W_{r\varphi} r^2) \right]. \quad (1.122)$$

Оно является уравнением диффузионного типа, то есть параболическим уравнением второго порядка в частных производных.

Интегрированная по толщине компонента тензора записывается в рамках градиентной гипотезы переноса момента импульса турбулентными движениями (1.40) следующим образом:

$$W_{r\varphi}(r, t) = 2 \int_0^{z_0} w_{r\varphi}^t dZ = 3 \omega_K \int_0^{z_0} \nu_t \rho dZ . \quad (1.123)$$

Если кинематический коэффициент турбулентной вязкости ν_t не зависит от z , получаем:

$$W_{r\varphi}(r, t) = \frac{3}{2} \omega_K \nu_t \Sigma_0 . \quad (1.124)$$

Введем в качестве новой независимой переменной величину удельного момента импульса $h(r) = v_\varphi(r) r = \omega r^2$. Будем обозначать удельный момент импульса свободной частицы, вращающейся в ньютоновском потенциале, величиной $h_K \equiv \sqrt{GM} r$. При этом $dr = 2 h_K dh_K / (GM)$.

В случае кеплеровских орбит уравнение (1.122) с учетом (1.124) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{3}{4} \frac{(GM)^2}{h^3} \frac{\partial^2 (\Sigma_0 \nu_t h)}{\partial h^2}, \quad h \equiv h_K . \quad (1.125)$$

Также рассмотрим альтернативную запись этого уравнения. Она удобна с точки зрения постановки граничных условий в эволюционирующем диске. Кроме того, она более подходит для α -дисков, в моделях которых вязкость параметризуется не коэффициентом ν_t , а параметром турбулентности α , который рассматривается как постоянная величина. Введем величину $F = 2\pi W_{r\varphi} r^2$, которая равна полному моменту вязких сил, действующих между соседними кольцами в диске. При постоянном темпе аккреции в диске, используя для $W_{r\varphi}$ запись типа (1.51), при условии обращения в ноль вязкого тензора напряжений на внутренней границе, $W_{r\varphi}(r = r_{\text{in}}) = 0$, можно записать величину полного момента вязких сил следующим образом:

$$F = \dot{M} \sqrt{GM} r \left(1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}} \right), \quad \dot{M} = \text{const} . \quad (1.126)$$

Как мы видим, F линейно пропорциональна удельному моменту импульса $h = \sqrt{GM} r$ на больших расстояниях.

В новых переменных уравнение переноса момента импульса (1.46) приобретает следующий вид (напомним, что v_r — отрицательная величина):

$$-2\pi \Sigma_0 v_r r = \dot{M}(r, t) = \left[\frac{\partial h}{\partial h_K} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial h_K}, \quad (1.127)$$

а уравнение (1.122):

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{(GM)^2}{h_K^3} \frac{\partial}{\partial h_K} \left(\left[\frac{\partial h}{\partial h_K} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial h_K} \right). \quad (1.128)$$

Для кеплеровского диска по определению $\partial h / \partial h_K \equiv 1$.

Метод решения уравнения нестационарной аккреции (1.125) зависит от вида коэффициента турбулентной вязкости $\nu_t = \nu_t(r, \Sigma_0)$. В рамках модели α -турбулентности, когда вязкий тензор напряжений пропорционален давлению в диске, вид $\nu_t(r, \Sigma_0)$, или, другими словами, связь между F и Σ_0 , необходимая для решения (1.128), может быть выведена из уравнений вертикальной структуры.

1.6.2 Решения линейного уравнения вязкой эволюции диска

Если F зависит линейно от поверхностной плотности Σ_0 , другими словами, ν_t является только функцией радиуса и не зависит от поверхностной плотности, то уравнение (1.125) становится линейным дифференциальным уравнением диффузионного типа. Люст [75] в 1952 г. нашел частные решения для уравнения вязкой аккреции, предложенного его учителем фон Вайцекером [76], и описал принципы построения общего решения для ограниченной и неограниченной в пространстве задачи.

Для неограниченных в пространстве дисков, Линден-Белл и Прингл [18] в 1974 г. использовали метод суперпозиции частных решений уравнения вязкой эволюции и, в частности, нашли функции Грина для двух типов граничных условий на внутренней границе. С помощью функции Грина можно найти F или Σ в любой момент времени и в любой точке для произвольного начального условия. Внутренний радиус диска в их решении совпадает с нулевой координатой. На больших временах зависимости в диске являются автомодельными, темп аккреции через внутреннюю границу падает степенным образом $\dot{M} \propto t^{-(1+l)}$, где параметр

$l < 1$. Прингл в [77] рассмотрел с помощью функций Грина неограниченный диск с центральным притоком момента импульса. Эта задача описывает эволюцию диска, окружающего двойную систему. Аналогичная задача решена в [78], с тем отличием, что внутренняя граница диска расположена на определенном ненулевом радиусе. Кинг и Риттер [79] рассмотрели эволюцию диска с ограниченным внешним радиусом и с постоянным ν_t и получили, что темп аккреции падает экспоненциально во времени. Также задача ограниченного диска была рассмотрена с помощью численных методов в [80]. Частный случай функции Грина для ограниченного диска был построен в работе [81] для нулевого внутреннего граничного условия. Полная функция Грина, которая может быть использована с произвольным начальным распределением для двух типов граничных условий, найдена в работе [82]. Там же описана процедура построения решения с ненулевым и переменным темпом аккреции на внешней границе.

Заметим, что во всех таких схемах характерное вязкое время $\tau_{\text{vis}} \sim r^2/\nu_t$ постоянно во времени.

1.6.3 Эволюция вязкого диска неограниченного размера

Приведем основные результаты работы Линден-Белла и Прингла [18]. Запишем кинематический коэффициент вязкости в виде

$$\nu_t = \nu_0 r^b .$$

Тогда связь $F = 3 \pi h \nu_t \Sigma_0$ (сравните с (1.124)) можно представить следующим образом:

$$F = 3 \pi h \nu_0 \Sigma_0 r^b . \quad (1.129)$$

Для кеплеровского диска ($h \equiv h_*$) уравнение момента вязких сил (1.125) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{3}{4} \nu_0 h^{2b-2} (G M)^{2-b} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} , \quad (1.130)$$

или, в форме, приближенной к записи Линден-Белла и Прингла,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa}{l} \right)^2 h^{1/l-2} \frac{\partial F}{\partial t} , \quad (1.131)$$

где постоянные параметры связаны следующим образом:

$$\frac{1}{2l} = 2 - b, \quad \kappa^2 = \frac{16l^2}{3\nu_0 (GM)^{1/2l}}. \quad (1.132)$$

Общее решение линейного уравнения (1.131) может быть получено разложением по собственным функциям и суперпозицией частных решений. Метод суперпозиции позволяет получить общее решение, удовлетворяющее заданным начальным или краевым условиям. Также в случае линейного уравнения используется метод разделения переменных.

Будем искать частное решение в виде $F(h, t) = f(h_c \xi) \exp(-st)$, где s — некоторая константа, по размерности обратная времени, $\xi = h/h_c$, а h_c — некоторое характерное значение удельного момента импульса вещества в диске. Подставляя такое $F(h, t)$ в уравнение (1.131), получим преобразованное по методу Ломмеля уравнение Бесселя (см. § 4.31 в [83]):

$$\frac{d^2 f}{dh^2} + \frac{s}{4} \left(\frac{\kappa}{l}\right)^2 h^{1/l-2} f = 0,$$

частным решением которого является

$$f(x) = (kx)^l [A(k) J_l(kx) + B(k) J_{-l}(kx)],$$

где J_l и J_{-l} — Бесселевы функции нецелого порядка, $k^2 = s \kappa^2 h_c^{1/l}$ и l — константы, $x = \xi^{1/2l} = (h/h_c)^{1/2l}$, ξ — нормированный удельный момент импульса. Общее решение равно суперпозиции частных решений со всеми такими значениями параметров k , $A(k)$, $B(k)$, которые обеспечивают выполнение поставленных граничных и начальных условий:

$$F(h, t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{k^2 t}{\kappa^2 h_c^{1/l}}\right) (kx)^l [A(k) J_l(kx) + B(k) J_{-l}(kx)] dk. \quad (1.133)$$

Например, условие $F(h) = 0$ при $h = 0$ приведет к обнулению всех коэффициентов при функциях Бесселя с отрицательным индексом: $B(k) \equiv 0$.

Был использован следующий метод определения коэффициентов $A(k)$ и $B(k)$. Рассмотрим при $t = 0$ решение, для которого выполняется условие нулю вязких напряжений в центре $F(h = 0) = 0$, записанное с помощью (1.133) в виде

$$F(h, t = 0) = \int_0^\infty (kx)^l A(k) J_l(kx) dk.$$

Воспользуемся теоремой обращения Ханкеля (глава II, теорема 19 в [84], также [83] и [85]) для непрерывных функций $f(k)$ в виде

$$f(k') = \int_0^{\infty} x J_l(k'x) \left[\int_0^{\infty} k f(k) J_l(kx) dk \right] dx \quad \text{при } l \geq -1 .$$

Заменив $f(k) = k^{l-1} A(k)$, видим, что интеграл в квадратных скобках равен $F(h, t = 0)/x^l$. Следовательно,

$$(k')^{l-1} A(k') = \int_0^{\infty} F(h) J_l(k'x) x^{1-l} dx , \quad (1.134)$$

где $F_0(h) \equiv F(h, t = 0)$. Отсюда можно определить коэффициенты $A(k')$.

Если задано начальное распределение $F_0(h)$, то решение линейного дифференциального уравнения (1.131) может быть построено как

$$F(h, t) = \int_0^{\infty} G(h, h_1, t) F_0(h_1) dh_1 ,$$

где G — функция Грина, которая является решением уравнения (1.131) во всех точках, когда $h \neq h_1$ и $t \neq 0$, и для которой в физически реализуемых системах выполняется: $G = 0$ при $t < 0$. Можно рассматривать уравнение (1.131) как линейную систему с входным сигналом $F_0(h_1)$ и выходным сигналом $F(h, t)$, в которой функция Грина имеет роль “весовой функции”. Как хорошо известно, сама функция Грина является “откликом” системы на единичный импульсный входной сигнал, — то есть является решением уравнения (1.131), если начальное условие представляет собой δ -функцию Дирака:

$$F_0 = \delta(x - x_1); \quad F(h, t) = G(x, x_1, t) .$$

Подставляя начальное распределение в (1.134), находим выражение для $A(k)$:

$$A(k) = (k x_1)^{1-l} J_l(k x_1) .$$

Для получения функции Грина подставим $A(k)$ в выражение (1.133):

$$G(x, x_1, t) = x^l x_1^{1-l} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 t}{\kappa^2 h_c^{1/l}}\right) k J_l(k x_1) J_l(kx) dk .$$

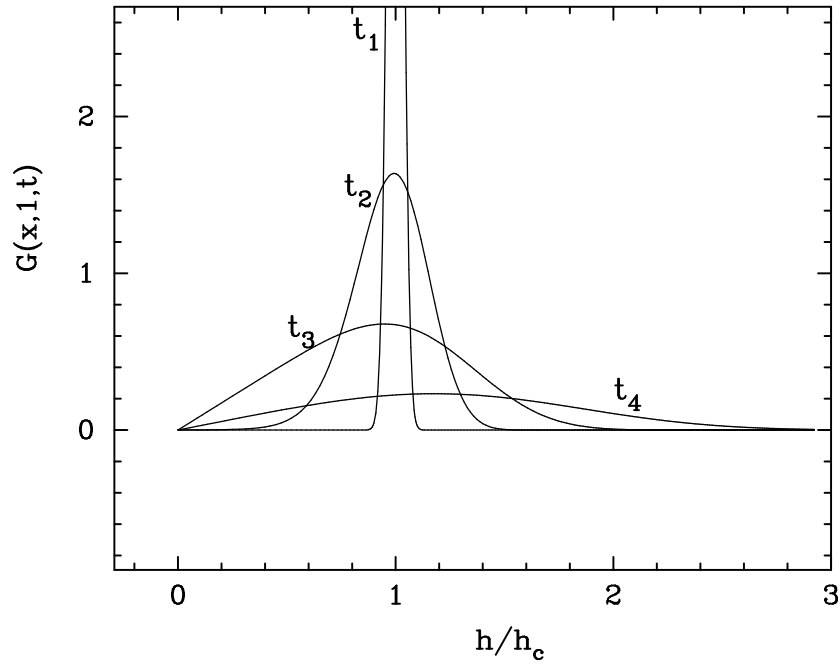


Рис. 1.11: Функция Грина (1.135), найденная в [18], в четыре момента времени: $t_1 = 0.001$, $t_2 = 0.03$, $t_3 = t_{\max} = 0.1875$ и $t_4 = 1$. Параметры решения $\kappa = 1$, $h_c = 1$, $l = 1/3$, $x_1 = 1$.

Интеграл находится с использованием таблиц интегральных преобразований Ханкеля:

$$G(x, x_1, t) = \frac{\kappa^2 h_c^{1/l} x^l x_1^{1-l}}{2t} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x^2}{4t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right) I_l\left(\frac{x x_1}{2t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right), \quad (1.135)$$

где I_l — модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда). На Рис. 1.11 показана функция Грина в четыре момента времени.

Зададим начальное распределение F_0 в виде функции Дирака с физически обоснованной нормировкой. Пусть начальная конфигурация представляет из себя узкое кольцо на радиусе r_s с полной массой M_0 . Удельный момент импульса на этом радиусе равен $h_s = x_s^{2l} h_c$. Запишем поверхностную плотность при $t = 0$ как $\Sigma_0(h, t = 0) = M_0 \delta(r - r_s) / 2\pi r_s$. С учетом (1.129) и (1.132) получим для ранее введенной переменной

$x = (h/h_c)^{1/2l}$:

$$F_0(x) = 2l M_0 h_c^{1-1/l} \kappa^{-2} x_s^{2l-1} \delta(x - x_s) .$$

Здесь использовалось равенство $\delta(x - x_s) dx = \delta(r - r_s) ds$. Эволюция этого узкого кольца определяется с помощью найденной функции Грина:

$$F(x, t) = \int_0^\infty F_0(x_1) G(x, x_1, t) dx_1$$

и выражается в явном виде

$$F(x, t) = \frac{M_0 h_c l (x x_s)^l}{t} \exp\left(-\frac{x_s^2 + x^2}{4t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right) I_l\left(\frac{x x_s}{2t} \kappa^2 h_c^{1/l}\right) . \quad (1.136)$$

Рассмотрим темп аккреции на внутренней границе $\dot{M}_{\text{in}} = (\partial F / \partial h)|_{h \rightarrow 0}$:

$$\dot{M}_{\text{in}}(t) = \frac{x^{1-2l}}{2l h_c} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{M_0 \tau_e^l e^{-\tau_e/t}}{\Gamma(l) t^{1+l}} .$$

Его можно записать через пиковое значение

$$\dot{M}_{\text{in}}(t) = \dot{M}_{\text{in}, \text{max}} \left(\frac{\tau_{\text{pl}}}{t}\right)^{1+l} e^{-\tau_e/t} ,$$

где мы ввели характерное время экспоненциального роста τ_e и степенного падения τ_{pl} :

$$\tau_e = \frac{\kappa^2 h_s^{1/l}}{4} = \frac{1+l}{e} \tau_{\text{pl}} .$$

Темп аккреции достигает пикового значения

$$\dot{M}_{\text{in}, \text{max}} = \frac{M_{\text{disk}}}{t_{\text{max}}} \frac{(1+l)^l}{e^{1+l} \Gamma(l)} \quad (1.137)$$

в момент времени

$$t_{\text{max}} = \frac{\kappa^2 h_s^{1/l}}{4(1+l)} = \frac{\tau_{\text{pl}}}{e} . \quad (1.138)$$

1.6.4 Решение для диска с фиксированным внешним радиусом

Граничные условия имеют важное значение для вида решения уравнения (1.130). Выше мы рассмотрели решение, в котором диск неограниченно увеличивается в своих размерах. Часть вещества в диске приобретает со временем очень большие значения удельного момента импульса. В ряде астрофизических ситуаций ясно, что необходимо устанавливать условия на конечном радиусе от центра. Основным таким случаем являются диски в двойных системах. Момент приливных сил, возникающих благодаря гравитационному влиянию звезды-компаньона и действующий преимущественно в узкой области внутри полости Роша, приводит к “обрезанию” диска на некотором радиусе [86, 87, 88, 89]. В этой области происходит перевод момент импульса диска в орбитальное движение двойной системы.

Таким образом, задача теперь ставится на конечном интервале. Метод суперпозиции частных решений модифицируется, и общее решение находится не как интеграл (1.133), а как сумма всех частных решений, удовлетворяющих конкретным граничным условиям [75]:

$$F(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t k_i^2 \kappa^{-2} h_{\text{out}}^{-1/l}} (k_i x)^l [A_i J_l(k_i x) + B_i J_{-l}(k_i x)], \quad (1.139)$$

Здесь мы также заменили характерное значение удельного момента импульса на его значение на внешней границе h_{out} , где безразмерное $x = 1$.

Зададим граничное условие на внешнем радиусе диска:

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \dot{M}_{\text{out}}(t) \quad \text{при} \quad h = h_{\text{out}}. \quad (1.140)$$

В простейшем случае, если $\dot{M}_{\text{out}}(t) = 0$, это будет однородное граничное условие. На внутренней границе рассмотрим такое же условие, как и раньше: $F(h) = 0$ при $h = 0$. Использование этих двух условий дает уравнение, которому должно удовлетворять каждое частное решение, то есть для любого k

$$l J_l(k_i) + k_i J_l'(k_i) = 0. \quad (1.141)$$

Поскольку в ряду, представляющем собой общее решение, остались только члены с функциями Бесселя с положительными индексами, в

начальный момент $t = 0$ общее решение (1.139) представляется в виде:

$$F(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} (k_i x)^l A_i J_l(k_i x). \quad (1.142)$$

Ряды вида $\sum_{i=1}^{\infty} k_i^l A_i J_l(k_i x)$ с условием (1.141) называются рядами Дини [см. 83, §18.11]. Функция $f(x) = F(x, 0) x^{-l}$ может быть разложена в ряд Дини, если она удовлетворяет условиям Дирихле на данном интервале, а коэффициенты разложения могут быть найдены как $k_i^l A_i = 2 \bar{f}_J(k_i) J_l^{-2}(k_i)$ [83, 84], где использовано конечное преобразование Ханкеля

$$\bar{f}_J(k_i) = \int_0^1 x f(x) J_l(k_i x) dx.$$

Для поиска функции Грина, мы ищем решение для начального условия в форме δ -функции: $F(x, 0) = \delta(x - x_1)$. Используя ее свойства, подставляя $f(x)$ в последнее выражение, получаем:

$$k_i^l A_i = 2 x_1^{1-l} \frac{J_l(k_i x_1)}{J_l^2(k_i)}. \quad (1.143)$$

Таким образом, получаем функцию Грина ограниченного диска [82]:

$$G(x, x_1, t) = 2 x^l x_1^{1-l} \sum_i e^{-t k_i^2 \kappa^{-2} h_{\text{out}}^{-1/l}} \frac{J_l(k_i x_1) J_l(k_i x)}{J_l^2(k_i)}, \quad (1.144)$$

где k_i — положительные корни трансцендентного уравнения (1.141), $x = (h/h_{\text{out}})^{1/2l}$. Функция Грина изображена на Рис. 1.12 при нескольких значениях времени. Кривая в момент $t_3 = t_{\text{max}}$ (см. (1.138)) соответствует максимальному темпу аккреции через внутреннюю границу диска.

Если задать начальное распределение $F(x, 0)$, то распределение в любой момент $t > 0$ находится как

$$F(x, t) = \int_0^1 F(x_1, 0) G(x, x_1, t) dx_1. \quad (1.145)$$

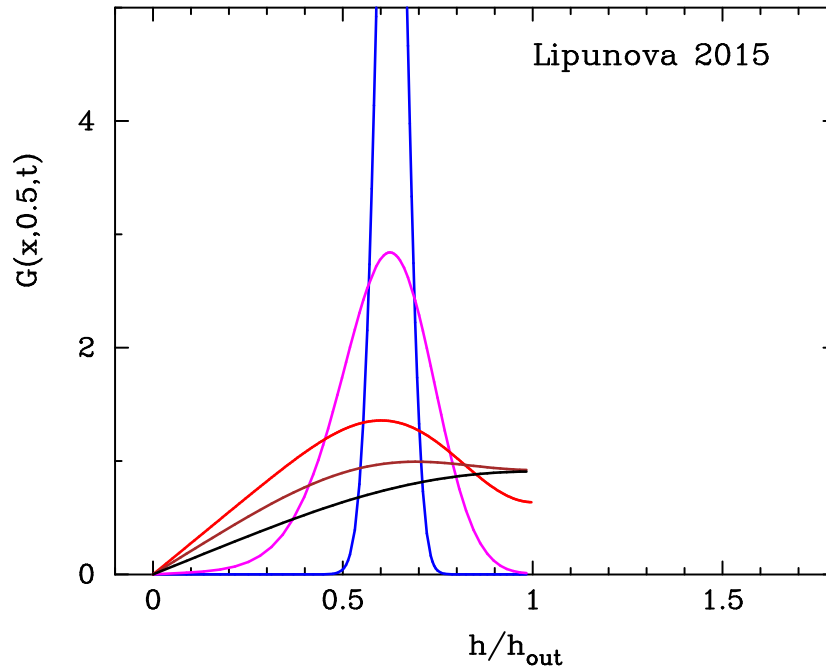


Рис. 1.12: Функция Грина ограниченного диска с нулевым тензором вязких напряжений в центре в моменты времени $t_1 = 0.001$, $t_2 = 0.01$, $t_3 = t_{max}^\infty = 3/64$, $t_4 = 0.1$, $t_5 = 0.3$. Кольцо вещества в момент $t = 0$ находилось в $x_s = (h/h_{out})^{1/2l} = 0.5$. Параметры $\kappa = 1$, $l = 1/3$.

Темп аккреции в любой момент $t > 0$

$$\dot{M}(x, t) = \int_0^1 F(x_1, 0) G_{\dot{M}}(x, x_1, t) dx_1 / h_{\text{out}}, \quad (1.146)$$

где функция Грина для темпа аккреции

$$\begin{aligned} G_{\dot{M}}(x, x_1, t) &\equiv \frac{\partial G(x, x_1, t)}{\partial x^{2l}} = \\ &= \frac{(x x_1)^{1-l}}{l} \sum_i e^{-t k_i^2 \kappa^{-2} h_{\text{out}}^{-1/l}} k_i \frac{J_l(k_i x_1) J_{l-1}(k_i x)}{J_l^2(k_i)}. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Функции G и $G_{\dot{M}}$ в частном случае $x_1 = 1$ найдены в виде аналитической асимптотики в работе [81].

Начальное распределение F можно выразить из распределения поверхностной плотности, используя (1.129) и (1.132):

$$F(x, 0) = \frac{16 \pi l^2}{\kappa^2 h^{1/l}} r^2 \Sigma(r) h, \quad (1.148)$$

где $r = h^2/GM$ и $h = h_{\text{out}} x^{2l}$.

