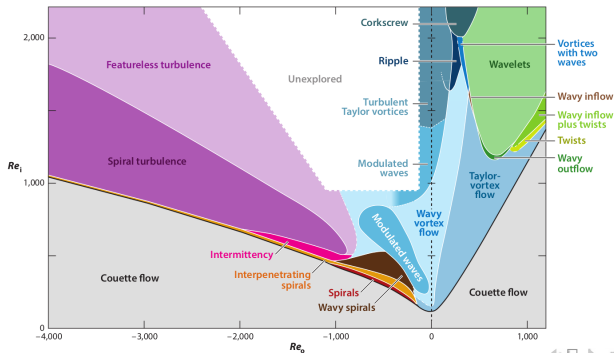


Динамика возмущений во вращательном течении: общие вопросы и спектральная задача

16 июля 2025 г.



Grossmann et al. (2016)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \rho = -\rho (\nabla \mathbf{U})$$

Стационарный вращательный поток
в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$:

напр. учебник Pringle & King
“Astrophysical flows”

$$\mathbf{U} = \{0, U_\varphi(r, z), 0\} \quad p = p(r, z) \quad \rho = \rho(r, z)$$

$$\begin{cases} \frac{U_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow h \sim \frac{c_s}{U_\varphi} r$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = r \frac{\partial \Omega^2}{\partial z}, \text{ где } U_\varphi \equiv \Omega r$$

Баротропные конфигурации $p = p(\rho)$: $dp = c_s^2