На больших временах первый член в сумме (1.147) доминирует, и временная зависимость от времени выражается простой экспонентой:

$$G_{\dot{M}}(0, x_1, t) \Big|_{t > t_{\text{vis}}} = \frac{k_1^l x_1^{1-l}}{2l \Gamma(l)} \frac{J_l(k_1 x_1)}{J_l^2(k_1)} \exp\left(-\frac{t k_1^2}{2l t_{\text{vis}}}\right).$$

Характерное время экспоненциального уменьшения темпа аккреции равно

$$t_{\text{exp}} = h_{\text{out}}^{1/l} \frac{\kappa^2}{k_1^2} = \frac{16 l^2}{3 k_1^2} \frac{r_{\text{out}}^2}{\nu_{\text{out}}}, \quad (1.149)$$

где мы учли, что $\nu_{\text{out}} = \nu_0 r_{\text{out}}^b$. В Таблице 1.3 приведены значения k_1 первых нулей уравнения (1.141) для типичных значений l . Также в Таблице даны коэффициенты для вычисления характерных времен роста (1.138) и экспоненциального спада (1.149).

Диск становится квазистационарным (т.е. темп аккреции почти не меняется с радиусом) в областях, где $r/r_{\text{out}} < (t/t_{\text{exp}})^{2l}$. Установление квазистационарности в центральных областях диска за вязкое время является общим свойством для дисков с любыми типами вязкости.

Таблица 1.3: Параметры функции Грина в решении для нестационарного диска. Столбцы: Степень в законе $\nu \propto r^b$; l из выражения (1.132); Первый ноль уравнения (1.141); Числовой множитель из (1.138) Числовой множитель из (1.149); Параметр, описывающий радиальный профиль, $a_0 = \dot{M}_{\text{in}} h_{\text{out}}/F_{\text{out}}$; Для α -дисков решение линейного уравнения может применяться на временах порядка или короче вязкого времени. Для них указан тип непрозрачности.

b	l	k_1	$t_{\text{max}}(r_s^2/\nu_s)^{-1}$	$t_{\text{exp}}(r_{\text{out}}^2/\nu_{\text{out}})^{-1}$	a_0	Комментарий
0	1/4	1.0585	1/15	0.298	1.267	$\nu = \text{const}$
1/2	1/3	1.2430	1/9	0.383	1.363	α -диски при $h/r = \text{const}$
3/5	5/14	1.2927	0.125	0.407	1.392	α -диск, $\tau_{\text{T}} \gg \tau_{\text{ff}}$
3/4	2/5	1.3793	0.152	0.449	1.444	α -диск, $\tau_{\text{ff}} \gg \tau_{\text{T}}$
1	1/2	1.5708	2/9	0.540	1.571	$F(h) \propto \sin((\pi/2)h/h_{\text{out}})$
2	∞	—	—	—	—	t_{vis} не зависит от r

Известно, что в самых простых случаях вспышки в рентгеновских новых (двойные системы с компактным объектом и маломассивной оптической звездой) представляют собой кривые с быстрым ростом и экспоненциальным спадом, так называемые кривые типа FRED⁶ [90]. Такие кривые блеска хорошо воспроизводятся в рамках модели вязкого диска с коэффициентом вязкости постоянным в течении времени порядка t_{vis} (Рис. 1.13). Это объясняется тем, что на временах порядка одного-двух t_{vis} нестационарные модели α -диска и диска, рассмотренного в настоящем разделе, дают близкие друг к другу результаты.

Для аппроксимации эволюции вязкого α -диска решением с постоянной вязкостью необходимо оценить наиболее подходящий параметр b для уравнения (1.130). Это можно сделать, учтя соотношение (1.42) между кинематической вязкостью и параметром турбулентности:

$$\nu_t = \nu_0 r^b \simeq \frac{2}{3} \alpha \omega_{\text{K}} r^2 \left(\frac{z_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\Pi_1}, \quad (1.150)$$

где параметр Π_1 появляется из рассмотрения вертикальной структуры, см. (1.101). Решение для стационарного диска с доминирующим давлением газа в режиме непрозрачности по Крамерсу дает $z_0/r \propto r^{1/8}$ (см. (1.112)), следовательно, $b \simeq 3/4$ или, равносильно, $l \simeq 2/5$, если пренебрегать зависимостью полутолщины диска от темпа аккреции.

⁶fast-rise exponential decay (*англ.*)

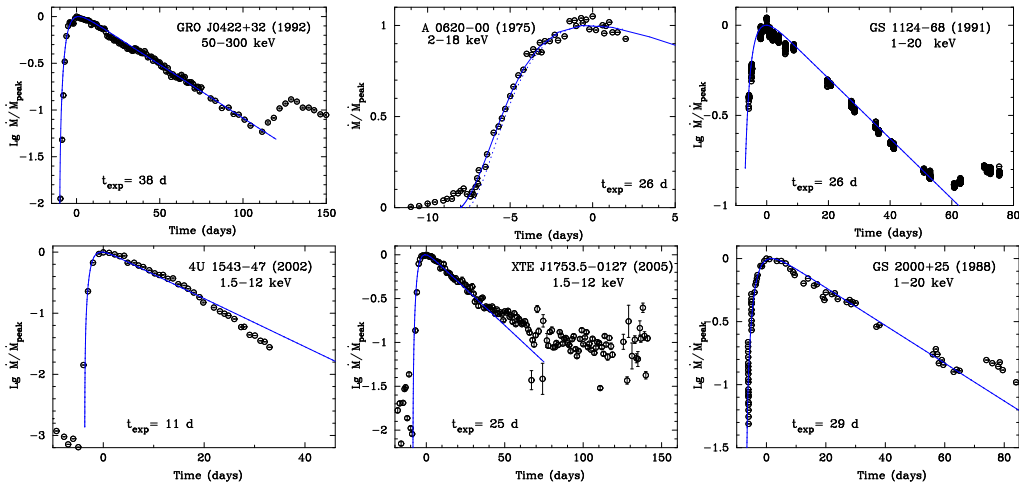


Рис. 1.13: Нормированные рентгеновские кривые блеска рентгеновских новых GRO J0422+32 (1992), A 0620-00 (1975), GS 1124-68 (1991), GS 2000+25 (1998) из [90] и 4U 1543-47 (2002) и XTE J1753.5-0127 (2005) (результаты спутника ASM/RXTE). Рентгеновские диапазоны указаны для каждой вспышки. Сплошная кривая — нормированный на максимум темп аккреции через внутреннюю границу диска, рассчитанный по формуле (1.146) для $l = 2/5$ и времени t_{exp} , значение которого указано для каждой кривой. Начальное распределение поверхностной плотности в диске $\Sigma \propto r$, начальный внутренний радиус горячей зоны $0.01 \times r_{\text{out}}$. Для A 0620-00 нарисованы две модели, внутренний радиус при $t = 0$ $0.001 \times r_{\text{out}}$ (сплошная линия) и $0.3 \times r_{\text{out}}$ (пунктир). Рисунок из работы [82].

1.6.5 Решения нелинейного уравнения эволюции вязкого α -диска

Ранее мы рассмотрели случай, когда коэффициент кинематической вязкости зависит только от радиальной координаты в диске. В более общем случае можно представить ν_t в виде степенной функции от Σ и r . Такая зависимость, в частности, возникает, если рассматривать диски с α -вязкостью. При этом уравнение (1.125) становится нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. Для поиска решений таких уравнений в ряде случаев могут быть использованы методы подобия. Автомодельные решения нелинейного дифференциального

уравнения, полученные методами подобия, реализуются после прохождения достаточно большого времени с момента начальных условий.

Как мы видели в предыдущем разделе, автомодельные решения линейного дифференциального уравнения характеризуются возможностью полного разделения временной и координатной частей решения: частное решение является произведением функций от единственной координаты. В случае нелинейного дифференциального уравнения такое простое разделение в общем случае не применимо. В некоторых случаях упрощение задачи происходит в результате введения новых безразмерных переменных (параметров), которые содержат комбинацию размерных параметров (например, времени и координат) в различных степенях.

Автомодельные решения нелинейных дифференциальных уравнений разделяют на два типа [91, 92]. Первый тип, - так называемая полная автомодельность, - реализуется, когда в задаче вид автомодельных функций и вид новой безразмерной переменной может быть выведен из анализа размерностей. Второй тип, - неполная автомодельность, - это более общий случай; вид автомодельной функций является частным решением самой задачи (нелинейной задачи на собственные значения, см. [93]), анализ размерностей не позволяет определить ее вид, и, в частности, найти степени, в которых размерные параметры входят в состав безразмерного параметра. При неполной автомодельности вид решения зависит от значения автомодельной переменной.

Если постоянные коэффициенты в автомодельных функциях можно найти из законов сохранения, то автомодельное решение будет относиться к первому типу (например, сохранение энергии в задаче Дж.И.Тейлора о взрыве (см. [92]), сохранение полного момента импульса в аккреционном диске (см. § 1.6.6 далее)). Автомодельные решения первого рода были найдены для аккреционных дисков с нелинейным уравнением вязкой диффузии на той стадии эволюции, когда темп аккреции уменьшается [77, 94]. Также были построены автомодельные решения второго рода [95]. Они описывают более ранний этап эволюции: расплывание вещества из начального кольца в диск вокруг гравитирующего центра.

Вид параметра турбулентности ν_t определяется физической структурой диска, которая зависит от астрофизических условий. Для α -диска с двумя вариантами непрозрачности (непрозрачность по Крамерсу и томсоновское рассеяние) в рамках автомодельного решения первого типа было найдено, что темп аккреции уменьшается как $\propto t^{-19/16}$ и $\propto t^{-5/4}$, соответственно [77, 94, 95, 96, 97]. Лин и Прингл [98] рассмотрели моле-

кулярный диск с гравитационной неустойчивостью, порождающей эффективную вязкость $\nu_t \propto \Sigma^2 r^{9/2}$, и нашли что $\dot{M} \propto t^{-6/5}$. Лин и Боденхаймер [99] исследовали эволюцию протопланетного диска под действием конвективной турбулентной вязкости ($\nu_t \propto \Sigma^2$), для которого $\dot{M} \propto t^{-15/14}$. Огилви [100] исследовал аккреционный адвективный поток, структура которого существенно отличается от тонкого вязкого диска, и методами подобия также нашел решения при сохраняющемся полном моменте импульса.

Вид решения зависит и от граничных условий. Прингл [77] рассмотрел общие свойства неограниченного холодного протозвездного диска с $\nu_t \propto \Sigma^3$ с центральным источником углового момента. Такая постановка задачи соответствует эволюции диска вокруг молодой двойной системы (см. также [101]). В работе [102] подробно разобрана эволюция дисков вокруг двойных черных дыр и получены автомодельные решения с различными условиями на внутренней границе, предполагающими некоторый перенос массы через внутреннюю границу. [103] нашел автомодельные решения для декреционного диска, то есть диска, в котором происходит отток массы от центра.

Для диска со стандартным условием на внутренней границе, — тензор вязких напряжений обращается в ноль (или становится очень малым), — но внешний радиус которого ограничен, в [104] получено, что $\dot{M} \propto t^{-10/3}$ для Крамеровской непрозрачности и $\dot{M} \propto t^{-5/2}$ для томсоновского рассеяния (см. §1.6.7 ниже).

Если $\nu_t = \nu_0 \Sigma^a r^b$, следовательно, коэффициент кинематической вязкости не постоянен во времени, так как меняется поверхностная плотность. Связь $F = 3 \pi h \nu_t \Sigma_0$ (ср. с (1.124)) можно представить следующим образом:

$$F = 3 \pi h \nu_0 \Sigma_0^{a+1} r^b. \quad (1.151)$$

Тогда для кеплеровского диска ($h \equiv h_*$) уравнение (1.125) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \frac{F^m}{h^n} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}, \quad (1.152)$$

где D — размерная константа,

$$D = \frac{a+1}{2} (G M)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{\nu_0}{(2\pi)^a (G M)^b} \right)^{1/(a+1)}, \quad (1.153)$$

m и n — безразмерные константы,

$$m = \frac{a}{a+1}, \quad n = \frac{3a+2-2b}{a+1}.$$

Значения параметров D , m , n могут быть определены из уравнений вертикальной структуры. Величину D в (1.152) можно рассматривать как своеобразный “коэффициент диффузии”. Он может быть получен из связи между Σ_0 , F и h [95, 96]:

$$\Sigma_0 = \frac{(GM)^2 F^{1-m}}{4\pi(1-m)Dh^{3-n}}. \quad (1.154)$$

Из сравнения видов уравнения эволюции диска в линейном и нелинейном случаях, (1.131) и (1.152), получаем, что $D = 4(l/\kappa)^2$ при $m = 0$.

Нелинейная задача нестационарной аккреции имеет следующие отличительные особенности. Во-первых, существование автомодельных решений II рода возможно только при $m \neq 0$. Во-вторых, автомодельное решение I рода на третьей стадии, хотя и существует при $m = 0$, однако имеет характерный для линейных задач экспоненциальный профиль при $r \rightarrow \infty$ (см., например, Линден-Белл и Прингл, 1974), в то время как при $m \neq 0$ границы диска вполне определены⁷.

α -ДИСКИ

Любарский и Шакура [95] записали уравнения вертикальной структуры в виде, аналогичном (1.101), а непрозрачность задали в виде (1.96):

$$\kappa = \kappa_0 \frac{\rho^\zeta}{T^\gamma}.$$

После некоторых алгебраических преобразований с уравнениями из правого столбца (1.101) можно найти связь между Σ_0 , $W_{r\varphi} r^2$ и ωr^2 , которая с учетом (1.154) дает⁸:

$$D = \frac{1}{4(1-m)(2\pi)^m} \left\{ \frac{2^{6+\zeta+2\gamma} \alpha^{8+\zeta+2\gamma}}{\Pi_1^\zeta \Pi_2^{2\zeta} \Pi_3^{8+\zeta+2\gamma} \Pi_4^2} \left(\frac{\mathfrak{R}}{\mu}\right)^{8+2\gamma} \left(\frac{9\kappa_0}{8ac}\right)^2 (GM)^{12+8\zeta} \right\}^{\frac{1}{10+3\zeta+2\gamma}}, \quad (1.155)$$

⁷Отмеченное свойство аналогично тому, которое возникает в задачах теплопроводности, когда с учетом нелинейности граница тепловой волны резко отделяет прогретую зону от остальной области (Зельдович и Райзер [93]).

⁸Отметим, что здесь F в 2π раз больше, чем в статье Любарского–Шакуры [95]. Одновременно величина D у нас меньше в $(2\pi)^m$ раз.

Таблица 1.4: Безразмерные параметры в уравнениях нестационарной аккреции для разных ν_t . Параметр α_{pl} – степень временной зависимости на стадии спада аккреции в неограниченном диске: $\dot{M} \propto t^{\alpha_{\text{pl}}}$.

	m	n	a	b	ζ	Υ	α_{pl}
$\kappa_{\text{T}} \gg \kappa_{\text{ff}}$ и (1.96)	2/5	6/5	2/3	1	0	0	-19/16
$\kappa_{\text{ff}} \gg \kappa_{\text{T}}$ и (1.96)	3/10	4/5	3/7	15/14	1	7/2	-5/4
ORAL [71], полная ионизация H и He	1/3	1	1/2	1	1	5/2	-11/9
конвективная турбу- лентность [99]	2/3	8/3	2	0	—	—	-15/14
молекулярный диск с гравитационной неустойчивостью [98]	2/3	-1/3	2	9/2	—	—	-6/5

где

$$\zeta = -\frac{11m - 2n - 2}{7m - n - 1}, \quad \Upsilon = -\frac{1}{2} \frac{37m - 4n - 10}{7m - n - 1} \quad (1.156)$$

или

$$m = \frac{4 + 2\zeta}{10 + 3\zeta + 2\Upsilon}, \quad n = \frac{12 + 11\zeta - 2\Upsilon}{10 + 3\zeta + 2\Upsilon} \quad (1.157)$$

(см. Таблицу 1.4).

Необходимо заметить, что “коэффициент диффузии” D слабо зависит от коэффициента непрозрачности: в степени 1/5 или 1/10 от κ_0 . Это уменьшает влияние неопределенности, заложенной в зависимости реальной непрозрачности от параметров диска. Значение комбинации параметров $\Pi_{1,2,3,4}$ в (1.155) слабо зависит от оптической толщи τ , то есть от радиуса в диске (см. Таблицы 1.1, 1.2). Таким образом, D может рассматриваться как константа в основном уравнении нестационарной аккреции (1.152).

1.6.6 Эволюция α -диска из кольца вещества

Как оказалось, глобальная эволюция диска обычно может быть разделена на три стадии: (1) стадия формирования диска из начального кольца, сформированного из вброшенного на некотором радиусе вещества, (2) при фиксированной внутренней границе установление квазистационарного распределения параметров в диске и, как частный случай,

рост аккреции на центральное тело, (3) “расплывание диска” от центра, которое сопровождается уменьшением темпа аккреции.

В двойной звездной системе кольцо вещества может образоваться вследствие кратковременного выброса вещества с соседней компоненты. При наличии эффективных механизмов вязкости дифференциально вращающееся кольцо начнет расползаться в диск. Если вместо однократного вброса массы в двойной системе в некоторый момент времени начинается квазистационарное перетекание вещества с соседней компоненты, то первые две стадии будут описывать процесс выхода диска на квазистационарный режим с темпом аккреции, равным скорости втекания вещества в диск.

На первой стадии вещество с внутреннего края тора, отдавая момент импульса внешним кольцам, начнет двигаться к центру, и в области $r \ll R_{\text{out}}$ течение выходит на некоторый автомодельный режим, характеристики которого не зависят от профиля начального распределения вброшенной массы. Внутренний край диска, имеющий форму вытягивающегося “языка”, за конечное время достигнет центра аккреции (Рис. 1.14, а). Вблизи радиуса последней устойчивой орбиты, — при вращении вокруг черной дыры, или вблизи магнитосферы, фотосферы автомодельное решение не применимо; тем не менее, после некоторого переходного этапа, аккреция вновь выходит на еще одно автомодельное решение — режим квазистационарной аккреции (вторая стадия).

На второй стадии во внутренних областях диска быстро (в силу малости характерных вязких времен на малых радиусах) устанавливается квазистационарное распределение с практически постоянным по радиусу темпом аккреции. При этом темп аккреции растет со временем. Эта область отделена некоторой переходной зоной от внешних областей, где никакие изменения еще произойти не успевают, и распределение всех физических величин должно остаться почти тем же, каким оно было вначале. Постепенно область, занимаемая квазистационарным решением, будет расширяться (Рис. 1.14, б).

Далее диск постепенно выходит на заключительный, третий этап своей эволюции (стадия затухания аккреции, Рис. 1.14, в), на котором “забываются” детали начального распределения, и для нахождения автомодельного решения важны только некоторые сохраняющиеся при аккреции интегральные величины. Эта заключительная стадия описывается автомодельным решением I рода, в то время как предыдущие — автомодельными решениями II рода, то есть решениями, в которых показана

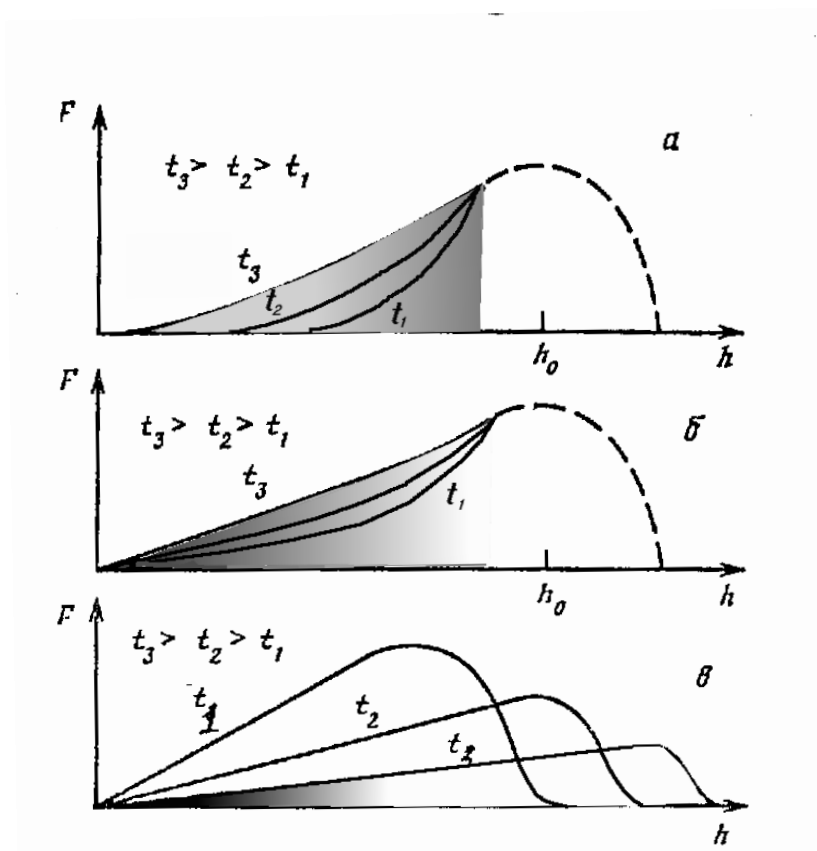


Рис. 1.14: Иллюстрация из работы [95] процесса эволюции нестационарной дисковой аккреции в виде зависимости момента вязких сил, действующих между соседними кольцами нестационарного диска, от удельного момента количества движения: а — стадия формирования и движения к центру автомодельного “языка”, б — стадия формирования квазистационарного режима, в — стадия затухания аккреции. Штриховой линией обозначены области, где вещество было выброшено и решение в которых имеет неавтомодельный характер. На каждом рисунке показаны распределения для трех последовательных моментов времени t_1 , t_2 , t_3 . Рассчитанные зависимости показаны на Рис. 1.16 и 1.17.

тель автомодельности определяется не из соображений размерности, а находится в процессе интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения для функции-представителя [105].

Итак, на каждой стадии возникают такие движения, отличительным свойством которых является подобие, сохраняющееся в самом движении. Это означает, что распределение какой-либо величины, например момента вязких сил, можно представить в виде

$$F(h, t) = h^{A_1} t^{A_2} f(C h^{A_3} t^{A_4}), \quad (1.158)$$

где f — функция единственной автомодельной переменной. Параметры $C, A_{1..4}$ могут быть определены из соображений размерности или из законов сохранения для полностью автомодельных решений. Для неполностью автомодельных решений определение значений параметров, или части из них, требует решения нелинейной задачи и, кроме того, найденные параметры зависят от h и t .

Стадия формирования языка

Предположим, что внутренний край диска r_{in} или эквивалентное ему значение h_{in} уменьшается по степенному закону $h_{\text{in}} \propto (-t)^\gamma$ (в момент достижения им центра $t = 0$, поэтому перед временем введен знак минус). Как видно из (1.152), комбинация $D F^m t / h^{n+2}$ является безразмерной, что позволяет представить решение в виде

$$F(h, t) = \frac{h^{(n+2)/m}}{(-D t)^{1/m}} y(\xi); \quad 1 \leq \xi = \frac{h}{A (-t)^\gamma} \leq \infty, \quad (1.159)$$

где $y(\xi)$ — безразмерная функция-представитель одной автомодельной переменной ξ . Скомбинировать безразмерную переменную из h, t и D невозможно, поэтому введена дополнительная константа A , размерность которой $[\text{см}^2 \text{с}^{-(1+\gamma)}]$. Заранее неизвестный показатель γ должен определяться в ходе решения задачи. Тем самым мы пришли к автомодельной задаче II рода, аналогичной задаче о сходящейся ударной волне [91, 93].

Подставляя (1.159) в уравнение (1.152), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для представителя

$$y^m \left[\xi^2 y'' + \frac{2(n+2)}{m} \xi y' + \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y \right] - \gamma \xi y' - \frac{y}{m} = 0.$$

Можно охарактеризовать это уравнение как уравнение нелинейного осциллятора с диссипацией. Параметр γ определяет степень диссипации (если γ положительна).

Краевые условия определяются следующим образом. Очевидно, что темп аккреции через внутренний край кольца по смыслу равен нулю. Таким образом, на внутренней границе h_{in} (ей соответствует $\xi = 1$) должны обращаться в ноль как функция $F(h_{\text{in}}, t)$, так и ее производная $\partial F(h_{\text{in}}, t)/\partial h$ (ср. с (1.127)), иначе при подстановке в (1.152) возникает δ -образный источник (сток). Следовательно, имеем два условия:

$$y(1) = y'(1) = 0.$$

Еще одно условие следует из требования, чтобы на любом конечном радиусе в момент $t = 0$ (при достижении языком центра аккреции) все физические величины оставались конечными. Из (1.159) следует, что $F(h, t)$ не расходится при $t \rightarrow 0$ и $h \neq 0$ только, если

$$y(\xi = \infty) = 0.$$

Таким образом, решение уравнения второго порядка должно удовлетворять трем условиям, что возможно только при определенном значении γ .

Проведем качественное исследование уравнения для функции-представителя. Для этого перейдем к переменной $x = \ln \xi + C$ (постоянная C не будет входить в результирующую систему уравнений (1.160), но важна при согласовании решений $y(x)$, $p(x)$). Производную по x будем обозначать точкой. Выпишем получающуюся систему двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= p, \\ \dot{p} &= \frac{y^{1-m}}{m} + \gamma y^{-m} p - \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y - \frac{2n+4-m}{m} p. \end{aligned} \quad (1.160)$$

Нас интересует решение, которое при $\xi = 1$ выходит из начала координат на плоскости (p, y) и при $\xi = \infty$ возвращается туда же. При $y \ll 1$, $p \ll 1$ система (1.160) имеет асимптотические решения вида

$$p = \frac{\gamma}{1-m} y^{1-m}; \quad y = \left(\frac{\gamma m}{1-m} \ln \xi \right)^{1/m}, \quad (1.161)$$

$$p = -\frac{y}{\gamma m}; \quad y = \xi^{-\frac{1}{\gamma m}}. \quad (1.162)$$

Функции (1.161) дают асимптотику при $\xi \rightarrow 1$, а (1.162) — при $\xi \rightarrow \infty$. Фазовые траектории решений уравнений показаны на Рис. 1.15 при четырех значениях γ . Каждая точка, для которой $\dot{y} = 0$ и $\dot{p} = 0$, является особой точкой. На фазовой плоскости имеется устойчивый фокус с координатами

$$p = 0, \quad y_0 = \left[\frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m}.$$

При некотором γ_{cr} существует замкнутое решение (Рис. 1.15, б). Численное исследование показывает, что при $m = 2/5$, $n = 6/5$ (случай $\varkappa_{\text{T}} \gg \varkappa_{\text{Ф}}$) искомое значение равно $\gamma_{\text{cr}} \approx 0.595$, а при $m = 3/10$, $n = 4/5$ ($\varkappa_{\text{Ф}} \gg \varkappa_{\text{T}}$) $\gamma_{\text{cr}} \approx 0.696$. При некотором γ_+ происходит перестройка фазовых траекторий и смена устойчивости фокуса (Рис. 1.15, д).

Таким образом, внутренняя граница диска движется к центру по закону $h_{\text{in}} = A(-t)^{\gamma_{\text{cr}}}$ (см. Рис. 1.16). Асимптотическое решение исходного уравнения (1.152) при $\xi \rightarrow \infty$ (то есть при $t \rightarrow 0$, когда язык достигает центра аккреции), как следует из (1.162), имеет вид

$$F = \frac{h^{\frac{n+2}{m}}}{(-Dt)^{\frac{1}{m}}} \left[\frac{A(-t)^{\gamma}}{h} \right]^{\frac{1}{\gamma m}} = \frac{A^{\frac{1}{\gamma_{\text{cr}} m}} h^{\frac{n+2}{m} - \frac{1}{\gamma_{\text{cr}} m}}}{D^{1/m}}. \quad (1.163)$$

Заметим, что при больших h профиль $F(h, t)$ на стадии формирования “языка” не меняется со временем (см. Рис. 1.16 и 1.17). Сшивка полученного автомодельного решения с начальным профилем $F_0(h)$ вблизи радиуса, где вещество было вброшено в момент времени $(-t_0)$, позволяет определить и постоянную A . С точностью до безразмерного множителя имеем из (1.163)

$$A = F_0^{\gamma_{\text{cr}} m} D^{\gamma_{\text{cr}}} / h_0^{\gamma_{\text{cr}}(n+2)-1},$$

где $h_0 = \sqrt{GM r_0}$ определяется начальным радиусом кольца r_0 .

Квазистационарная стадия при росте аккреции

Ищем решение (1.152) в виде:

$$F = \frac{h^{\frac{n+2}{m}}}{(Dt)^{1/m}} y(\xi), \quad 0 \leq \xi = \frac{h}{At^\beta} \leq \infty. \quad (1.164)$$

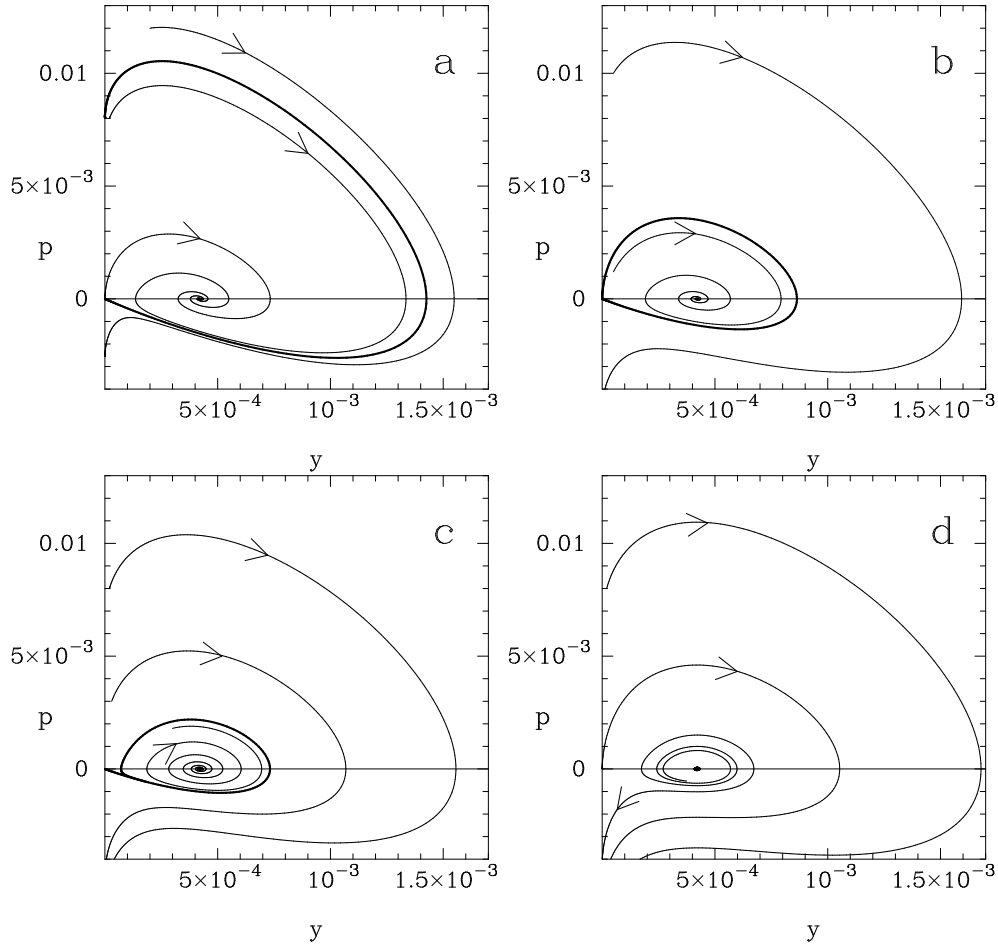


Рис. 1.15: Фазовый портрет системы уравнений (1.160) для разных значений γ . Стрелки указывают направление изменения ξ от 1 до ∞ (x от C до ∞). (a) При $\gamma < \gamma_{cr}$ решения внутри сепаратрисы, которая показана жирной линией, входят в стационарную точку (фокус) на горизонтальной оси $(0, y_0)$. (b) Замкнутое решение реализуется при $\gamma = \gamma_{cr}$ и совпадает с сепаратрисой. Сепаратриса в то же время представляет собой предельный цикл решений в области, ограниченной ей, для $x \rightarrow -\infty$. (c) При $\gamma_{cr} < \gamma < \gamma_+$ с ростом γ сепаратриса (жирная кривая) постепенно сжимается; (d) при $\gamma = \gamma_+$ она устремляется в точку $(0, y_0)$.

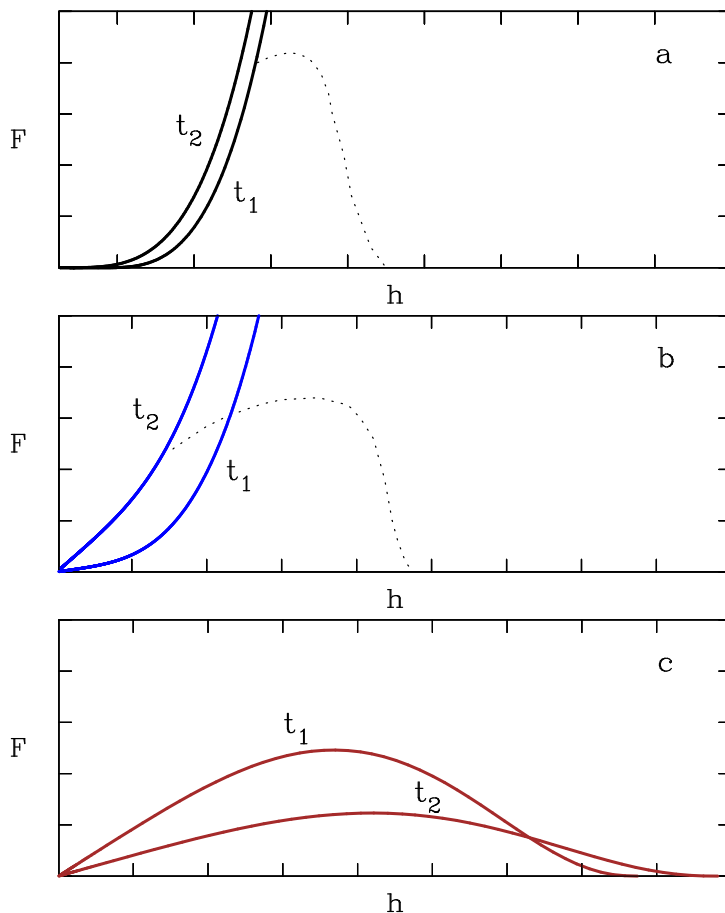


Рис. 1.16: Рассчитанный профиль $F(h)$ в решении Любарского–Шакуры на трех стадиях автомодельной эволюции: (а) формирование “языка”, $t_2/t_1 = 1/4$ (время отрицательно и стремится к нулю); (б) квазистационарная аккреция, $t_2/t_1 = 3$ (время теперь больше нуля); (с) затухание аккреции, $t_2/t_1 = 2$. Величины F и h отнормированы на произвольные значения. Пунктиром на двух верхних панелях символически дана зависимость $F(h)$ для областей, в которых решение (неизвестное) носит неавтомодельный характер. Расчет проведен для параметров в законе непрозрачности $m = 2/5$, $n = 6/5$.

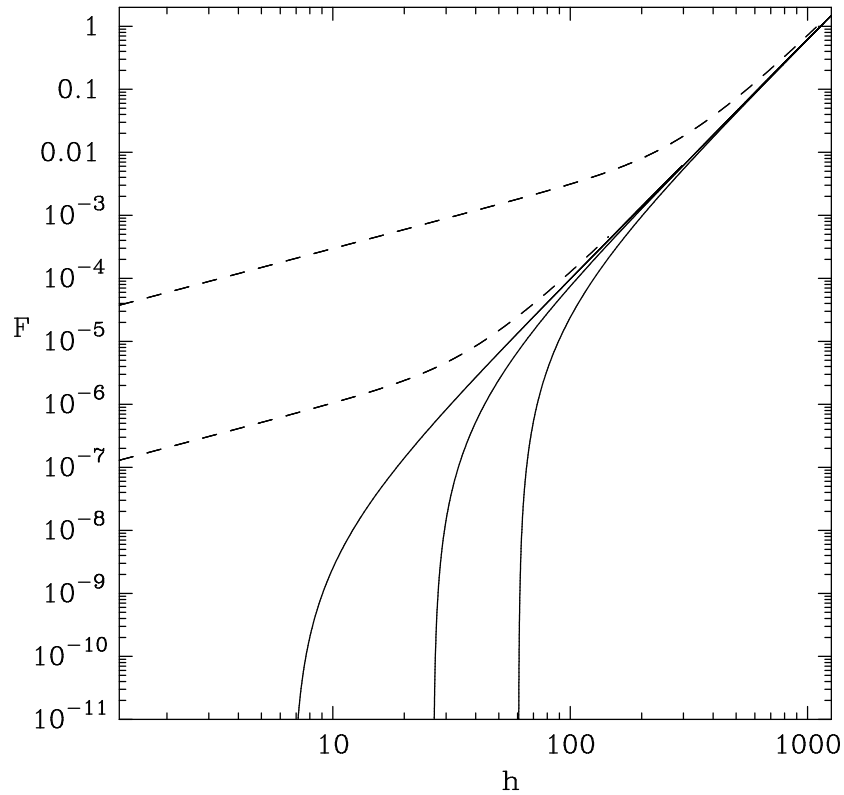


Рис. 1.17: Рассчитанные профили $F(h)$ в решении Любарского–Шакуры на стадии формирования языка (сплошная кривая) и на стадии квазистационарной аккреции (штрихи). На первой стадии видно движение внутреннего края “языка” к центру. На второй стадии видно, что со временем расширяется зона квазистационарной аккреции ($F \propto h$). Темп аккреции растет со временем, от самой нижней кривой к верхней. Величины F и h отнормированы на характерные значения.

Время t теперь положительно. Подставляя (1.164) в (1.152), получим уравнение для функции-представителя:

$$y^m \left[\xi^2 y'' + \frac{2(n+2)}{m} \xi y' + \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y \right] + \beta \xi y' + \frac{y}{m} = 0 \quad (1.165)$$

или систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y} &= p; \\ \dot{p} &= -\frac{y^{1-m}}{m} - \beta y^{-m} p - \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y - \frac{2n+4-m}{m} p \end{aligned} \quad (1.166)$$

При $\xi \rightarrow \infty$ асимптотическое решение этой системы имеет вид (главный вклад дают два последних члена уравнения (1.165))

$$p = -\frac{y}{\beta m}; \quad y = \xi^{-\frac{1}{\beta m}}. \quad (1.167)$$

Отсюда следует, что при больших h распределение $F(h, t)$ будет таким же, как и на предыдущей стадии (1.163), только если $\beta = \gamma_{\text{cr}}$. Таким образом, показатель автомодельности остается прежним. При $\xi \rightarrow 0$ (на очень больших временах или в центре аккреции) имеются два асимптотических решения (теперь главный вклад дают члены уравнения (1.165) в квадратных скобках):

$$p = -\frac{n+2}{m} y; \quad y = \xi^{-\frac{n+2}{m}}, \quad (1.168)$$

$$p = -\frac{n+2-m}{m} y; \quad y = \xi^{-\frac{n+2-m}{m}}. \quad (1.169)$$

Первому соответствует $(\partial F / \partial h)_{h \rightarrow 0} = 0$, т.е. решение без стока вещества ($\dot{M}_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0$), а второму — решение с постоянным по радиусу темпом аккреции при малых h . Вблизи тяготеющего центра темп аккреции меняется со временем по закону

$$|\dot{M}| = \left| \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0} \approx \frac{(At^\beta)^{\frac{n+2-m}{m}}}{(Dt)^{1/m}} = \frac{A^{\frac{n+2-m}{m}} t^{\frac{\gamma_{\text{cr}}(n+2-m)-1}{m}}}{D^{1/m}}. \quad (1.170)$$

Именно это решение со стоком вещества описывает вторую стадию аккреции в интересующем нас случае (см. Рис. 1.16b). При $\varkappa_{\text{T}} \gg \varkappa_{\text{ff}}$ получаем $|\dot{M}| \propto t^{1.67}$ и при $\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_{\text{T}}$ темп аккреции растет как $|\dot{M}| \propto t^{2.47}$.

Если ввести обозначения

$$\dot{M}_0 = \frac{F_0}{h_0}, \quad \tau = \frac{h_0^{n+2}}{F_0^m D} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{h_0^{n+2-m}}{(\dot{M}_0)^m D},$$

то темп аккреции $\dot{M}(t)$ на гравитирующий центр на квазистационарной стадии можно записать через темп аккреции \dot{M}_0 , заданный начальным значением момента вязких сил F_0 в начальном кольце вещества с удельным моментом импульса h_0 :

$$\dot{M} = \dot{M}_0 \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\frac{\gamma_{\text{cr}}(n+2-m)-1}{m}} \quad \text{при} \quad t > \tau.$$

Стадия затухания аккреции. Расплывание диска.

Снова ищем решение (1.152) в виде (1.164), однако теперь переменная ξ меняется в пределах $0 \leq \xi \leq 1$ ($\xi = 1$ соответствует внешнему краю диска r_{out} или эквивалентному ему значению $h_{\text{out}} = \sqrt{G M r_{\text{out}}(t)}$). Таким образом, решение для этой стадии по-прежнему описывается уравнением (1.165) или эквивалентной ему системой (1.166) с граничными условиями $y(0) = y(1) = y'(1) = 0$. Значение автомодельного показателя β теперь найдем, воспользовавшись законом сохранения полного момента импульса вещества в диске. В самом деле, если в начальный момент кольцо располагалось на радиусе r_0 , во много раз превосходящем радиус последней устойчивой орбиты, то в процессе аккреции сохраняется величина

$$K = 2\pi \int_0^{r_{\text{out}}} \Sigma h r dr = \text{const}. \quad (1.171)$$

Подставляя (1.164) в (1.171), попутно воспользовавшись связью (1.154) между Σ_0 и F , получим:

$$K = \frac{1}{(1-m)D} \int_0^{h_{\text{out}}} F^{1-m} h^{n+1} dh = \frac{A^{\frac{n+2}{m}} t^{\frac{\beta(n+2)}{m}}}{(1-m) D^{1/m} t^{\frac{1-m}{m}}} \int_0^1 y^{1-m}(\xi) \xi^{\frac{n+2-m}{m}} d\xi. \quad (1.172)$$

Из условия $\partial K / \partial t = 0$ находим $\beta = (1-m)/(n+2)$, кроме того, выражение (1.172) дает точное соотношение для константы A . При этом β нужное решение уравнения для функции-представителя (1.165) можно

найти в явном виде. Метод решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (1.165) или эквивалентной ему системы уравнений первого порядка (1.166) аналогичен решению подобных уравнений, возникающих в задачах распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры [106]. Так как уравнения (1.166) содержат переменную x только под знаком дифференциала, то, вводя $p(y) = dy/dx$ в качестве новой неизвестной функции от переменной y , понижаем порядок:

$$y^m \left[p \frac{dp}{dy} + \frac{2n+4-m}{m} p + \frac{(n+2)(n+2-m)}{m^2} y \right] + \beta p + \frac{y}{m} = 0.$$

Далее для удобства вводится $Z(y) = p(y) + y(n+2-m)/m$:

$$y^m \left[\left(Z - \frac{n+2-m}{m} y \right) \frac{dZ}{dy} + \frac{n+2}{m} Z \right] + \beta \left(Z - \frac{n+2-m}{m} y \right) + \frac{y}{m} = 0.$$

Решение ищется в виде $Z(y) = B y^{1-m}$. Собирая коэффициенты при степенях y^{1-m} в последнем уравнении, находим $B = -\beta/(1-m)$. После подстановки $Z(y) = -\frac{\beta}{1-m} y^{1-m}$ уравнение оказывается линейным алгебраическим уравнением относительно y . Левая часть уравнения обращается в нуль при $\beta = (1-m)/(n+2)$. С другой стороны, равенство β этому значению является необходимым условием существования автомодельного решения на стадии затухания аккреции (из условия $\partial K/\partial t = 0$). Таким образом,

$$p = -\frac{y^{1-m}}{n+2} - \frac{n+2-m}{m} y$$

является частным решением, удовлетворяющим граничному условию $p(y=0) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$. Интегрирование этого выражения проводится элементарно, и с граничным условием $y(\xi=1) = 0$ решение записывается в виде

$$y(\xi) = \left[\frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m} \left(\frac{1}{\xi^{n+2-m}} - 1 \right)^{1/m}. \quad (1.173)$$

При таком решении интеграл в правой части (1.172), — эйлеров интеграл первого рода, — сводится к бета-функции $B\left(\frac{n+3-m}{n+2-m}, \frac{1}{m}\right)$ с некоторым

коэффициентом, и решение основного уравнения (1.152) на стадии затухания окончательно принимает вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{A^{\frac{n+2}{m}}}{D^{1/m}} \left[\frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m} \frac{\xi (1 - \xi^{n+2-m})^{1/m}}{t} = \\ &= \frac{K m (1-m)}{(n+2) B\left(\frac{n+3-m}{n+2-m}, \frac{1}{m}\right)} \frac{\xi (1 - \xi^{n+2-m})^{1/m}}{t}. \end{aligned}$$

Темп аккреции в центре диска затухает по закону

$$\dot{M} = \left| \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0} = \frac{A^{\frac{n+2-m}{m}}}{D^{1/m}} \left[\frac{m}{(n+2)(n+2-m)} \right]^{1/m} t^{-\frac{n+3-m}{n+2}}.$$

Показатель степени во временной зависимости $\dot{M}(t)$ также может быть выражен через степени a, b , встречающиеся в зависимости $\nu_t \propto \Sigma^a r^b$, тогда он равен $1 + 1/(5a - 2b + 4)$. При $\varkappa_T \gg \varkappa_{\text{ff}}$ имеем $\dot{M} \propto t^{-19/16}$ и $\dot{M} \propto t^{-5/4}$ при $\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T$.

На стадиях формирования квазистационарной аккреции и затухания аккреции, полное энергосвечение в диске определяется, главным образом, выделением гравитационной энергии во внутренних областях диска. Светимость диска равна $\eta_{\text{accr}} \dot{M}_{\text{in}} c^2$, где η_{accr} — эффективность энергосвечения. На стадии формирования “языка” энергосвечение существенно зависит от начального распределения $F(h)$, так как поток тепла с единицы поверхности диска $\propto F/h^7$ (ср. с (1.77)).

Представленные решения описывают процессы в реальных астрофизических дисках в некотором приближении. Предположение о постоянстве закона непрозрачности (то есть коэффициентов m и n) не выполняется во всем диске на протяжении всей эволюции. Для полного учета изменения вида закона непрозрачности требуется проведение численных расчетов с привлечением затабулированных значений коэффициентов непрозрачности как функций плотности и температуры. С другой стороны, в представленных решениях коэффициент непрозрачности κ входит лишь в малой степени. Необходимо отметить, что в зонах с переменной степенью ионизации непрозрачность меняется особенно сильно.

1.6.7 Решение для α -диска в двойной системе

Как мы видели, вязкая эволюция кольца вещества вступает со временем на стадию неограниченного “расплывания”, когда часть вещества

диска приобретает большой момент импульса и удаляется все дальше от центра. В двойных системах такое расплывание диска не может происходить неограниченно из-за гравитационного влияния второй звезды. Приливные силы со стороны второй звезды приводят к тому, что диск ограничен на некотором расстоянии от центра внутри полости Роша.

В работе Липуновой и Шакуры [104] было найдено решение, описывающее эволюцию α -диска в двойной системе. С помощью полученного решения были смоделированы оптические и рентгеновские кривые блеска рентгеновских новых A 0620-00 и GU Mus 1124-68 на спаде пика. В результате были получены ограничения на параметр турбулентности α [107, 108].

Момент импульса в области внешнего радиуса перекачивается от вещества диска в орбитальное вращение двойной системы. Папалойзу и Прингл [86] показали что приливной радиус обрезания в среднем порядка ~ 0.9 радиуса полости Роша. Этот радиус близок к радиусу последней непересекающейся периодической орбиты, которая рассчитывается в задаче трех тел [87]. С помощью численных расчетов было показано, что приливной тензор напряжений важен в довольно узком кольце вблизи внешнего радиуса. Значительные возмущения в этой области приводят к рождению сильных спиральных ударных волн [77, 88, 89].

Поскольку отток момента импульса происходит в узкой области вблизи внешнего радиуса обрезания, мы можем не исследовать детально эту область, а рассмотреть ее как сток δ -типа. На расстояниях, много меньших радиуса приливного обрезания, F меняется пропорционально $r^{1/2}$ — там стационарный диск ведет себя согласно стандартной модели, не “замечая” внешних граничных условий и зависимость момента вязких сил от радиуса описывается выражением (1.126).

В рамках математической задачи мы также предполагаем, что величина внешнего радиуса диска не меняется, а темп втекания вещества на внешнем диске пренебрежимо мал. Условие неизменности внешнего радиуса справедливо для быстротечных периодов активности при вспышках в некоторых типах тесных двойных систем. Численные расчеты, в которых моделируется долговременная эволюция нестационарных дисков в двойных системах (рентгеновских и карликовых новых) — DIM⁹, — учитывают переменность внешнего радиуса диска [109]. Во время мощных вспышек в рентгеновских новых, когда яркость источника увели-

⁹Disk Instability Models (*англ.*)

чивается до миллиона раз, можно говорить о том, что темп аккреции внутри диска намного превышает темп перетекания вещества со звезды-компаньона. Этому соответствует равенство нулю производной $F(h, t)$ по h на внешнем радиусе.

Решение основного уравнения нестационарной аккреции (1.152) для диска, имеющего ограниченный постоянный внешний радиус, может быть найдено методом разделения переменных:

$$F(h, t) = F(t) \cdot f_F(h/h_0). \quad (1.174)$$

Величина $h_0 = (G M r_{\text{out}})^{1/2}$ равна удельному моменту импульса на внешнем краю диска. Указанные выше свойства момента вязких сил приводят к таким условиям на внешнем радиусе:

$$f_F(1) = 1, \quad f'_F(1) = 0, \quad (1.175)$$

первое из коотрых является нормировочным, а второе выражает собой тот факт, что момент вязких сил имеет максимум в непосредственной близости от внешнего радиуса диска (Рис. 1.18). Это равносильно условию нулевого темпа аккреции на r_{out} . Также можно говорить о равенстве нулю радиальной компоненты скорости на r_{out} . Аналогичный подход использовался, например, в работе [77] при исследовании диска, окружающего снаружи двойную систему. На внутренней границе такого диска происходит вток момента импульса, отдаваемого двойной системой, в результате чего звезды постепенно сближаются.

Таким образом, учет приливных взаимодействий приводит к заданию специфических граничных условий на внешнем краю диска, а уравнение, которое мы решаем (1.125 или 1.152), не меняется.

Естественно, что в реальности внутренний радиус диска $r_{\text{in}} \neq 0$, однако, во многих ситуациях $r_{\text{in}}/r_{\text{out}} \ll 1$.

Из уравнения (1.127), подставляя $h \equiv h_K$, получаем

$$\dot{M}(h, t) = f'_F(h/h_0)F(t)/h_0. \quad (1.176)$$

Подставляя произведение функций в уравнение нестационарной аккреции (1.152) получаем временную часть решения, которое дает асимптотику для эволюции диска после пика вспышки:

$$F(t) = \left(\frac{h_0^{n+2}}{\lambda m D (t + t_0)} \right)^{1/m}. \quad (1.177)$$

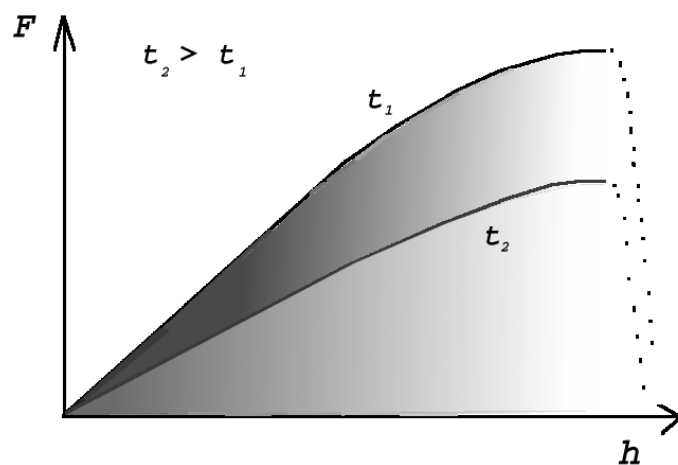


Рис. 1.18: Момент вязких сил F в зависимости от удельного момента импульса h в аккреционном диске в двойной системе в два момента времени, t_2 позже t_1 . Тенью условно показано распределение поверхностной плотности в диске. Темп аккреции падает со временем.

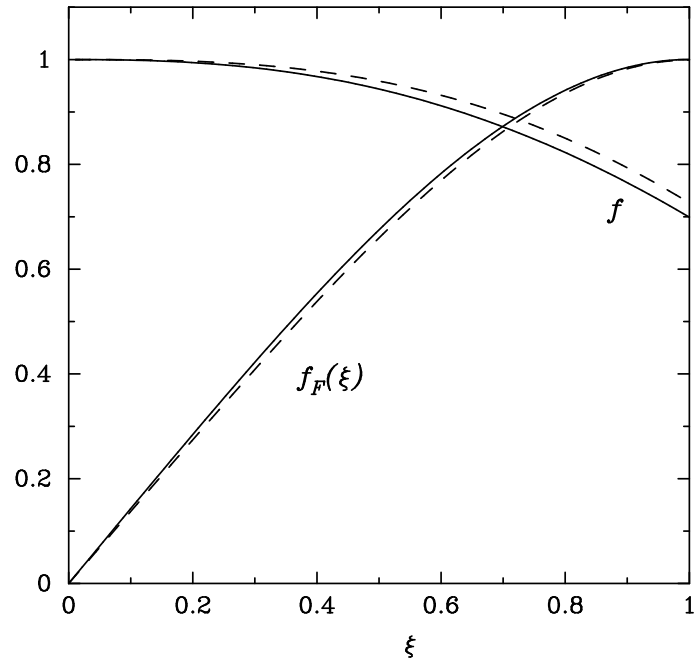


Рис. 1.19: Решение $f_F(\xi)$ в двух случаях: если $\nu_{\text{ff}} \gg \nu_{\text{T}}$ (сплошная линия) и если $\nu_{\text{T}} \gg \nu_{\text{ff}}$ (штриховая линия). Также изображена функция $f(r)$, рассчитанная по формуле (1.104), которая входит в выражения для расчета радиальных зависимостей физических параметров (§1.5.3). Темп аккреции практически не меняется по радиусу в области, где $f \approx 1$. Переменная $\xi = h/h_o$, h_o – удельный момент импульса на внешнем радиусе.

D — размерная константа (1.155), которая может быть получена при решении уравнений вертикальной структуры, λ — константа разделения, которая может быть найдена из граничных условий на $f_F(h/h_o)$, t_0 — константа интегрирования в единицах времени.

Закон изменения темпа аккреции записывается в следующем виде:

$$\dot{M}(t) = \dot{M}(0) (1 + t/t_0)^{-1/m}, \quad (1.178)$$

где $\dot{M}(0)$ — темп аккреции в некоторый момент времени $t = 0$, за который может быть принят любой момент на стадии убывания темпа аккреции. Тогда

$$t_0 = \frac{h_0^{n+2}}{\lambda m D F^m(0)},$$

где $F(0)$ — значение $F(h, t = 0)$ на внешнем радиусе r_{out} . Подставляя выражение (1.153) для D и учитывая, что $F_{\text{out}} = 3\pi h_0 \nu_{\text{out}} \Sigma_0$, получаем:

$$t_0 = \frac{4}{3\lambda a} \frac{r_{\text{out}}^2}{\nu_{\text{out}}(t = 0)}, \quad (1.179)$$

где a — степень при Σ в зависимости $\nu_t \propto \Sigma^a r^b$.

После разделения переменных в основном уравнении получится нелинейное уравнение для $f_F(\xi)$. Оно является частным случаем обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера [110]

$$\frac{d^2 f_F}{d\xi^2} = -\lambda \xi^n f_F^{1-m}, \quad (1.180)$$

решение которого можно искать в виде полинома

$$f_F(\xi) = a_0 \xi + a_1 \xi^k + a_2 \xi^l + \dots \quad (1.181)$$

Подставляя полином вместо $f_F(\xi)$ в уравнение (1.180), получим для второго и третьего членов:

$$\begin{aligned} k = 3 + n - m, \quad a_1 &= \frac{-\lambda a_0^{1-m}}{k(k-1)}, \\ l = 2k - 1, \quad a_2 &= \frac{-\lambda a_0^{-m} a_1}{l(l-1)} (1 - m). \end{aligned} \quad (1.182)$$

В Таблице 1.5 даны значения констант a_0 , λ , полученные с учетом граничных условий (1.175) на $f_F(\xi)$ в режимах непрозрачности по чистому

Таблица 1.5: Значения параметров аналитического решения (1.177), (1.178), (1.181) для ограниченного α -диска.

	m	n	λ	a_0	a_1	a_2	k	l
$\varkappa_T \gg \varkappa_{\text{ff}}$	2/5	6/5	3.482	1.376	-0.396	0.019	3.8	6.6
$\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_T$	3/10	4/5	3.137	1.430	-0.460	0.030	3.5	6.0
OPAL	1/3	1	3.319	1.400	-0.425	0.025	11/3	19/3

рассеянию и чистому поглощению, а также при аппроксимации закона непрозрачности при помощи результатов численных расчетов OPAL [71]. Соответствующие функции f_F показаны на Рис. 1.19. Случай OPAL эффективно оказывается чем-то средним.

Величина a_0 , которая входит в выражение для темпа аккреции

$$\dot{M}_{\text{in}} = \frac{F_{\text{max}}}{h_{\text{max}}} a_0 ,$$

может быть рассчитана и для автомодельного решения Любарского–Шакуры на заключительной стадии неограниченно расплывающегося диска (см. §1.6.6). При этом h_{max} — значение удельного момента импульса на том радиусе диска, где достигается максимум F_{max} . Замечательно, что a_0 , рассчитанные для ограниченного и неограниченного диска, отличаются всего на 2%. Это означает, что профиль $F(h)$ в области диска, где $F(h)$ растет, практически не зависит от условий вне этой области.

Радиальные зависимости для нестационарного диска в двойной системе

Приведем выражения для эволюции физических параметров в диске, которые получаются из уравнений (1.101, 1.154, 1.155 и 1.177). Отметим, что в зависимостях (1.106) и (1.112) присутствует функция $f(r)$ (без индекса), определяемая соотношением (1.104). В случае стационарного диска $f_F = \xi f$. В случае диска с переменным по радиусу темпом аккреции, например, в нестационарном диске, имеем $f_F = a_0 \xi f(r)$ (см. Рис. 1.19).

В следующих выражениях для параметра диффузии D , поверхностной плотности Σ_0 , температуры в центральной плоскости T_c , относительной полутолщины диска z_0/r и оптической толщи τ принято обозначение $m_x = M/M_\odot$ и значения $\Pi_{1..4}$ должны браться для соответствующего режима. Характерное время t_0 зависит от договоренности, какому

темпу аккреции соответствует $t = 0$, и может быть определено как

$$t_0 = \frac{h_0^{n+2-m} a_0^m}{\lambda m D \dot{M}_{\text{in}}^m(t=0)}, \quad (1.183)$$

Необходимо помнить, что t_0 зависит от типа непрозрачности.

Режим доминирующего рассеяния ($\varkappa_{\text{T}} \gg \varkappa_{\text{ff}}$) Подставляя численные значения констант в (1.155), получим:

$$D [\Gamma^{-2/5} \text{см}^{28/5} \text{с}^{-17/5}] = 1.40 \times 10^{38} \alpha^{4/5} m_{\text{x}}^{6/5} \left(\frac{\mu}{0.5}\right)^{-4/5} \Pi_{\Sigma}^{-1} \varkappa_{\text{T}}^{1/5}, \quad (1.184)$$

с помощью которого перепишем (1.183):

$$t_0 [\text{дни}] = 24.12 \alpha^{-4/5} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}}\right)^{7/5} \left(\frac{\dot{M}_{\text{in}}(t=0)}{10^{18} \Gamma/\text{с}}\right)^{-2/5} m_{\text{x}}^{1/5} \left(\frac{\mu}{0.5}\right)^{4/5} \Pi_{\Sigma} \varkappa_{\text{T}}^{-1/5}, \quad (1.185)$$

где (1.97) определяет \varkappa_{T} . Подставляя комбинацию $M_{\text{in}} t_0^{1/m}$ из (1.185) в закон уменьшения темпа аккреции $\dot{M}(t) = \dot{M}(0) (1 + t/t_0)^{-1/m}$ и далее темп аккреции и функцию $f(r) = f_F / (a_0 \sqrt{r/r_{\text{out}}})$ — в радиальные зависимости (1.106) в зоне В, получаем радиальные зависимости физических параметров в нестационарном α -диске:

$$\Sigma_0 [\Gamma \text{см}^{-2}] = 2.2 \times 10^2 \alpha^{-2} m_{\text{x}}^{1/2} \left(\frac{t+t_0}{10^{\text{д}}}\right)^{-3/2} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}}\right)^{3/2} \left(\frac{r}{r_{\text{out}}}\right)^{-9/10} f_F^{3/5} \times \\ \times \left(\frac{\mu}{0.5}\right)^2 \varkappa_{\text{T}}^{-1/2} \Pi_{\Sigma}^{5/2}, \quad (1.186)$$

$$T_{\text{c}} [\text{К}] = 1.8 \times 10^4 \alpha^{-1} m_{\text{x}}^{1/2} \left(\frac{t+t_0}{10^{\text{д}}}\right)^{-1} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_{\text{out}}}\right)^{-11/10} f_F^{2/5} \frac{\mu}{0.5} \Pi_3, \quad (1.187)$$

$$\frac{z_0}{r} = 0.04 \alpha^{-1/2} m_{\text{x}}^{-1/4} \left(\frac{t+t_0}{10^{\text{д}}}\right)^{-1/2} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_{\odot}}\right)^{3/4} \left(\frac{r}{r_{\text{out}}}\right)^{-1/20} f_F^{1/5} (\Pi_1 \Pi_3)^{1/2}, \quad (1.188)$$

Безразмерные коэффициенты Π_{Σ} , $\Pi_{1..4}$ введены в §1.5.2 при рассмотрении вертикальной структуры α -диска. Их связь определяется выражениями (1.107), в частности $\Pi_3 = \Pi_T \Pi_{\Sigma}$ и $(\Pi_1 \Pi_3)^{1/2} = \Pi_z \Pi_{\Sigma}^{1/2}$, а их значения

можно найти в Таблице 1.1 и на Рис. 1.8. Приведем также оценку τ^* — эффективной оптической толщи диска:

$$\tau^* = \left(\frac{\varkappa_{0,\Gamma} \varkappa_{0,\text{ff}} \rho_c}{T_c^{7/2}} \right)^{1/2} \Sigma_0 = 1.5 \times 10^2 \alpha^{-1} \left(\frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-1/4} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{1/10} f_F^{1/10} \left(\frac{\mu}{0.5} \right)^{5/4} \varkappa_\Gamma^{-1/4} \left(\frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{1/2} \left(\frac{\Pi_3^4 \Pi_4^3}{\Pi_1 \Pi_2^2} \right)^{1/4},$$

где размерность $\varkappa_{0,\text{ff}}$ [$\text{см}^2 \text{К}^{7/2} \Gamma^{-2}$].

Режим доминирующего поглощения ($\varkappa_{\text{ff}} \gg \varkappa_\Gamma$) Данный режим реализуется при более низких температурах и давлениях. Аналогично получаем:

$$D [\Gamma^{-3/10} \text{см}^5 \text{с}^{-16/5}] = 2.41 \times 10^{34} \alpha^{4/5} m_x \left(\frac{\mu}{0.5} \right)^{-3/4} \Pi_\Sigma^{-1} \left(\frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{1/10}, \quad (1.189)$$

$$t_0 [\text{дни}] = 36.41 \alpha^{-4/5} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{5/4} \left(\frac{\dot{M}_{\text{in}}(t=0)}{10^{18} \Gamma / \text{с}} \right)^{-3/10} m_x^{1/4} \times \\ \times \left(\frac{\mu}{0.5} \right)^{3/4} \Pi_\Sigma \left(\frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{-1/10}. \quad (1.190)$$

Величина $\varkappa_{0,\text{ff}}$ [$\text{см}^2 \text{К}^{7/2} \Gamma^{-2}$] выбирается согласно (1.99) или (1.98).

$$\Sigma_0 [\Gamma \text{см}^{-2}] = 9.9 \times 10^2 \alpha^{-8/3} m_x^{5/6} \left(\frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-7/3} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{13/6} \left(\frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-11/10} f_F^{7/10} \times \\ \times \left(\frac{\mu}{0.5} \right)^{5/2} \left(\frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{-1/3} \Pi_\Sigma^{10/3}, \quad (1.191)$$

$$T_c [\text{К}] = 3.1 \times 10^4 \alpha^{-1} m_x^{1/2} \left(\frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-1} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-9/10} f_F^{3/10} \left(\frac{\mu}{0.5} \right) \Pi_3, \quad (1.192)$$

$$\frac{z_0}{r} = 0.05 \alpha^{-1/2} m_x^{-1/4} \left(\frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-1/2} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{3/4} \left(\frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{1/20} f_F^{3/20} (\Pi_1 \Pi_3)^{1/2}. \quad (1.193)$$

Безразмерные коэффициенты $\Pi_\Sigma, \Pi_{1..4}$ введены в §1.5.2 при рассмотрении вертикальной структуры α -диска. Их связь определяется выражениями (1.113), в частности $\Pi_3 = \Pi_T \Pi_\Sigma$ и $(\Pi_1 \Pi_3)^{1/2} = \Pi_z \Pi_\Sigma^{1/2}$, а их значения

можно найти в Таблице 1.2 и на Рис. 1.8. Напомним, что поверхностная плотность Σ_0 рассчитывается между нижней и верхней поверхностями диска. Полная оптическая толща (для которой в стационарном случае применима формула (1.114)) равна:

$$\begin{aligned} \tau = \varkappa_{0,\text{ff}} \rho_c T_c^{-7/2} \Sigma_0 = 2.4 \times 10^2 \alpha^{-4/3} m_x^{1/6} \left(\frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-2/3} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{5/6} \times \\ \times \left(\frac{r}{r_{\text{out}}} \right)^{-1/10} f_F^{1/5} \left(\frac{\mu}{0.5} \right)^{3/2} \left(\frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{1/3} \left(\frac{\Pi_3^4 \Pi_4^2}{\Pi_1^{1/2} \Pi_2} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (1.194)$$

Закон уменьшения светимости α -диска с постоянным внешним радиусом Для расчета болометрической светимости диска можно взять квазистационарный темп аккреции $\dot{M}(t) = \dot{M}(0, t)$ (1.176), так как основная энергия выделяется на расстояниях от центра $r \ll r_{\text{out}}$. Квазистационарность обеспечивается тем, что характерное время эволюции (вязкое время) на малых радиусах много меньше характерного времени на больших радиусах. На Рис. 1.19 это проявляется тем, что функция $f(r)$ выходит на константу в направлении центра диска.

Используя найденные t_0 в законе уменьшения темпа аккреции (1.178), по формуле $L = \eta_{\text{accr}} \dot{M}(t) c^2$, где η_{accr} — эффективность аккреции, получаем:

$$\begin{aligned} L_T(t) [\text{эрг с}^{-1}] = 8.1 \times 10^{38} \alpha^{-2} m_x^{1/2} \left(\frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-5/2} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{7/2} \left(\frac{\eta}{0.1} \right) \times \\ \times \left(\frac{\mu}{0.5} \right)^2 \varkappa_T^{-1/2} \Pi_\Sigma^{5/2}, \end{aligned} \quad (1.195)$$

если преобладает томсоновское рассеяние во внешних частях диска, и

$$\begin{aligned} L_{\text{ff}}(t) [\text{эрг с}^{-1}] = 6.7 \times 10^{39} \alpha^{-8/3} m_x^{5/6} \left(\frac{t+t_0}{10^d} \right)^{-10/3} \left(\frac{r_{\text{out}}}{R_\odot} \right)^{25/6} \left(\frac{\eta}{0.1} \right) \times \\ \times \left(\frac{\mu}{0.5} \right)^{5/2} \left(\frac{\varkappa_{0,\text{ff}}}{10^{22}} \right)^{-1/3} \Pi_\Sigma^{10/3}, \end{aligned} \quad (1.196)$$

если преобладает непрозрачность по Крамерсу во внешних частях диска. Величины t_0 разные в выражениях (1.195) и (1.196) и определяются формулами (1.185) и (1.190), соответственно.

Отметим, что величины $t_0(\text{T})$ и $t_0(\text{ff})$ в двух режимах не являются независимыми. В физически согласованной модели с переходом между режимами непрозрачности необходимо искать пересечение решений. Например, будем сравнивать на радиусе $r = 0.5 r_{\text{out}}$ моменты вязких сил F и поверхностные плотности Σ_0 в двух режимах. Эти два условия будут задавать само время пересечения и разницу времен t_0 в двух режимах. Значение t_0 в одном из режимов является свободным параметром, который определяется из условия, что при $t = 0$ реализуется некоторое значение темпа аккреции.

На рисунке 1.20 построены болометрические кривые блеска для параметров $\alpha = 0.3$, $m_x = 3$, $\kappa_{0,\text{ff}} = 6.45 \times 10^{22} \text{ см}^5 \text{ К}^{7/2}/\text{г}^2$ и $\kappa_{\text{T}} = 0.4 \text{ см}^2/\text{г}$ в двух режимах непрозрачности. Используются типичные значения $\Pi_{1,2,3,4}$. Нормировочное время в режиме по поглощению (1.190) $t_0(\text{ff}) \approx 107$ дней получено из условия, что при $t = 0$ темп аккреции $\dot{M} = 10^{18} \text{ г/с}$. Равенство F и Σ в двух режимах на радиусе $r/r_{\text{out}} = 0.5$ наступает при

$$t + t_0(\text{ff}) = t_{\text{tr}} \approx 48^{\text{д}} (m_x/3)^{2/5} (\alpha/0.3)^{-4/5} (\mu/0.5)^{3/5} (r_{\text{out}}/R_{\odot})^{4/5} .$$

Однозначно определяется нормировочное время в режиме рассеяния $t_0(\text{T}) \approx 90$ дней. Пересечение кривых в момент $t = t_{\text{tr}} - t_0(\text{ff}) \approx -59^{\text{д}}$ отмечено крестом на Рис. 1.20. Можно видеть, что в это время происходит гладкий переход между решениями в двух режимах. Есть второе пересечение кривых при $t \approx -3^{\text{д}}$, которое соответствует второму пересечению функций $F_{\text{T}}(\xi, t + t_0(\text{T})) = F_{\text{ff}}(\xi, t + t_0(\text{ff}))$. Оно имеет лишь математический смысл. Физические условия в диске в этот момент таковы, что реализуется режим с доминирующим поглощением, а значения физических параметров в диске, рассчитанные по формулам (1.184)–(1.194), различаются.

Не забудем, что мы работаем в рамках модели геометрически-тонкого, докритического диска. Поэтому рассмотренные решения применимы только при светимости ниже эддингтоновской: $L_{\text{Edd}} \approx 1.4 \times 10^{38} m_x \text{ эрг с}^{-1}$. Из Рис. 1.20 следует, что эволюция диска при $L < L_{\text{Edd}}$ практически целиком идет в режиме непрозрачности по поглощению.

Когда температура в экваториальной плоскости диска T_c на больших радиусах уменьшается до значений $\sim 3 \times 10^4 \text{ К}$, непрозрачность сильно возрастает, так как начинается рекомбинация в плазме. Коэффициент D существенно меняет свое значение, и рассмотренное решение уже не может применяться. При этом в диске происходит перестройка вертикальной структуры за характерное тепловое время, так как изменяется

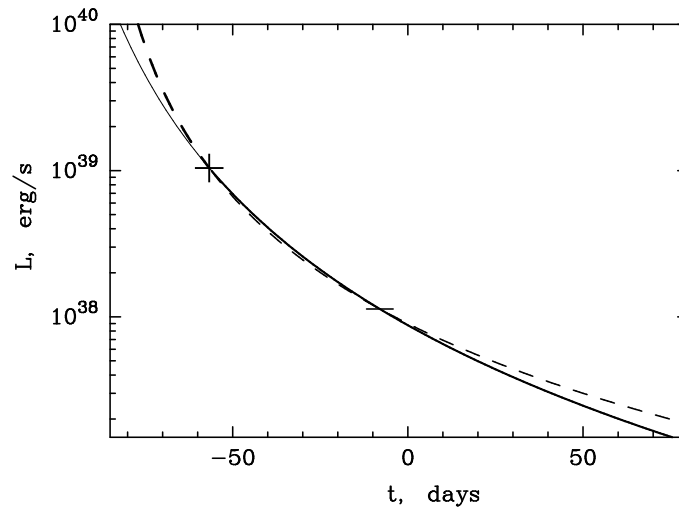


Рис. 1.20: Болومترическая светимость диска L_T и L_{ff} для параметров $m_x = 3$, $\alpha = 0.3$, $\mu = 0.5$, $r_{out} = R_\odot$. Штриховая линия — режим непрозрачности по рассеянию, сплошная — по поглощению. Крестом отмечен переход между решениями. Из режима с непрозрачностью по рассеянию диск переходит на решение с непрозрачностью по поглощению. Горизонтальным отрезком отмечено второе пересечение кривых.

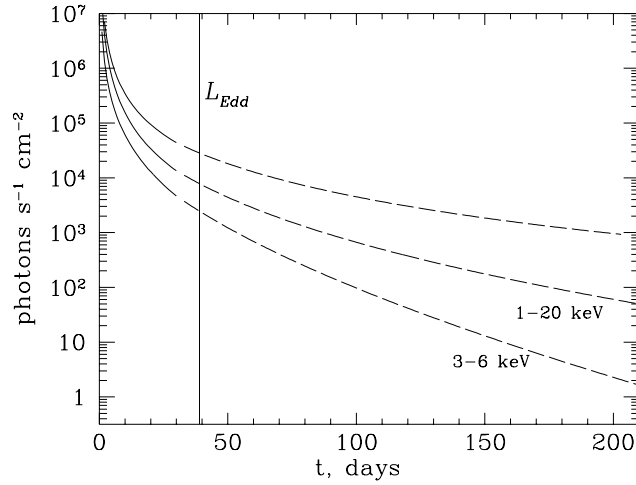


Рис. 1.21: Светимость диска, наблюдаемого с расстояния 1 кпк, при параметрах $m_x = 3$, $\alpha = 0.3$, $\mu = 0.5$, $r_{\text{out}} = R_{\odot}$. Сравнивается ход болометрической кривой и двух рентгеновских кривых блеска, 1–20 кэВ и 3–6 кэВ.

способ переноса энергии нагрева к поверхности диска. Появляются условия возникновения конвекции. Для параметров диска $m_x = 3$ и $\alpha = 0.3$ это происходит при $t \approx 80^{\text{d}}$ на Рис. 1.20.

На рисунке 1.21 показаны кривые блеска для болометрического и двух рентгеновских диапазонов от диска, который повернут перпендикулярно лучу зрения и находится на расстоянии 1 кпк. Вертикальной линией отмечен момент времени, после которого болометрическая светимость диска становится меньше L_{Edd} . Такой ход кривых блеска очень хорошо описывает экспоненциальное уменьшение светимости, которое наблюдается при вспышках рентгеновских новых.

В работе [108] было проведено моделирование двух вспышек рентгеновских новых в рентгеновском и оптических спектральных диапазонах и сравнение с наблюдаемыми кривыми. В модели был произведен учет облучения рентгеновским потоком внешних частей диска и его переработки в оптическое излучение. При этом были рассмотрены эффект искривления пути фотонов в метрике керровской черной дыры (см. Рис. 1.23), а также наличие протяженной атмосферы аккреционного диска, способной рассеивать рентгеновское излучение на высоте, превышающей его гидродинамическую толщину. В результате были получены

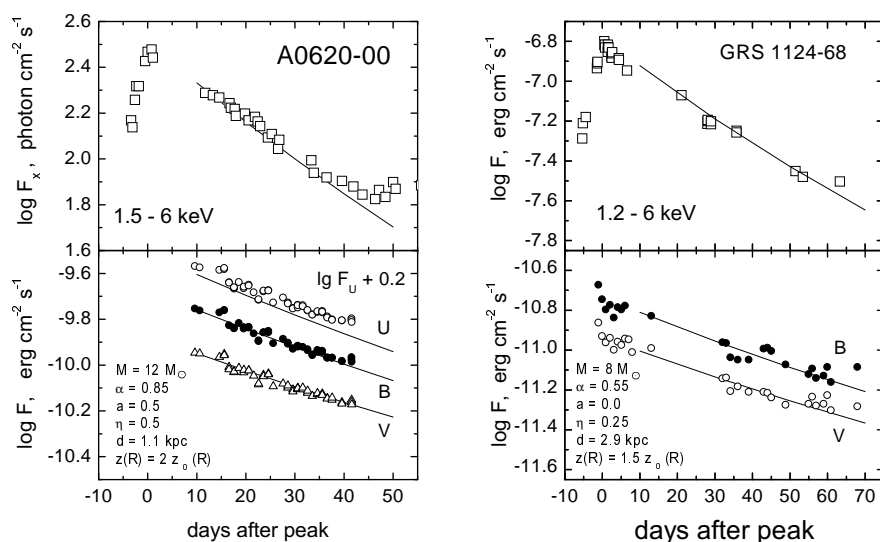


Рис. 1.22: Моделирование вспышек двух рентгеновских новых А 06020-00 (1975 г.) и GU Mus 1124-68 (1991 г.) из работы Сулейманова и др. [108]. Параметры моделей указаны на рисунке; кроме введенных в тексте обозначений имеются следующие параметры: a — безразмерный параметр Керра черной дыры, η — коэффициент переработки фотосферой диска рентгеновского излучения в оптическое, $z(r)$ — высота рассеивающей атмосферы.

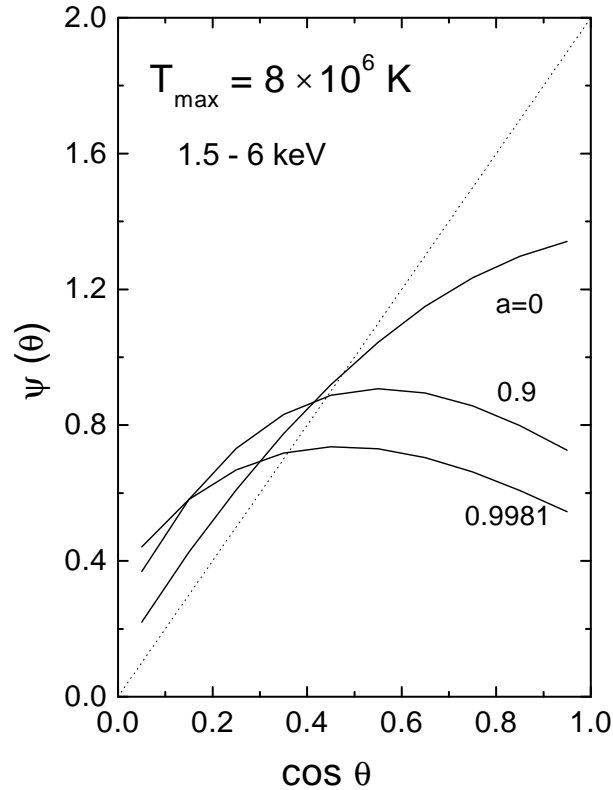


Рис. 1.23: Угловое распределение $\Psi(\theta)$ интенсивности от стандартного аккреционного диска вокруг керовской черной дыры, проинтегрированной по диапазону 1.5–6 кэВ (рисунок из работы [108]). Угол θ отсчитывается между нормалью к плоскости диска и лучом зрения. T_{\max} — максимальная эффективная температура диска. Безразмерный параметр Керра a указан рядом с зависимостями. Пунктирной линией показано угловое распределение интенсивности от плоского диска в ньютоновском приближении: $\Psi(\theta) = 2 \cos(\theta)$. Наблюдаемый поток может быть рассчитан по формуле $F = L \Psi(\theta)/(4\pi d)^2$, где L — болометрическая светимость, d — расстояние до диска. Функция $\Psi(\theta)$ рассчитана с использованием кода из [111]. Эффект потемнения к краю игнорируется. Его роль проиллюстрирована на рисунке 9 в работе [68].

ограничения на параметры дисков и двойных систем. При известных динамических параметрах систем (период, масса компонент) возможно получить интервал возможных значений параметра турбулентности α . На Рис. 1.22 дан пример моделирования кривых блеска и указаны подходящие параметры моделей.

1.7 Численное моделирование нестационарной дисковой аккреции

1.7.1 Решение уравнения вязкой эволюции

Рассмотрим уравнение вязкой эволюции аккреционного диска (1.125), полученное ранее:

$$\frac{\partial \Sigma_0(h_K, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{(GM)^2}{h_K^3} \frac{\partial}{\partial h_K} \left(\left[\frac{\partial h}{\partial h_K} \right]^{-1} \frac{\partial F(h_K, t)}{\partial h_K} \right), \quad (1.197)$$

где t — время, $h(r) = \omega(r)r$ — удельный момент импульса в диске, $h_K = \sqrt{GMr}$ — кеплеровский момент импульса, $\Sigma_0(h, t)$ — поверхностная плотность аккреционного диска, $F(h, t)$ — момент вязких сил, действующих на слой диска.

Будем рассматривать случай кеплеровского вращения, тогда $h_K = h$. Случай вращения в релятивистском потенциале усложнит выкладки и поставит ограничения на разбиение на узлы радиальной координаты h_K . Так, при использовании шварцшильдовского потенциала, в самых внутренних частях диска каждый следующий узел должен отстоять от центра не более чем в два раза дальше, чем предыдущий.

Для полной постановки задачи вязкой эволюции диска требуется задать начальное и граничные условия. В случае аккреции на черную дыру граничное условие на внутренней границе диска h_{in} , соответствующей последней устойчивой орбите (??), задается как равенство нулю момента вязких сил F . Если аккреционный диск ограничен внутри магнитосферой нейтронной или молодой звезды, то внутреннее граничное условие на значение F определяется условиями на магнитосферной границе. Таким образом, для ряда объектов задача имеет внутреннее граничное условие первого рода — условие, заданное на значение искомой функции.

Тип внешнего граничного условия также зависит от постановки астрофизической задачи. В двойной системе можно считать, что момент импульса отводится приливными силами с внешней границы диска, соответствующей h_{out} . Тогда, в предположении, что момент импульса отводится только приливными силами, и приток массы в аккреционный диск осуществляется только через его внешнюю границу, получаем граничное условие второго рода: $\partial F / \partial h = \dot{M}_{\text{out}}(t)$. В более общем случае, если проводить учет зависимости приливных сил от радиуса диска, унос момента импульса с поверхности диска ветром, захват вещества диском в большом диапазоне его радиусов и т.п., то необходимо добавить в исходное уравнение (1.197) дополнительное слагаемое $\text{Source}(\Sigma_0, F, h, t, z)$. Если рассматривается эволюция бесконечного диска, например, протопланетного диска или диска вокруг сверхмассивной черной дыры в активном галактическом ядре, то, с математической точки зрения, граничным условием на бесконечности будет равенство значения и производной момента вязких сил нулю. Однако, с точки зрения численного моделирования, мы не можем оперировать бесконечными значениями удельного момента импульса h . В таком случае можно пойти двумя путями. Во-первых, можно ограничить рассматриваемую область некоторым значением h_{out} , до которого за рассматриваемый интервал времени не дойдет хоть сколько-нибудь значимая часть вещества, и установить там граничное условие на равенство нулю момента вязких сил F . Во-вторых, можно заменить радиальную координату h на другую так, чтобы бесконечному значению h соответствовало конечное значение новой координаты, например: $1/h$, $1 - e^{-h}$ или $\text{arctg} h$. Однако, замена радиальной координаты приведет к усложнению исходного уравнения и, как следствие, к возникновению жестких ограничений на шаг разбиения на узлы новой радиальной координаты.

Уравнение (1.197) записано относительно двух неизвестных, но связанных друг с другом функций: $\Sigma_0(h, t)$ и $F(h, t)$. Одну из этих величин можно получить при любом значении удельного момента импульса h и в любой момент времени t , зная значение другой величины. Выше были рассмотрены случаи линейной и степенной связи $\Sigma_0(h)$ и $F(h)$, для которых возможны аналитические решения уравнения (1.197). Однако, если нам интересно рассмотреть случай, в котором Σ_0 и F не связаны во всем диске единым степенным законом, то задачу (1.197) стоит решать численно. Поставленную задачу удобнее решать относительно функции $F(h, t)$, так как граничные условия поставлены именно относительно нее

и, кроме того, как будет показано далее, это более удобно при использовании связи между Σ_0 и F через численное решение уравнений вертикальной структуры диска. Таким образом, будем записывать поверхностную плотность как функцию радиальной координаты и момента вязких сил: $\Sigma_0(F(h, t), h)$.

Отметим, что рассматриваемая задача является частным случаем нелинейного уравнения диффузии. Обычно в физике рассматриваются уравнения диффузии, в которых нелинейность вносит коэффициент диффузии, стоящий под производной по пространственной координате. Однако, как было отмечено выше, в нашем случае удобнее рассматривать задачу относительно функции $F(h, t)$, тогда нелинейная функция $\Sigma_0(F(h, t), h)$ входит во временную часть уравнения (1.197). Ниже будет изложен метод решения именно такого уравнения диффузии, в котором нелинейность внесена в производную по времени. Данный метод во многом схож с методом, детально рассмотренным в классических книгах по численным методам [112, 113], используемом для решения уравнений диффузии с нелинейностью в правой части.

Рассмотрим задачу эволюции аккреционного диска в двойной системе в ньютоновском потенциале, считая, что отвод момента импульса осуществляется приливными силами строго с внешней границы диска:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Sigma_0(F(h, t), h)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{(GM)^2}{h^3} \frac{\partial^2 F(h, t)}{\partial h^2}, \\ F(h_{\text{in}}, t) = F_{\text{in}}(t), \\ \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{\text{out}} = \dot{M}_{\text{out}}(t), \\ F(h, 0) = F_0(h), \\ h \in [h_{\text{in}}, h_{\text{out}}], \\ t \in [0, t_{\text{fin}}], \end{array} \right. \quad (1.198)$$

где $F_0(h)$ — начальное условие, удовлетворяющее граничным условиям, t_{fin} — интервал времени, на котором производится расчет.

Для построения разностной схемы введём произвольный набор узлов h_n :

$$\begin{aligned} h_1 &< h_2 < \dots < h_n < \dots < h_{N-1} < h_N, \\ \Delta h_n &\equiv h_n - h_{n-1}, \\ n &= 1 \dots N, \end{aligned} \quad (1.199)$$

где h_1 и h_N соответствуют значению кеплеровского удельного момента импульса на внутренней и внешней границах диска. Будем рассматривать решение уравнения на временном интервале между моментом времени t_0 с уже известными значениями искомой функции и моментом $t_0 + \Delta t$, на котором требуется эти значения определить.

Заменяем все функции на соответствующие им сеточные функции и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 F(h_n, t_0) &\Rightarrow F_n, & F(h_n, t_0 + \Delta t) &\Rightarrow \tilde{F}_n, \\
 \Sigma_0(F(h_n, t_0), h_n) &\Rightarrow \Sigma_n, & \Sigma_0(F(h_n, t_0 + \Delta t), h_n) &\Rightarrow \tilde{\Sigma}_n, \\
 F_{\text{in}}(t_0) &\Rightarrow F_{\text{in}}, & F_{\text{in}}(t_0 + \Delta t) &\Rightarrow \tilde{F}_{\text{in}}, \\
 M_{\text{out}}(t) &\Rightarrow F'_{\text{out}}, & M_{\text{out}}(t_0 + \Delta t) &\Rightarrow \tilde{F}'_{\text{out}}.
 \end{aligned} \tag{1.200}$$

Начнем составление разностной схемы. Сначала запишем разностные уравнения для граничных условий. Внутреннее граничное условие первого рода запишется в точном виде:

$$F_1 = F_{\text{in}}. \tag{1.201}$$

Для того, чтобы записать внешнее граничное условие второго рода, разложим \tilde{F}_{N-1} в ряд Тейлора в точке h_N :

$$\tilde{F}_{N-1} = \tilde{F}_N - \Delta h_N \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_N} + \frac{\Delta h_N^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_N} + o(\Delta h_N^2). \tag{1.202}$$

Обратим внимание, что во всех рассматриваемых здесь и далее выражениях для производных по h используются значения момента вязких сил \tilde{F}_n на момент времени $t_0 + \Delta t$. Схема, которая будет получена в итоге, называется неявной и является устойчивой. То есть, в отличие от явной схемы, в которой производные по h записывались бы через известные значения F_n на момент времени t_0 , неявная схема гарантирует, что внесенные на данном временном шаге ошибки не будут расти на следующих шагах. Не вдаваясь в подробности, заметим, что кроме явной и неявной схемы существует смешанная схема, в которой для вычисления производной по пространственной координате используются значения функции как на момент времени t_0 , так и на момент времени $t_0 + \Delta t$. Смешанная схема в некоторых случаях позволяет добиться увеличения точности решения при правильном подборе весовых коэффициентов между значениями искомой функции в разные моменты времени. Узлы, используемые в различных схемах, изображены на рисунке 1.24.

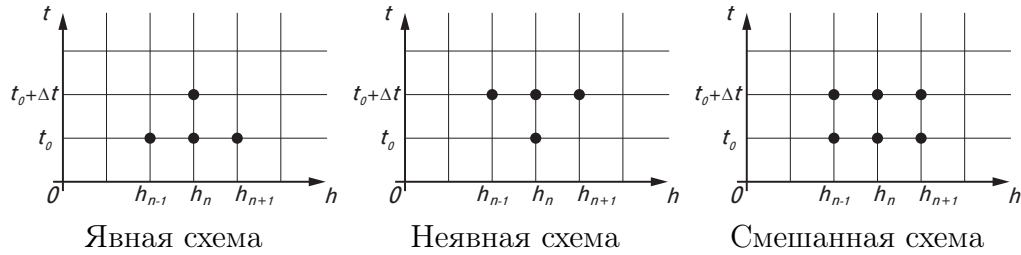


Рис. 1.24: Узлы, которые используются для написания n -го уравнения системы 1.210 в различных схемах. Нами используется неявная схема.

Из выражения (1.202), отбросив последнее слагаемое, можно получить простое выражение для численного значения первой производной F по h с точностью до первого порядка интервала разложения Δh_N :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_N} = \frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h_N} + o(\Delta h). \quad (1.203)$$

Однако, если подставить в (1.202) значение второй производной F по h , выраженное из исходного уравнения (1.198), то можно повысить точность до второго порядка Δh_N :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_N} = \frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h_N} + \Delta h_N \frac{2\pi h_N^3}{(GM)^2} \frac{\partial \Sigma_0(h_N)}{\partial t} + o(\Delta h_N^2), \quad (1.204)$$

где выражение для производной Σ_0 по времени t по аналогии с (1.203) имеет вид:

$$\frac{\partial \Sigma_0(h_N)}{\partial t} = \frac{\tilde{\Sigma}_N - \Sigma_N}{\Delta t} + o(\Delta t). \quad (1.205)$$

Таким образом, получаем конечное выражение для внешнего граничного условия:

$$\frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h_N} + \frac{\Delta h_N}{\Delta t} \frac{2\pi h_N^3}{(GM)^2} (\tilde{\Sigma}_N - \Sigma_N) + o(\Delta h_N^2) + o(\Delta t) = \tilde{F}'_{\text{out}}. \quad (1.206)$$

Теперь, когда получены уравнения на значения функции на обоих концах интервала h , получим разностный вид самого дифференциального уравнения из (1.198). Запишем разложения в ряд Тейлора для \tilde{F}_{n-1}

и \tilde{F}_{n+1} вокруг точки h_n :

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{n-1} &= \tilde{F}_n - \Delta h_n \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_n} + \frac{\Delta h_n^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} + o(\Delta h_n^2), \\ \tilde{F}_{n+1} &= \tilde{F}_n + \Delta h_{n+1} \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h_n} + \frac{\Delta h_{n+1}^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} + o(\Delta h_{n+1}^2),\end{aligned}\quad (1.207)$$

где $n = 2 \dots N - 1$.

Для удобства введем обозначение: $\Delta h = \max(h_n)$, где $n = 2 \dots N$. Тогда везде можно заменить $o(\Delta h_n)$ на $o(\Delta h)$.

Можно выразить вторую производную F по h из (1.207):

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} = 2 \frac{\tilde{F}_{n-1} \frac{\Delta h_{n+1}}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}} - \tilde{F}_n + \tilde{F}_{n+1} \frac{\Delta h_n}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}}}{\Delta h_n \Delta h_{n+1}} + o(\Delta h^2). \quad (1.208)$$

Заметим, что при использовании однородной сетки по h , то есть при $\Delta h_n = \Delta h_{n+1} = \Delta h$, последнее выражение принимает более простой вид:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h_n} = \frac{\tilde{F}_{n-1} - 2\tilde{F}_n + \tilde{F}_{n+1}}{\Delta h^2}. \quad (1.209)$$

Подставив значения производных (1.205) и (1.208) в дифференциальное уравнение из (1.198) и заменив в (1.198) граничные условия на их разностные аналоги (1.201) и (1.206), получим разностную схему для решения нашей задачи:

$$\begin{aligned}\frac{4\pi h_n^3}{(GM)^2} \frac{\tilde{\Sigma}_n - \Sigma_n}{\Delta t} &= 2 \frac{\tilde{F}_{n-1} \frac{\Delta h_{n+1}}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}} - \tilde{F}_n + \tilde{F}_{n+1} \frac{\Delta h_n}{\Delta h_n + \Delta h_{n+1}}}{\Delta h_n \Delta h_{n+1}}, \\ \tilde{F}_1 &= \tilde{F}_{\text{in}}, \\ \frac{\tilde{F}_N - \tilde{F}_{N-1}}{\Delta h_N} + \frac{\Delta h_N}{\Delta t} \frac{2\pi h_N^3}{(GM)^2} (\tilde{\Sigma}_N - \Sigma_N) &= \tilde{F}'_{\text{out}}, \\ n &= 2 \dots N - 1.\end{aligned}\quad (1.210)$$

Заметим, что точность полученной системы порядка $o(\Delta h^2) + o(\Delta t)$.

В итоге мы свели решение дифференциального уравнения с граничными условиями (1.198) к последовательному решению системы из N алгебраических уравнений (1.210) на каждом временном шаге между $t = 0$

и t_{fin} . Однако эта система не является линейной, так как Σ_n и F_n связаны нелинейным законом $\Sigma_n = \Sigma_0(F_n, h_n)$. Одним из подходов для решения данной системы является метод последовательных приближений значений $\tilde{\Sigma}_n$. Для этого сначала выбираются некие приближенные значения $\tilde{\Sigma}_n^{(1)}$ (самый простой вариант — значения на текущем временном шаге Σ_n), решается система линейных алгебраических уравнений для нахождения промежуточных значений $\tilde{F}_n^{(1)}$. Затем вычисляются новые значения $\tilde{\Sigma}_n^{(2)} = \Sigma_0(\tilde{F}_n^{(1)}, h_n)$ и снова решается система линейных алгебраических уравнений. Этот простой итерационный метод можно ускорить ценой запоминания распределений неизвестной величины на нескольких предыдущих итерационных шагах, за подробностями см. [114].

Можно придумать множество критериев конца итераций, воспользуемся одним из них — условием малого изменения значений $\tilde{\Sigma}_n^{(s)}$ между двумя последовательными итерациями. Формализуем этот критерий:

$$\max_{n=2\dots N} \left| \frac{\tilde{\Sigma}_n^{(s+1)} + \tilde{\Sigma}_n^{(s)}}{\tilde{\Sigma}_n^{(s+1)}} \right| < \epsilon, \quad (1.211)$$

где верхние индексы в скобках указывают количество проведенных итераций, ϵ — безразмерная точность поиска значений $\tilde{\Sigma}_n$.

Осталось заметить, что решение системы линейных алгебраических уравнений на каждом этапе метода последовательных приближений может быть проведено методом прогонки. Подробности этого метода можно найти в учебниках по численным методам, например [115].

Познакомиться с реализацией описанной схемы на языке C++ можно на странице программного кода FREDDI¹⁰. FREDDI предназначен для моделирования кривых блеска рентгеновских новых с быстрым ростом и экспоненциальным спадом [116]. В качестве начальных условий может быть выбрано либо квазистационарное распределение (см. раздел 1.6.7), описывающее радиальную структуру диска послеплече вещества вдали от центральной черной дыры на начальных стадиях вспышки. С помощью FREDDI можно описать зависимость темпа аккреции на черную дыру от времени $\dot{M}(t)$ и получить кривые блеска в любом энергетическом диапазоне.

¹⁰<http://xray.sai.msu.ru/~malanchev/freddi/>

1.7.2 Решение уравнений вертикальной структуры

В § 1.5.2 были получены уравнения вертикальной структуры диска (1.95):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} &= -\omega_K^2 z, \\ \frac{d\Sigma}{dz} &= \rho, \\ \frac{dQ}{dz} &= \frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi}, \\ \frac{c}{3\kappa_R \rho} \frac{d(aT^4)}{dz} &= -Q. \end{aligned}$$

Для того, что бы использовать решение этой системы уравнений для нахождения связи между поверхностной плотностью Σ_0 и моментом вязких сил F , необходимо выбрать подходящие граничные условия. Если считать известной на данном радиусе поверхностную плотность, то мы получим лишь три граничных условия: $\Sigma(z = 0) = 0$, $\Sigma(z = z_0) = \Sigma_0/2$ и $Q(z = z_0) = 0$.

С другой стороны, считая известным момент вязких сил F на данном радиусе, можно получить необходимое количество граничных условий для решения системы (1.212).

По аналогии с рассуждениями из § 1.5.2 получим граничное условие для давления на уровне фотосферы:

$$P(z = z_0) = \frac{2}{3} \frac{\omega_K^2 z_0}{\kappa_R}. \quad (1.212)$$

Если считать, что энерговыделение происходит только глубже фотосферы, то поток излучения в ней определяется уравнением (1.75):

$$Q(z = z_0) = \frac{3}{8\pi} \frac{F \omega_K}{r^2}. \quad (1.213)$$

В силу симметрии в экваториальной плоскости диска поток равен нулю:

$$Q(z = 0) = 0. \quad (1.214)$$

Полагая спектр излучения чернотельным, будем считать температуру в фотосфере равной эффективной температуре:

$$T(z = z_0) = \left(\frac{Q(z = z_0)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}. \quad (1.215)$$

Граничное условие $\Sigma = 0$ может быть задано как на поверхности диска, там и в плоскости его симметрии. Обратим внимание, что в плоскости симметрии может быть задано лишь два граничных условия — на поток Q (1.186) и поверхностную плотность Σ . Однако, если задать Σ равной нулю на поверхности диска и интегрировать систему в направлении центральной плоскости, то нам будут известны начальные значения всех четырех неизвестных функций: давления P (1.185), поверхностной плотности Σ , потока Q (1.186) и температуры T (1.188). Таким образом, далее мы будем рассматривать интегрирование по направлению от поверхности к плоскости его симметрии.

При том, что известны все граничные условия на уровне фотосферы диска, нам не известна полутолщина диска z_0 . Для удобства интегрирования системы 1.212 от фотосферы к плоскости симметрии диска, перепишем ее для другой вертикальной переменной $\hat{z} \equiv z_0 - z$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\hat{z}} = \omega_K^2 (z_0 - \hat{z}), \quad (1.216)$$

$$\frac{d\Sigma}{d\hat{z}} = \rho, \quad (1.217)$$

$$\frac{dQ}{d\hat{z}} = -\frac{3}{2} \omega_K w_{r\varphi}, \quad (1.218)$$

$$\frac{c}{3\kappa_R \rho} \frac{d(aT^4)}{d\hat{z}} = Q, \quad (1.219)$$

$$P(\hat{z} = 0) = \frac{2\omega_K^2 z_0}{3\kappa_R}, \quad (1.220)$$

$$\hat{\Sigma}(\hat{z} = 0) = 0, \quad (1.221)$$

$$Q(\hat{z} = 0) = \frac{3}{8\pi} \frac{F\omega_K}{r^2}, \quad (1.222)$$

$$Q(\hat{z} = z_0) = 0, \quad (1.223)$$

$$T(\hat{z} = 0) = \left(\frac{Q(\hat{z} = 0)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}, \quad (1.224)$$

где $\hat{\Sigma}(\hat{z}) = \Sigma_0/2 - \Sigma(\hat{z})$ — отсчитывается от поверхности диска.

Эта система состоит из четырех уравнений, пяти граничных условий и одной неизвестной — z_0 . Необходимо подобрать такое значение z_0 , чтобы при интегрировании системы (1.224) от $\hat{z} = 0$ к $\hat{z} = z_0$ было удовлетворено граничное условие $Q(\hat{z} = z_0) = 0$. В качестве начального

приближения для z_0 можно использовать значения, полученные аналитически (см § 1.5.3), и затем методом последовательных итераций искать z_0 .

Облучение аккреционного диска жестким излучением

В рентгеновских двойных системах внешние части диска с температурой фотосферы порядка 10^4К могут облучаться прямыми или рассеянными в короне фотонами от внутренней зоны диска, температура которой порядка 10^7К . Кроме того, источником рентгеновских фотонов может быть поверхность нейтронной звезды. В протопланетных дисках ультрафиолетовое излучение молодой звезды облучает поверхность диска с температурой порядка 10^2К .

Рассмотрим случай облучения диска жестким излучением, падающим на поверхность диска под углом $\arccos \zeta$ (также см. раздел 1.9). В случае, когда речь идет об облучении диска точечным источником, расположенным в центре диска, а диск можно считать тонким, имеет место соотношение

$$\zeta = \frac{dz_0}{dr} - \frac{z_0}{r}. \quad (1.225)$$

Тогда поток излучения, падающего на поверхность диска на радиусе r , равен $\zeta L_x / (4\pi r^2)$. Если источником жесткого излучения является сам диск, то диаграмма направленности излучения не изотропна. В предположении, что центральный источник — точечный, поток записывается как $\zeta L_x / (4\pi r^2) \times \Psi(\theta)$. Функция $\Psi(\theta)$ показана на Рис. 1.23, где угол θ отсчитывается от вертикальной оси.

Детальный расчет влияния облучения на вертикальную структуру диска достаточно сложен и проведен, например, в работе [117]. В первом приближении можно ограничиться изменением граничного условия на поток, исходящий с поверхности диска:

$$Q(\hat{z} = 0) = \frac{3}{8\pi} \frac{F\omega_K}{r^2} + \zeta \frac{L_x}{4\pi r^2} \Psi(\theta).$$

В работе [108] было показано, что для объяснения наблюдаемых оптических кривых блеска рентгеновских Новых в формуле (1.225) требуется использовать эффективную толщину диска по перехвату излучения, в два раза большую, чем z_0 . Предполагается, что нижние слои атмосферы диска, находящиеся над фотосферой, являются непрозрачными для мягкого рентгена, исходящего из центральных частей диска.

Кроме того, в статье [118] из моделирования кривой блеска облученной звезды-компаньона в барстере GS 1826-238 (маломассивной рентгеновской двойной с нейтронной звездой) было показано, что эффективная толщина диска по перехвату рентгеновского излучения примерно в два раза превосходит z_0 .

1.7.3 Пример численного моделирования кривой блеска рентгеновской Новой типа FRED

Рассмотрим численное моделирование рентгеновской новой A 0620–00. Для построения модели использовались следующие параметры двойной системы: масса центрального объекта (черной дыры) — $6.6M_{\odot}$, масса оптического компаньона — $0.5M_{\odot}$, орбитальный период — 0.323 дня, наклон орбитальной оси системы к лучу зрения — 53.5° , расстояние до системы — 1.1 кпк. Эти параметры были получены в работах из анализа кривой блеска данной системы в спокойном состоянии [119], [120]. На рисунках 1.25 и 1.26 изображены кривые блеска этого источника в мягком рентгеновском диапазоне и в полосе В.

Кривая блеска A 0620–00, вспыхнувшей в 1975 году, — представитель кривых блеска типа FRED¹¹, у которых быстрый рост светимости сменяется квазиэкспоненциальным спадом. На рисунках показана только часть кривой блеска после максимума светимости. Интересной особенностью большинства кривых блеска типа FRED является наличие вторичного пика. Природа этого пика на сегодняшний день остается под вопросом.

Для воспроизведения вторичного пика было предположено, что звезда-донор на 43й день после максимума вбрасывает значительное количество вещества в диск. В рамках модели это вещество мгновенно увеличивает поверхностную плотность диска в его внешних областях, что приводит к скачку оптической светимости (Рис. 1.25).

За счет увеличения поверхностной плотности во внешнем диске происходит постепенное увеличение темпа аккреции в центральной части диска. Это приводит к увеличению температуры и, как следствие, рентгеновской светимости диска. Таким образом, появляется локальный максимум на рентгеновской кривой блеска (Рис. 1.26).

¹¹Fast rise exponential decay (англ.).

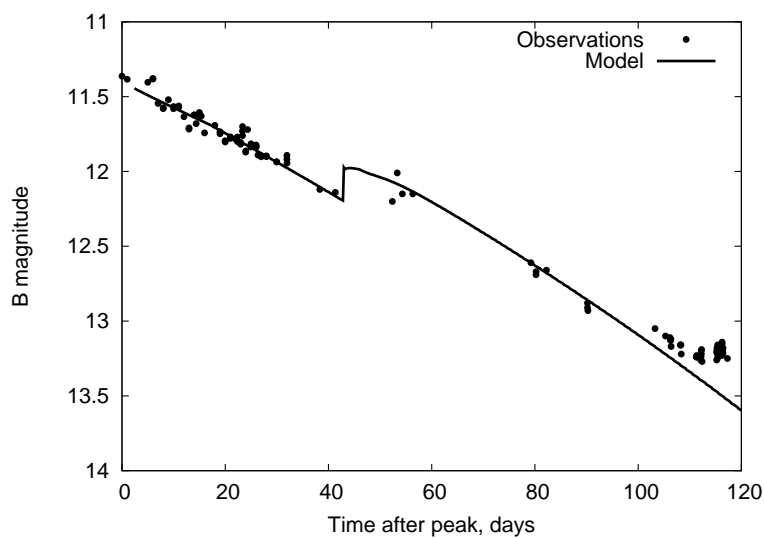


Рис. 1.25: Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в фотометрической полосе В. Кружками отмечены данные наблюдений [121, 122], сплошной линией — модельная кривая блеска.

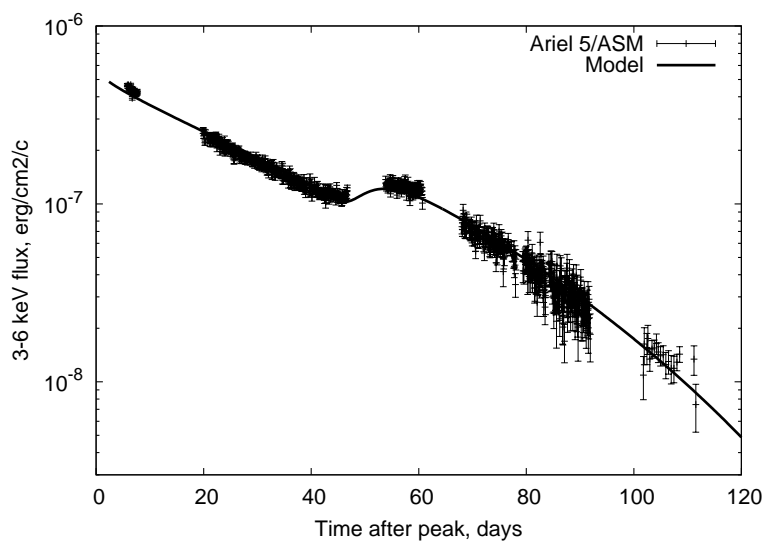


Рис. 1.26: Кривая блеска рентгеновской Новой А 0620–00 в диапазоне 3–6 кэВ. Вертикальными линиями показаны данные спутника Ariel 5 с ошибками [123], сплошной линией — модельная кривая блеска.

По участку рентгеновской кривой блеска до вторичного пика определяется максимальный темп аккреции $\approx 0.2M_{\text{Edd}}$ и параметр $\alpha \approx 0.3$. По участку оптической кривой блеска до вторичного пика получено значение эффективной толщины диска по перехвату рентгеновского излучения, которое оказывается $\approx 2z_0$.

При моделировании вспышек рентгеновских новых необходимо иметь в виду, что в общем случае диск имеет области с качественно разными физическими условиями. Есть горячая внутренняя часть с ионизованным веществом (зоны А, В и С), а есть внешняя более холодная часть – с более низким темпом аккреции. Когда диск остывает до температур, при которых водород рекомбинирует, параметр α понижается примерно на порядок [124]. В первом приближении можно считать, что аккреция в холодных внешних областях диска останавливается. Граница между горячей и холодной зонами сдвигается к центру вслед за фронтом рекомбинации водорода.

Авторы опубликовали открытый код FREDDI, предназначенный для моделирования кривых блеска типа FRED рентгеновских новых. Код рассчитывает эволюцию диска, если он полностью ионизован, а также если холодный фронт, за которым вещество не ионизовано, продвигается к центру. Используя данный код, была промоделирована вспышка 2002 года рентгеновской новой 4U 1543-47, в которой находится надежный кандидат в черную дыру [116].

Литература

- [1] Шакура Н. И., *Астрономический Журнал* **49**, 921 (1972).
- [2] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *A&A* **24**, 337 (1973).
- [3] Горбацкий В. Г., *АЖ* **41**, 849 (1964).
- [4] D. Lynden-Bell, *Nature* **223**, 690 (1969).
- [5] J. E. Pringle and M. J. Rees, *A&A* **21**, 1 (1972).
- [6] S. Kato, J. Fukue, and S. Mineshige, *Black-hole accretion disks*, (Kyoto, Japan: Kyoto University Press 1998).
- [7] J. Frank, A. King, and D. J. Raine, *Accretion Power in Astrophysics* (2002), third edn., Cambridge University Press.
- [8] M. A. Abramowicz and P. C. Fragile, *Living Reviews in Relativity* **16**, 1 (2013).
- [9] Морозов А. Г. and Хоперсков А. В., *Физика дисков* (2005), Волгоград, Изд-во Волгоградского университета.
- [10] Бисикало Д. В., Жилкин А. Г., and Боярчук А. А., *Газодинамика тесных двойных систем* (2013), Москва, ФИЗМАТЛИТ.
- [11] J.-P. Lasota, ArXiv e-prints (2015).
- [12] F. Meyer and E. Meyer-Hofmeister, *A&A* **104**, L10 (1981).
- [13] A. P. Lightman and D. M. Eardley, *ApJ* **187**, L1+ (1974).
- [14] N. Shibazaki and R. Hōshi, *Progress of Theoretical Physics* **54**, 706 (1975).

- [15] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, MNRAS **175**, 613 (1976).
- [16] Ландау Л. Д. and Лившиц Е. М., *Гидродинамика, Курс теоретической физики*, vol. 6 (1959).
- [17] S. Kato, J. Fukue, and S. Mineshige, *Black-Hole Accretion Disks — Towards a New Paradigm*, (Kyoto, Japan: Kyoto University Press 2008).
- [18] D. Lynden-Bell and J. E. Pringle, MNRAS **168**, 603 (1974).
- [19] Y. B. Zeldovich, Royal Society of London Proceedings Series A **374**, 299 (1981).
- [20] Фридман А. М., Письма в АЖ **15**, 1122 (1989).
- [21] B. Dubrulle, Icarus **106**, 59 (1993).
- [22] S. A. Balbus and J. F. Hawley, Reviews of Modern Physics **70**, 1 (1998).
- [23] D. Richard and J.-P. Zahn, A&A **347**, 734 (1999).
- [24] G. S. Bisnovatyi-Kogan and R. V. E. Lovelace, New Astronomy Reviews **45**, 663 (2001).
- [25] Колесниченко А. В. and Маров М. Я., *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред* (2009).
- [26] Велихов Е. П., ЖЭТФ **36**, 1398 (1959).
- [27] S. Chandrasekhar, Proceedings of the National Academy of Science **46**, 253 (1960).
- [28] S. A. Balbus and J. F. Hawley, ApJ **376**, 214 (1991).
- [29] D. M. Eardley and A. P. Lightman, ApJ **200**, 187 (1975).
- [30] A. A. Galeev, R. Rosner, and G. S. Vaiana, ApJ **229**, 318 (1979).
- [31] F. V. Coroniti, ApJ **244**, 587 (1981).
- [32] C. A. Tout and J. E. Pringle, MNRAS **259**, 604 (1992).

- [33] A. Brandenburg, A. Nordlund, R. F. Stein, and U. Torkelsson, *ApJ* **458**, L45 (1996).
- [34] Википедия, http://ru.wikipedia.org/wiki/Задачи_тысячелетия.
- [35] J. W. Deardorff, *Journal of Fluid Mechanics* **41**, 453 (1970).
- [36] Монин А. С. and Яглом А. М., *Статистическая гидромеханика* (1965).
- [37] A. J. Favre, *Statistical Equations of Turbulent Gases* (1969), 231–267.
- [38] R. Pletcher, J. Tannehill, and D. Anderson, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Second Edition*, Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences, (Taylor & Francis 1997).
- [39] L. Prandtl, *Z. angew. Math. Mech.* **5**, 136 (1925).
- [40] F. Meyer and E. Meyer-Hofmeister, *A&A* **140**, L35 (1984).
- [41] J. K. Cannizzo, *ApJ* **494**, 366 (1998).
- [42] Сюняев Р.А. and Шакура Н.И., *Письма в АЖ* **3**, 262 (1977).
- [43] I. D. Novikov and K. S. Thorne, in *Black Holes (Les Astres Occlus)* (Edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt) (1973), 343–450.
- [44] Шапиро С. and Тьюколски С., *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды* (1985), Москва, Изд-во Мир.
- [45] Торн К., Макдональд Д., and Прайс Р., *Черные дыры: мембранный подход* (1988), Москва, Изд-во Мир.
- [46] R. Shafee, R. Narayan, and J. E. McClintock, *ApJ* **676**, 549 (2008).
- [47] B. Paczynsky and P. J. Wiita, *A&A* **88**, 23 (1980).
- [48] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields, Course of Theoretical Physics*, vol. 2, §88 (1973).
- [49] M. A. Abramowicz, *ArXiv e-prints* (2016).

- [50] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, (Butterworth-Heinemann1976).
- [51] L. Rayleigh, Proceedings of the Royal Society of London Series A **93**, 148 (1917).
- [52] R. J. Tayler, MNRAS **191**, 135 (1980).
- [53] Постнов К. А. and Засов А. В., *Курс общей астрофизики* (2005), Москва, физический факультет МГУ.
- [54] J. E. Felten and M. J. Rees, A&A **17**, 226 (1972).
- [55] F. Meyer and E. Meyer-Hofmeister, A&A **106**, 34 (1982).
- [56] G. Shaviv and R. Wehrse, A&A **159**, L5 (1986).
- [57] Сулейманов В. Ф., Письма в АЖ **18**, 255 (1991).
- [58] J. K. Cannizzo, ApJ **385**, 94 (1992).
- [59] N. A. Ketsaris and N. I. Shakura, Astronomical and Astrophysical Transactions **15**, 193 (1998).
- [60] J.-M. Hameury, K. Menou, G. Dubus, J.-P. Lasota, and J.-M. Hure, MNRAS **298**, 1048 (1998).
- [61] G. Dubus, J.-P. Lasota, J.-M. Hameury, and P. Charles, MNRAS **303**, 139 (1999).
- [62] G. S. Bisnovaty-Kogan and S. I. Blinnikov, Soviet Astronomy Letters **2**, 191 (1976).
- [63] N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, and S. S. Zilitinkevich, A&A **62**, 179 (1978).
- [64] B. Paczynski and G. Bisnovaty-Kogan, Acta Astronomica **31**, 283 (1981).
- [65] Y. Nakao and S. Kato, PASJ **47**, 451 (1995).
- [66] Соболев В. В., *Курс теоретической астрофизики* (1985), 3 edn., М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы.

- [67] D. Mihalas and B. W. Mihalas, *Foundations of radiation hydrodynamics* (1984).
- [68] Сулейманов В. Ф., Липунова Г. В., and Шакура Н. И., *Астрономический Журнал* **84**, 612 (2007).
- [69] R. L. Kurucz, *Atlas: A computer program for calculating model stellar atmospheres* (1970), sAO Special Report, Cambridge: Smithsonian Astrophysical Observatory.
- [70] R. Kurucz, *Kurucz CD-ROMs*, Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory (1993).
- [71] C. A. Iglesias and F. J. Rogers, *ApJ* **464**, 943 (1996).
- [72] J. W. Ferguson, D. R. Alexander, F. Allard, T. Barman, J. G. Bodnarik, P. H. Hauschildt, A. Heffner-Wong, and A. Tamanai, *ApJ* **623**, 585 (2005).
- [73] Зельдович Я. Б. and Шакура Н. И., *Астрон. Журнал* **46**, 225 (1969).
- [74] Михалас, Д., *Звездные атмосферы*, (М.: Мир 1982).
- [75] R. Z. Lüst, *Zeitschrift Naturforschung Teil A* **7**, 87 (1952).
- [76] C. F. V. Weizsäcker, *Zeitschrift Naturforschung Teil A* **3**, 524 (1948).
- [77] J. E. Pringle, *MNRAS* **248**, 754 (1991).
- [78] T. Tanaka, *MNRAS* **410**, 1007 (2011).
- [79] A. R. King and H. Ritter, *MNRAS* **293**, L42 (1998).
- [80] A. A. Zdziarski, R. Kawabata, and S. Mineshige, *MNRAS* **399**, 1633 (2009).
- [81] K. S. Wood, L. Titarchuk, P. S. Ray, M. T. Wolff, M. N. Lovellette, and R. M. Bandyopadhyay, *ApJ* **563**, 246 (2001).
- [82] G. V. Lipunova, *ApJ* **804**, 87 (2015).
- [83] Ватсон Дж. Н., *Теория Бесселевых функций* (1949), 2 edn., Москва, Издательство иностранной литературы.

- [84] Снеддон И., *Преобразования Фурье* (1955), Москва, Изд-во иностранной литературы.
- [85] T. M. MacRobert, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **51**, 116 (1932).
- [86] J. Papaloizou and J. E. Pringle, MNRAS **181**, 441 (1977).
- [87] B. Paczynski, ApJ **216**, 822 (1977).
- [88] S. Ichikawa and Y. Osaki, PASJ **46**, 621 (1994).
- [89] J.-M. Hameury and J.-P. Lasota, A&A **443**, 283 (2005).
- [90] W. Chen, C. R. Shrader, and M. Livio, ApJ **491**, 312 (1997).
- [91] Баренблатт Г. И., *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (1982), Л.: Гидрометеиздат.
- [92] Баренблатт Г. И., *Автомодельные явления - анализ размерностей и скейлинг*, Физтеховский учебник (2009), Долгопрудный: Издательский Дом Интеллект, 2009.
- [93] Зельдович, Я. Б. and Райзер, Ю. П., *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (1966), Наука, Москва.
- [94] J. E. Pringle, Ph.D. thesis, , Univ. Cambridge, (1974) (1974).
- [95] Любарский Ю. Э. and Шакура Н. И., Письма в АЖ **13**, 917 (1987).
- [96] L. G. Filipov, Advances in Space Research **3**, 305 (1984).
- [97] J. K. Cannizzo, H. M. Lee, and J. Goodman, ApJ **351**, 38 (1990).
- [98] D. N. C. Lin and J. E. Pringle, MNRAS **225**, 607 (1987).
- [99] D. N. C. Lin and P. Bodenheimer, ApJ **262**, 768 (1982).
- [100] G. I. Ogilvie, MNRAS **306**, L9 (1999).
- [101] P. B. Ivanov, J. C. B. Papaloizou, and A. G. Polnarev, MNRAS **307**, 79 (1999).
- [102] R. R. Rafikov, ApJ **774**, 144 (2013).

- [103] R. R. Rafikov, *ApJ* **830**, 7 (2016).
- [104] G. V. Lipunova and N. I. Shakura, *A&A* **356**, 363 (2000).
- [105] Любарский Ю. Э. and Шакура Н. И., *Письма в АЖ* **13**, 917 (1987).
- [106] Зельдович Я. Б. and Компанеец А. С., *Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе* (1950), АН СССР, Москва.
- [107] Липунова Г. В. and Шакура Н. И., *Астрономический Журнал* **79**, 407 (2002).
- [108] V. F. Suleimanov, G. V. Lipunova, and N. I. Shakura, *A&A* **491**, 267 (2008).
- [109] J.-P. Lasota, *New Astronomy Review* **45**, 449 (2001).
- [110] Зайцев В. Ф. and Полянин А. Д., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (2001), Москва, ФИЗМАТЛИТ.
- [111] R. Speith, H. Riffert, and H. Ruder, *Computer Physics Communications* **88**, 109 (1995).
- [112] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*, (Cambridge University Press 2002), 2nd edn.
- [113] Тихонов А. Н. and Самарский А. А., *Уравнения математической физики*, (Москва, Наука 1966).
- [114] D. G. Anderson, *J. ACM* **12**, 547 (1965).
- [115] Калиткин Н. И., *Численные методы* (1978), Москва, Изд-во Наука.
- [116] G. V. Lipunova and K. L. Malanchev, *MNRAS* **468**, 4735 (2017).
- [117] Мещеряков А. В., Шакура Н. И., and Сулейманов В. Ф., *Письма в Астрономический Журнал* **37**, 343 (2011).
- [118] Мещеряков А. В., Ревнивцев М. Г., and Филишова Е. В. **37**, 892 (2011).

- [119] A. G. Cantrell, C. D. Bailyn, J. A. Orosz, J. E. McClintock, R. A. Remillard, C. S. Froning, J. Neilsen, D. M. Gelino, and L. Gou, *ApJ* **710**, 1127 (2010).
- [120] L. Gou, J. E. McClintock, J. F. Steiner, R. Narayan, A. G. Cantrell, C. D. Bailyn, and J. A. Orosz, *ApJ* **718**, L122 (2010).
- [121] H. W. Duerbeck and K. Walter, *NASA Special Publication* **389**, 343 (1976).
- [122] C. Lloyd, R. Noble, and M. V. Penston, *MNRAS* **179**, 675 (1977).
- [123] L. J. Kaluzienski, S. S. Holt, E. A. Boldt, and P. J. Serlemitsos, *ApJ* **212**, 203 (1977).
- [124] J. Smak, *Acta Astronomica* **34**, 161 (1984).

1.8 Дополнение. О выводе уравнений дисковой аккреции

Уравнения аккреционного диска основаны на общеизвестных уравнениях гидродинамики: уравнении неразрывности и уравнении Эйлера. Уравнения Эйлера описывают движение среды в координатах пространства и времени. Динамика вещества описывается набором физических параметров, основные из которых \mathbf{v} — вектор скорости, ρ — плотность. Они выражаются через функции координат (вектор \mathbf{x}) и времени t . Из уравнений неразрывности и движения выводится уравнение сохранения импульса. Вывод уравнений подробно рассмотрен в книгах [8, 12, 13], также см. работы [9, 10]. Приведем основные уравнения, важные для описания динамики аккреционных дисков.

Уравнение неразрывности в эйлеровых координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.226)$$

Высокоэнергичные процессы, при которых происходит аннигиляция вещества, оставляем за рамками нашего рассмотрения.

Уравнение Эйлера, выражающее собой второй закон Ньютона для непрерывной среды и описывающее динамику идеальной среды, — когда отсутствует трение, — записывается как:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{f} - \nabla P), \quad (1.227)$$

где P — давление, \mathbf{f} — внешняя сила, действующая на единичный объем вещества. В случае аккреционных дисков это может быть, например, гравитационная сила, сила давления излучения при больших фотонных потоках. Напомним, что пока мы рассматриваем идеальную жидкость. Здесь ∇ — оператор набла, ∇ — градиент.

Уравнения (1.226) и (1.227) могут быть также записаны в тензорных величинах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (1.228)$$

и

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \left(f_i - \frac{\partial(P \delta_{ik})}{\partial x_k} \right), \quad (1.229)$$

где производится суммирование по членам с одинаковыми индексами.

Из (1.228) и (1.229) получается уравнение для потока импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + f_i, \quad (1.230)$$

где введен тензор плотности потока импульса

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k, \quad (1.231)$$

по смыслу отвечающий за обратимый (механический) перенос импульса.

Величина $-P \delta_{ik}$ есть тензор напряжений для идеальной жидкости. Для *неидеальной* жидкости, то есть для вязкой среды, полный тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ik} = -P \delta_{ik} + w_{ik}, \quad (1.232)$$

где дополнительно был введен вязкий тензор напряжений w_{ik} . В результате тензор плотности потока импульса приобретает вид

$$\Pi_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (1.233)$$

Он состоит из двух частей: изменения момента импульса в результате работы сил и переноса момента импульса вместе с веществом за счет общего движения.

Выражение (1.231) записано в самом общем виде, так как в нем не сделано никаких дальнейших предположений о свойствах вязкого тензора напряжений. На практике делается ряд упрощающих предположений, которые позволяют переписать это уравнение в более явном виде, при этом вводятся так называемые коэффициенты вязкости. Свойства тензора напряжений w_{ik} подробно рассмотрены в [13, глава 2]. Основными его характеристиками являются симметричность и пропорциональность изменениям скоростей внутри среды. Для аккреционного диска вместо w_{ik} мы используем тензор турбулентной вязкости $w_{ik}^t = -w_{ik}$, положительный по величине (см. § 1.3).

Для изотропных коэффициентов вязкости и при условии, что они постоянны в среде, работает известное уравнение Навье-Стокса (уравнение Эйлера для вязкой среды), которое в операторном виде записывается так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{f} - \nabla P) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{\zeta + \eta/3}{\rho} \nabla \nabla \mathbf{v}. \quad (1.234)$$

Здесь Δ — векторный оператор Лапласа. Сила \mathbf{f} может быть записана как градиент некоторого потенциала Φ . Коэффициент η — динамический коэффициент сдвиговой вязкости, обусловленной относительным движением слоев в веществе, ζ — коэффициент объемной вязкости¹². Объемная вязкость описывает необратимые процессы в газе при симметричных изменениях объема (в таких процессах сдвиговая вязкость не работает). Другими словами, ζ характеризует изменение давления от темпа изменения плотности. Для одноатомного идеального газа в состоянии локального термодинамического равновесия (ЛТР) коэффициент объемной вязкости равен нулю, так как у такого газа отсутствуют внутренние степени свободы. Если же в веществе проходят микроатомные процессы (колебания молекул, вращение, ионизация) с характерным временем, сравнимым или больше, чем характерное время гидродинамического потока, то объемная вязкость может быть сравнима по величине со сдвиговой вязкостью.

Когда равновесие в газе в результате внутренних релаксационных процессов устанавливается намного быстрее, чем характерные скорости потока, то объемной вязкостью можно пренебречь (условие $\zeta = 0$ называется “гипотезой Стокса”). В случае несжимаемой жидкости последний член в уравнении Навье-Стокса вообще обращается в ноль. Учет объемной вязкости важен при рассмотрении ударных волн, распространении звука, спиральных волн плотностей в аккреционных дисках.

Уравнение (1.234) можно переписать в компактном виде,

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \equiv \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho \nabla \Phi - \nabla P + \rho \mathbf{N}, \quad (1.235)$$

учитывая определение удельной вязкой силы \mathbf{N} , введенное в разделе 1.2:

$$\rho N_i = \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.236)$$

В виде (1.235) уравнение Навье-Стокса подходит и для ситуации, когда коэффициент вязкости $\eta \neq const$.

¹²В книге Ландау и Лившица [13] ζ названа “второй вязкостью”. В англоязычной литературе второй вязкостью преимущественно называется величина λ , которая связана с объемной вязкостью по формуле $\zeta = \lambda + 2\eta/3$. Сама объемная вязкость — bulk viscosity или volume viscosity. Сдвиговая вязкость — shear viscosity.

1.8.1 Уравнения в цилиндрических координатах

Выпишем уравнение неразрывности и три компоненты уравнения Навье-Стокса в цилиндрических координатах. Предполагаем, что в аккреционных дисках сохраняется аксиальная симметрия. Если рассматривать геометрически тонкие диски, удобно работать в цилиндрических координатах (r, φ, z) . Указанные предположения приводят к обнулению производных по φ . Для толстых дисков или для одновременного исследования структуры вещества, истекающего с поверхности диска, используют сферическую систему координат. В данной главе мы ограничимся классической моделью аккреционного диска и поэтому работать будем в цилиндрической системе координат. Заметим, что второй член слева (1.234) — это вектор, являющийся ковариантной производной поля скоростей \mathbf{v} по отношению к тому же полю \mathbf{v} . *Градиент по направлению вектора \mathbf{v} (или оператор адвекции) $\mathbf{v} \cdot \nabla$* в декартовых координатах имеет вид $v_x \partial/\partial x + v_y \partial/\partial y + v_z \partial/\partial z$, а в криволинейных координатах имеет более сложный вид. В правой части уравнения в третьем члене присутствует векторный лапласиан, а в четвертом члене — вектор $\text{grad div } \mathbf{v}$.

Уравнение неразрывности

Запишем уравнение неразрывности (1.226) в цилиндрических координатах при аксиальной симметрии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.237)$$

r -компонента уравнения Навье-Стокса Второй член слева в (1.234) в цилиндрических координатах имеет вид:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}.$$

Таким образом, r -компонента уравнения Навье-Стокса при аксиальной симметрии, в цилиндрических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \frac{\zeta + \eta/3}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right). \end{aligned}$$

Для тонкого диска скорости не зависят от z и, следовательно,

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\eta + \zeta + \eta/3}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right). \quad (1.238)$$

В тонком диске основными по величине членами этого уравнения являются v_φ^2/r и градиент потенциала. Для Ньютоновского гравитационного потенциала, таким образом, мы получаем закон Кеплера для кругового движения свободных частиц вокруг центрального тела. При этом силы давления и трения в диске являются малыми следующего порядка. В Кеплеровском диске угловая скорость $\omega = v_\varphi/r$ зависит только от массы центрального тела. Если масса центрального тела много больше массы диска (диск не самогравитирующий), то ω не меняется во времени.

φ -компонента уравнения Навье–Стокса

Далее рассмотрим тангенциальную компоненту уравнения Навье–Стокса. Второй член в левой части (1.234) в цилиндрических координатах имеет вид:

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}.$$

Третий член справа — векторный лапласиан, — в цилиндрических координатах равен

$$\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right).$$

Четвертый член справа, φ -компонента вектора $\text{grad div } \mathbf{v}$, — равен нулю вследствие аксиальной симметрии. Также равен нулю градиент давления P по φ и $f_\varphi = 0$. Получаем:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right)$$

Для тонкого аккреционного диска, избавляясь от производных во вертикальной координате, получаем:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right).$$

Третий член слева по смыслу является силой Кориолиса. Домножим обе части на ρ , и угловую компоненту скорости заменим на ωr . Постоянный

коэффициент η внесем под знак производной. Преобразуя выражение в скобках в правой части последней формулы, равное $3\partial\omega/\partial r + r\partial^2\omega/\partial r^2$, получаем:

$$\rho r \frac{\partial\omega}{\partial t} + \rho v_r \left(\frac{\partial(\omega r)}{\partial r} + \omega \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r} \right)$$

Окончательно получаем, умножив обе стороны на r^2 :

$$\rho r^3 \frac{\partial\omega}{\partial t} + \rho v_r r \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} = - \frac{\partial(r^2 w_{r\varphi}^t)}{\partial r}. \quad (1.239)$$

При этом нами была произведена замена с использованием новой величины:

$$w_{r\varphi}^t = -w_{r\varphi} = -\eta r \frac{\partial\omega}{\partial r}. \quad (1.240)$$

Компонента аксиально-симметричного тензора вязких напряжений в аккреционном диске $w_{r\varphi}$ выписана через компоненты скорости в [13] (глава 2). Коэффициент динамической вязкости η в аккреционном диске определяет величину тензора вязких напряжений, обусловленного турбулентными течениями. Подробнее о модели вязкости в аккреционных дисках будет говориться в § 1.3.

z -компонента уравнения Навье-Стокса

Выпишем z -компоненту уравнения Навье Стокса. В адвективном члене слева (1.234) остается только два члена. В правой части уравнения для описания внешней силы вводим потенциал Φ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\zeta + \eta/3}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Для гравитации в плоской метрике $\Phi_N(r, z) = -GM/\sqrt{r^2 + z^2}$, где M — масса центрального объекта, на который аккрецируется вещество. Теперь предполагаем, что по высоте диск находится в *гидростатическом равновесии*, то есть $v_z = 0$. В тонком диске считаем незначительными изменения скоростей по z . Тогда получаем для $z \ll r$:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{GM}{r^3} z. \quad (1.241)$$

1.8.2 Уравнение сохранения энергии

Нагрев из-за вязкости

Прежде чем обратиться к вопросу о полной энергии вещества в диске, рассмотрим нагрев, который происходит благодаря вязкости. Он может быть получен из анализа изменения кинетической энергии газа с учетом уравнения движения и уравнения неразрывности, а первое начало термодинамики для вывода не привлекаем:

$$\varepsilon = w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (1.242)$$

В этом выражении производится суммирование по всем парным индексам. Ниже опишем обоснование приведенного выражения, которое можно пропустить при основном прочтении.

Итак, нагрев определяется диссипацией кинетической энергии в единичном объеме [13, §16]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \rho \frac{\partial(v^2/2)}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Умножим скалярно уравнение движения на \mathbf{v}

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{N} \right). \quad (1.243)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{v} \nabla (v^2/2) = \mathbf{v} \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{N} \right). \quad (1.244)$$

Следовательно, из

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \rho \mathbf{v} \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{N} \right) - \rho \mathbf{v} \nabla (v^2/2) + \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

с учетом

$$\nabla P = \nabla \frac{P\rho}{\rho} = \rho \nabla \frac{P}{\rho} + \frac{P}{\rho} \nabla \rho$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\rho \mathbf{v} \nabla \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \frac{P}{\rho} \nabla \rho + \rho \mathbf{v} \mathbf{N} + \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.245)$$

Воспользуясь уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \rho \mathbf{v}$$

распишем последнее слагаемое (1.245):

$$\frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{v^2}{2} \nabla \rho \mathbf{v} = -\frac{v^2}{2} \rho \nabla \mathbf{v} - \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \nabla \rho$$

и сгруппируем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\rho \mathbf{v} \nabla \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \rho \mathbf{v} \mathbf{N} - \frac{v^2}{2} \rho \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \nabla \rho \quad (1.246)$$

Преобразуем первую скобку справа

$$\rho \mathbf{v} \nabla \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \nabla \left(\rho \mathbf{v} \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \right) - \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \nabla \rho$$

Далее, используем (1.236)

$$\begin{aligned} \rho N_i &= \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{N} &= \rho v_i N_i = v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial w_{ik} v_i}{\partial x_k} - w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

из (1.248) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\nabla \left(\rho \mathbf{v} \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - w_{ik} v_i \right) + \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \nabla \rho - w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{v^2}{2} \rho \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \nabla \rho \quad (1.247)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\nabla \left(\rho \mathbf{v} \left(\Phi + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - w_{ik} v_i \right) + \Phi \nabla \rho - w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + P \nabla \mathbf{v} \quad (1.248)$$

Первое слагаемое справа — поток механической энергии через стенки рассматриваемого объема, второе — работа против сил гравитации (равна нулю для несжимаемой жидкости), четвертое — работа против сил давления (тоже равно нулю для несжимаемой жидкости). Очевидно, что нагрев выражается третьим слагаемым — это и есть уменьшение кинетической энергии, обусловленное диссипацией. При интегрировании последнего выражения по большому объему, интеграл по поверхности исчезнет.

Полная энергия

Рассмотрим теперь, как меняется полная энергия в единице объема

$$E = \rho \left(e + v^2/2 + \Phi \right),$$

которая есть сумма тепловой, кинетической и потенциальной энергии. Необходимо рассмотреть три уравнения: уравнение неразрывности, уравнение движения и закон-сохранения энергии, например, в виде первого начала термодинамики:

$$T ds = de + P d(1/\rho),$$

где s — удельная энтропия, $1/\rho$ — удельный объем.

В принципе, подставив в первое начало термодинамики $d\rho/dt$ из уравнения неразрывности и $\mathbf{v}\nabla P$ из уравнения движения (скалярно умноженного на \mathbf{v} — см. уравнение (1.250)), можно получить уравнения сохранения полной энергии (1.249). Тем не менее, поскольку немного более удобным оказывается способ преобразований в обратную сторону, из (1.249) в (1.251) или (1.254), мы сначала вкратце, а потом и подробно изложим его ниже в этом разделе.

Итак, уравнение сохранения энергии в общем случае записывается следующим образом [5, 13]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \left[(E + P) \mathbf{v} - (v_i w_{ik}) + \mathbf{F}_{\text{th}} \right] = \rho \epsilon_{\text{mass}} \quad (1.249)$$

Под знаком дивергенции стоит плотность потока энергии в среде, и учтен поток энергии, связанный с работой сил давления ($P\mathbf{v}$) и сил вязкости на поверхности рассматриваемого единичного объема ($-v_i w_{ik}$).¹³ Перенос импульса вязкими силами приводит к переносу энергии, поскольку совершается работа. Например, в случае цилиндрической симметрии, r -компонента этого потока энергии равна ($-v_\varphi w_{r\varphi}$). Вектор \mathbf{F}_{th} под знаком дивергенции в левой части (1.249) описывает другие возможные потоки тепловой энергии (радиационные, кондуктивные, конвективные). Справа учтена скорость других источников/стоков энергии в единице объема (ядерные реакции, джоулева диссипация, объемное охлаждение оптически-тонкой среды), а ϵ_{mass} — удельный темп такого нагрева/охлаждения.

Вкратце способ демонстрации равноценности этой записи первому началу термодинамики состоит в следующем. Рассмотрим изменение кинетической энергии в потоке, подставляя для полной производной скорости уравнение Навье-Стокса в виде (1.235),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \left(-\nabla\Phi - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{N} \right). \quad (1.250)$$

¹³Во всех слагаемых, где встречается тензор вязких напряжений, мы проставляем индексы и подразумеваем, что производится суммирование по парным индексам. Согласно (1.232) и (1.233), тензор ($-w_{ik}$) представляет собой поток импульса, связанный с вязкими силами, а поток энергии получается перемножением потока импульса на скорость. Его k -компонента равна $-v_i w_{ik}$.

Вычитая последнее выражение из уравнения для изменения полной энергии (1.249), получаем уравнение баланса:

$$\rho \frac{de}{dt} - \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \varepsilon + \rho \epsilon_{\text{mass}} - \text{div} \mathbf{F}_{\text{th}}, \quad (1.251)$$

при постоянном во времени потенциале внешних сил Φ , где

$$\varepsilon = w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (1.252)$$

— энергия, диссипирующая в единице объема в единицу времени из-за вязкости (суммирование по индексам). При выкладках используется уравнение неразрывности в виде $d\rho/dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ и соотношение

$$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (1.253)$$

Привлекая первый закон термодинамики, $T ds = de + P d(1/\rho)$, можно записать уравнение для баланса тепловой энергии так:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \varepsilon + \rho \epsilon_{\text{mass}} - \text{div} \mathbf{F}_{\text{th}}, \quad (1.254)$$

где s — энтропия.

Подробный вывод уравнения (1.251) Раскроем квадратные скобки в (1.249):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{(\nabla \cdot E \mathbf{v})} + (\nabla \cdot P \mathbf{v}) - \frac{\partial(v_i w_{ik})}{\partial x_k} + (\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{th}}) = \rho \epsilon_{\text{mass}}. \quad (1.255)$$

Распишем 2-ую и 4-ую дивергенции произведений:

$$\underline{\frac{\partial E}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla E)} + E (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot P \mathbf{v}) - v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} - \underline{w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + (\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{th}}) = \rho \epsilon_{\text{mass}}. \quad (1.256)$$

Первые два члена дают полный дифференциал по времени от E . Переносим направо последние два члена, учитывая (1.242):

$$\underline{\frac{dE}{dt}} + E (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot P \mathbf{v}) - v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} = \varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{th}}) + \rho \epsilon_{\text{mass}}. \quad (1.257)$$

Видим, что правая часть уравнения такая же, как в (1.251). Далее преобразуем только левую часть (1.257). Расписываем первую E как сумму различных типов энергий:

$$\frac{d}{dt} (\rho e + \underline{\rho v^2/2} + \rho \Phi) + E (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot P \mathbf{v}) - v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.258)$$

В первом члене выносим из скобок второе слагаемое:

$$\frac{d}{dt}(\rho e + \rho \Phi) + \rho \frac{d(v^2/2)}{dt} + \frac{v^2}{2} \frac{d\rho}{dt} + E(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot P\mathbf{v}) - v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.259)$$

Совершаем замену второго члена в (1.259), используя следствие уравнения Навье-Стокса (1.250):

$$\frac{d}{dt}(\rho e + \rho \Phi) - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi) - \underline{(\mathbf{v} \cdot \nabla P)} + \underline{\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})} + \frac{v^2}{2} \frac{d\rho}{dt} + E(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \underline{(\nabla \cdot P\mathbf{v})} - v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.260)$$

Учитывая определение удельной вязкой силы (1.236), видим, что 4-ое и последнее слагаемые взаимно уничтожаются. Далее, $(\nabla \cdot P\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla P) + P(\nabla \cdot \mathbf{v})$ и, следовательно, получаем для левой части:

$$\frac{d}{dt}(\rho e + \rho \Phi) - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi) + P(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{v^2}{2} \frac{d\rho}{dt} + E(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.261)$$

Разделяем далее первую скобку, расписывая производные от произведений, и группируем после слагаемые с ρ и с полной производной от ρ :

$$\rho \frac{de}{dt} + \left(e + \frac{v^2}{2} + \Phi \right) \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{d\Phi}{dt} - (\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi) \right) + P(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \underline{E(\nabla \cdot \mathbf{v})} \quad (1.262)$$

Сумма в первых круглых скобках равна E/ρ , во вторых $-\partial\Phi/\partial t \equiv 0$ в постоянном центральном гравитационном потенциале. Выносим за скобки общий множитель E/ρ второго и последнего члена левой части (1.262) и получаем:

$$\rho \frac{de}{dt} + \frac{E}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) + P(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.263)$$

Используем уравнение неразрывности в виде $d\rho/dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ для обнуления суммы в круглых скобках и другой записи последнего члена. В итоге получаем для левой части равенства (1.257)

$$\rho \frac{de}{dt} + \frac{P}{\rho} \left(-\frac{d\rho}{dt} \right) \quad (1.264)$$

и тем самым приходим к (1.251).

Стандартный диск и диск с адвекцией тепла При отсутствии других источников нагрева, кроме вязкого, объемный темп нагрева в диске (эрг/с/см³) равен

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \varepsilon - \operatorname{div} \mathbf{F}_{\text{th}} = \eta r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 - \operatorname{div} \mathbf{F}_{\text{th}}. \quad (1.265)$$

(см. (1.254), а также (1.25)).

Для стационарного ($\partial/\partial t = 0$) диска из первого начала термодинамики следует уравнение энергетического баланса, учитывающее радиальный перенос тепла с потоком вещества и вертикальный перенос энергии излучением, — оно описывает так называемые адвективные диски:

$$\rho T v_r \frac{ds}{dr} = \varepsilon - \frac{dF_z}{dz} = \eta r^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 - \frac{dF_z}{dz}. \quad (1.266)$$

Здесь предполагается, что радиационные и тепловые потоки по радиусу малы.

В приближении геометрически тонкого диска радиальная скорость v_r очень мала и левая часть последнего уравнения практически исчезает. В результате имеем локальный баланс энергии, обычно полагаемый в стандартном диске.

Источник энергии в диске Разберемся, каков же источник энергии ε , которая диссипирует в диске из-за трения и которая, в принципе, может быть излучена. При выводе (1.251) мы использовали тождество

$$\varepsilon = w_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial(v_i w_{ik})}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.267)$$

подразумевая (1.236) и суммирование по индексам. Используя уравнение движения (1.250) и (1.253), можно показать, что последнее слагаемое равно

$$v_i \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} \equiv \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla P.$$

Пусть масса центрального тела и задаваемый ею гравитационный потенциал не меняются во времени, а диск — кеплеровский, осесимметричный, $v_z = 0$. Переходя к цилиндрическим координатам, запишем (1.267):

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\varphi w_{r\varphi})}{\partial r} - \rho v_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) - v_r \frac{\partial P}{\partial r}.$$

Последнее слагаемое в тонком кеплеровском диске является малым по сравнению с другими, опускаем его. Домножаем все уравнение на $2\pi r$ и интегрируем по толщине диска.

$$2\pi r 2Q_{\text{vis}} = \dot{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r^2 W_{r\varphi} \omega_K)$$

учитывая обозначение (1.47) и то, что $w_{r\varphi}^t = -w_{r\varphi}$. Слева мы получаем суммарное излучение кольца единичной толщины (эрг/см/с), а Q_{vis} — поток излучения в расчете на одну сторону диска.

Итак, энергия, выделяемая по мере приближения вещества к центру, тратится на диссипацию (то есть переходит в тепло, которое, в случае стандартного диска, излучается локально с двух сторон диска) и перераспределяется по диску из-за работы вязких сил, переносящих момент импульса:

$$\dot{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) = 2 \pi r 2 Q_{\text{vis}} + \frac{\partial}{\partial r} (\omega_{\text{K}} F), \quad (1.268)$$

где $F = 2 \pi r^2 W_{r\varphi}$ полный момент вязких сил между соседними кольцами [7, 11].

Еще один важный вывод можно сделать из рассмотрения последнего уравнения. В диске выделяется тепло и он может излучать, даже если темп аккреции равен нулю. Если на внутренней границе невозможен сток вещества, радиальное движение вещества в диске к его центру может остановиться. При этом вязкие силы не перестают работать, вещество греется, тепло переходит в излучение. Энергия в такой диск поступает, если есть вток в диск момента импульса, например, от вращающейся звезды через магнитосферу.

Распределение момента вязких сил F в стандартном диске Запишем темп объемного нагрева в цилиндрических координатах в кеплеровском диске (см. [5], Приложение В), используя (1.267) и помня, что $w_{r\varphi}^t = -w_{r\varphi}$,

$$\varepsilon = -w_{r\varphi}^t r \frac{\partial \omega_{\text{K}}}{\partial r}.$$

С учетом этого выражения перепишем уравнение энергетического баланса (1.268):

$$\dot{M} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{GM}{2r} \right) = -F \frac{\partial \omega_{\text{K}}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\omega_{\text{K}} F),$$

где $v^2 = GM/r^2$ и $F = 2 \pi r^2 W_{r\varphi}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\dot{M} G M}{2 r^2} = \omega_{\text{K}} \frac{\partial F}{\partial r}.$$

Интегрируем последнее уравнение, чтобы найти радиальное распределение момента вязких в сил диске

$$F = F_{\text{in}} + \dot{M} \left(\sqrt{G M r} - \sqrt{G M r_{\text{in}}} \right).$$

Это выражение согласуется с полученным в разделе 1.4.2, как и ожидалось.

1.9 Самооблучение диска

Рассмотрим подробнее вопрос о самооблучении диска, затронутый ранее в разделе 1.7.2.

Поток, поглощенный единичной площадкой поверхности диска, может быть записан как:

$$Q_{\text{irr}} = Q(\hat{z} = 0) = C_{\text{irr}} \frac{L_x}{4\pi r^2}, \quad (1.269)$$

где параметр C_{irr} определяет степень облучения, а L_x — центральный болометрический поток. Из наблюдений рентгеновских двойных систем можно, в принципе, оценить этот параметр, сравнивая поток в рентгене и оптике. При этом обычно предполагают, что оптический поток от внешних частей диска, связанный с переизлучением центрального рентгеновского потока, превосходит поток излучения, связанный с локальным выделением тепла из-за вязкости. Это предположение верно для маленьких темпов аккреции и тем больше, чем дальше от центра диска.

Параметр C_{irr} также может быть получен из рассмотрения физической задачи облучения. Очевидно, что он равен произведению:

$$C_{\text{irr}} = \Psi(\theta) (1 - A) \cos(\chi), \quad (1.270)$$

где $\Psi(\theta)$ — диаграмма направленности центрального излучения, A — альbedo, χ — угол, под которым освещается элементарная площадка на поверхности диска.

Диаграмма направленности $\Psi(\theta)$ описывает зависимость центрального потока от угла θ между нормалью к плоскости диска и интересующим нас направлением:

$$F = \frac{L_{\text{bol}}}{4\pi d^2} \Psi(\theta). \quad (1.271)$$

Мы принимаем, что работает следующее соотношение, если взять интеграл по полному телесному углу:

$$\frac{1}{4\pi} \int \Psi(\theta) d\omega = 1. \quad (1.272)$$

Для точечного изотропного источника $\Psi(\theta) \equiv 1$. Такая диаграмма направленности описывает в некотором приближении излучение центральной звезды.

Для излучения от плоского диска

$$\Psi(\theta) = 2 \cos \theta. \quad (1.273)$$

Действительно, рассмотрим, какой поток можно наблюдать от диска в некотором направлении относительно его оси. Поток излучения от объекта определяется как интенсивность, собранная в телесном угле, под которым мы наблюдаем объект. Видимая нам проекция площади кольца равна $2\pi r dr \cos \theta$, и значит, кольцо диска видно под телесным углом $2\pi r dr \cos \theta / d^2$. Поток, собранный в этом телесном угле от кольца, равен

$$2\pi r dr I_\nu(r) \cos \theta / d^2$$

(можно сообразить, что это тот же самый поток, который излучается кольцом в данном направлении внутри равного телесного угла). Наблюдаемый поток в направлении θ от всего диска рассчитывается как сумма от всех колец (ср. с. 1.83):

$$F_\nu = \frac{2\pi \cos \theta}{d^2} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} I_\nu(r) r dr. \quad (1.274)$$

Поток (эрг/см²/с) от элементарной плоской площадки в полусферу равен

$$Q_\nu = \int I \cos \theta d\Omega = \int_{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (I \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^1 (I \mu) d\mu = \pi I.$$

Запишем также болометрическую (с двух сторон диска и проинтегрированную по частоте) светимость многоцветного чернотельного диска

$$L_{\text{bol}} = 2 \int 2\pi r Q(r) dr.$$

Учитывая последние две формулы и сравнивая два выражения для потока, (1.271) и (1.274), получим выражение (1.273) из

$$F = \frac{\cos \theta}{2 \pi d^2} L_{\text{bol}} \equiv \frac{L_{\text{bol}}}{4 \pi d^2} \Psi(\theta).$$

Под множителем $(1 - A)$ мы понимаем часть излучения, которая не была отражена, а термализовалась в диске, подняв температуру его фотосферы.

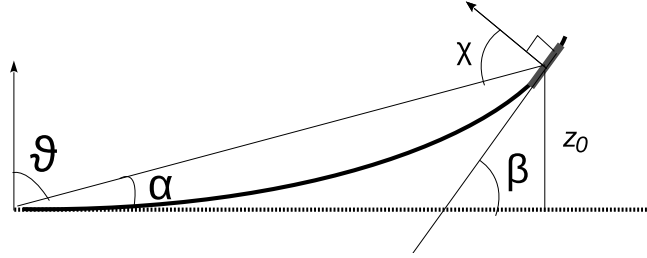


Рис. 1.27: Иллюстрация нахождения угла χ между лучом из центра диска и нормалью к единичной площадке на поверхности диска.

Из рис. 1.27 видно, что угол χ определяется из соотношения для внешнего угла треугольника:

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \chi,$$

откуда получаем $\cos \chi = \sin(\beta - \alpha)$. В приближении достаточно тонкого диска $\cos \chi \approx \beta - \alpha$, $\alpha \approx z_0/r$ и $\beta \approx dz_0/dr$.

Таким образом получаем:

$$C_{\text{irr}} = \Psi(\theta) (1 - A) \frac{z_0}{r} \left(\frac{d \ln z_0}{d \ln r} - 1 \right) \quad (1.275)$$

или для случая черной дыры и тонкого диска, когда $\Psi(\theta) = 2 \cos(\theta) \approx 2 z_0/r$,

$$C_{\text{irr}} = 2 (1 - A) \left(\frac{z_0}{r} \right)^2 \left(\frac{d \ln z_0}{d \ln r} - 1 \right). \quad (1.276)$$

Если центральный изотропно излучающий источник расположен на высоте Z_x над плоскостью симметрии диска, то параметр облучения C_{irr} увеличится в $[1 + (Z_x/z_0)(d \ln z_0/d \ln R - 1)^{-1}]$ раз (см., например,[4]).

1.10 Неконсервативный диск

Рассмотрим диск, с поверхностей которого происходит истечение вещества в результате некоторых физических процессов, природу которых не будем детально рассматривать. Будем называть такие диски неконсервативными. Наоборот, диски, которые рассматривались выше, являются консервативными.

Пусть имеется геометрическое кольцо в диске с радиусом r и шириной Δr . Выпишем для него уравнения сохранения массы и момента импульса. Масса, содержащаяся в этом кольце в некоторый момент времени, равна $2\pi r \Delta r \Sigma_0$. Поскольку имеется поток вещества, в общем случае масса, заключенная внутри кольца, может меняться за малое время $\Delta t \rightarrow 0$ согласно (см. [9]):

$$\frac{\Delta(2\pi r \Delta r \Sigma_0)}{\Delta t} = v_r(r, t) 2\pi r \Sigma_0(r, t) - v_r(r + \Delta r, t) 2\pi (r + \Delta r) \Sigma_0(r + \Delta r, t),$$

если нет потока массы через нижнюю и верхнюю поверхности кольца. В первом приближении, при $\Delta r \rightarrow 0$, правая часть

$$\approx -2\pi \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r)}{\partial r} \Delta r,$$

где $v_r(r)$ — радиальная корость потока вещества в диске на данном радиусе. Разделив на $2\pi \Delta r$, получаем для консервативного диска

$$r \frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r)}{\partial r} = 0. \quad (1.277)$$

Если диск неконсервативный, мы должны приравнять левую часть (1.277) количеству вещества, покидающего диск в единицу времени в расчете на $2\pi \Delta r$.

$$r \frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r)}{\partial r} = \dot{S}_M \quad (1.278)$$

Можно записать $\dot{S}_M = -\Sigma_0 v_w$, где v_w — эффективный темп ветра [см/с]. По смыслу величина \dot{S}_M совпадает с изменением темпа аккреции внутри диска в данном кольце с обратным знаком, но только в стационарном случае:

$$\dot{S}_M = -\frac{\partial \dot{M}}{2\pi \partial r}. \quad (1.279)$$

Теперь рассмотрим полный момент импульса, заключенный внутри этого же кольца. В какой-то момент времени он равен $2\pi r \Delta r \Sigma_0 v_\varphi r$. Момент импульса может меняться, так как вещество протекает через границы рассматриваемого геометрического элемента и на массу, заключенную внутри, действуют силы. Силу трения можно рассматривать как приложенную к поверхности кольца.

Аналогично можем записать при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(2\pi r \Delta r \Sigma_0 h)}{\Delta t} &= v_r(r, t) 2\pi r \Sigma_0(r, t) h(r, t) - \\ &- v_r(r + \Delta r, t) 2\pi (r + \Delta r) \Sigma_0(r + \Delta r, t) h(r + \Delta r, t), \end{aligned}$$

где $h(r, t)$ — удельный момент импульса. Устремляя $\Delta r \rightarrow 0$ и разделив на $2\pi \Delta r$, получаем

$$r \frac{\partial(\Sigma_0 h)}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r h)}{\partial r} = 0,$$

если нет момента сил и иного источника/стока момента импульса в кольце, кроме переноса с веществом через боковые поверхности кольца, перпендикулярные радиусу.

Допустим, что есть потеря момента импульса из кольца, связанная с уходом вещества через горизонтальные поверхности кольца (например, под действием вертикальных сил, у которых нет аксиальной составляющей: фотоиспарение протопланетных дисков [напр., 1, 2], ветер из-за давления излучения в сверхкритическом режиме [напр., 6]):

$$r \frac{\partial(\Sigma_0 h)}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r h)}{\partial r} = \dot{S}_J < 0,$$

где \dot{S}_J — уменьшение момента импульса вещества, заключенного в кольце, за единицу времени в расчете на $2\pi \Delta r$. Параметризуем истекающий момент импульса, используя безразмерный фактор k_w :

$$\dot{S}_J = k_w \dot{S}_M h.$$

в стационарном случае:

$$\dot{S}_J = -k_w \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} h.$$

Далее, при наличии вязкости в аккреционном диске, на кольцо действует тангенциальная сила, момент которой равен F :

$$r \frac{\partial(\Sigma_0 h)}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_0 v_r r h)}{\partial r} = \dot{S}_J - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (1.280)$$

Раскроем второй член слева в (1.280) и используем для замены (1.278). Если $h \neq f(t)$ (диск не самогравитирующий и радиальный градиент давления не меняется), получим:

$$\Sigma_0 v_r r \frac{\partial h}{\partial r} = \dot{S}_M (k_w - 1) h - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (1.281)$$

Положим в последнем уравнении $F = 0$: нет внутренних механизмов вязкости. Если локально на каждом радиусе происходит потеря вещества диском, торможение оставшегося в диске вещества возможно только лишь в случае, если эффективно $k_w > 1$ (напомним, что $\dot{S}_M < 0$). Таким образом, торможение чисто гидродинамическим ветром устроить вряд ли можно. Магнитогидродинамический ветер от диска, с другой стороны, может быть устроен так, что происходит торможение вещества за счет “зацепления” открытых силовых линий магнитного поля (“магнитный ветер”, см., например, [3]).

Итак, гидродинамическое истечение вещества не приводит к перераспределению момента импульса в диске. Влияние на характер вязкой эволюции диска “локальный” ветер может иметь опосредованно: при уменьшении плотности в диске меняются физические условия, что может приводить к изменению величины вязкости. В частности, протопланетный диск может полностью истощиться под воздействием внешнего рентгеновского излучения [2].

Подставим комбинацию $\Sigma_0 v_r r$ из (1.281) в (1.278) и получим уравнение вязкой эволюции для диска с локальным истечением:

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{S}_M h (k_w - 1)}{\partial h / \partial r} \right) + \frac{\dot{S}_M}{r}.$$

Далее предполагаем везде, что $k_w = 1$.

Для нестационарного неконсервативного диска с $k_w = 1$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial t} = \frac{(GM)^2}{4\pi h^3} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} + \frac{\dot{S}_M}{r}.$$

(сравните с уравнением для консервативного диска (1.128)). В стационарном случае оно элементарно интегрируется с учетом (1.279):

$$\frac{\dot{S}_M}{r} = -\frac{(GM)^2}{4\pi h^3} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial h} = \dot{M}(r) + const.$$

1.11 Уточненная связь между ν_t и α

Рассмотрим две альтернативные записи локального тензора вязких напряжений $w_{r\varphi}^t$ (см. раздел 1.3.5):

$$w_{r\varphi}^t = \frac{3}{2} \omega_K \nu_t \rho_c$$

и

$$w_{r\varphi}^t = \alpha P_c$$

в центральной плоскости кеплеровского диска. Пусть работает уравнение состояния для идеального газа

$$P_c = \frac{\rho_c \Re T_c}{\mu}.$$

Приравнивая выражения для $w_{r\varphi}^t$ с учетом первой строчки системы (1.101), описывающей вертикальную структуру диска, получим кинематический коэффициент вязкости в центральной плоскости:

$$\nu_t = \frac{2}{3} \alpha \frac{1}{\omega_K} \frac{\Re T_c}{\mu}$$

или

$$\nu_t = \frac{2}{3} \alpha \omega_K r^2 \left(\frac{z_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\Pi_1}.$$

В отличие от выражения (1.150), последняя формула учитывает особенности распределения физических параметров по вертикали в диске в зонах В и С. Значения Π_1 даны в Таблицах 1.1 и 1.2.

Рассмотрим третье уравнение системы (1.101), описывающее зависимость удельного нагрева от высоты. Учитывая, что вдали от центра

$$Q_o = \frac{3}{4} \omega W_{r\varphi}; \quad W_{r\varphi} = \frac{\dot{M} \omega_K}{2\pi},$$

получим

$$\dot{M} = 2\pi \alpha \frac{\Sigma_0}{\omega_K} \frac{\Re T_c}{\mu \Pi_3}.$$

Сравнивая с выше полученным выражением для ν_t в центральной плоскости, делаем вывод, что

$$\dot{M} = 3\pi \Sigma_0 \nu_t \frac{1}{\Pi_3}.$$

В этом соотношении производится учет зависимости кинематического коэффициента вязкости от координаты z , в отличие от выражений (1.124) и (1.129), приведенных в разделе, посвященном нестационарной дисковой аккреции, — в них предполагалось, что ν_t не зависит от z . Напомним, что в дисках, в которых выделение энергии на единицу массы не зависит от z , $\Pi_3 = 1$.

Из того же третьего уравнения, используя как определение радиальной скорости выражение из раздела 1.4.3

$$|v_r| = \frac{W_{r\varphi}}{\omega r \Sigma_0},$$

получим

$$|v_r| = \frac{\alpha}{\Pi_3} \frac{\Re T_c}{\mu \omega_K r}.$$

Литература

- [1] Alexander, R. D., Clarke, C. J., & Pringle, J. E. 2006, MNRAS , 369, 229
- [2] Armitage, P. J. 2011, ARA&A , 49, 195
- [3] Blandford, R. D. & Payne, D. G. 1982, MNRAS , 199, 883
- [4] Hynes, R. I. 2005, ApJ , 623, 1026
- [5] Kato, S., Fukue, J., & Mineshige, S. 2008, Black-Hole Accretion Disks — Towards a New Paradigm (Kyoto, Japan: Kyoto University Press)
- [6] Lipunova, G. V. 1999, Astronomy Letters, 25, 508
- [7] Lynden-Bell, D. & Pringle, J. E. 1974, MNRAS , 168, 603
- [8] Mihalas, D. & Mihalas, B. W. 1984, Foundations of radiation hydrodynamics, ed. Mihalas, D. & Mihalas, B. W.
- [9] Pringle, J. E. 1981, ARA&A , 19, 137
- [10] Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, A&A , 24, 337
- [11] Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1976, MNRAS , 175, 613
- [12] Зельдович, Я. Б. & Райзер, Ю. П. 1966, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Наука, Москва
- [13] Ландау Л. Д. & Лившиц Е. М. 1959, Курс теоретической физики, Vol. 6, Гидродинамика, ed. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M.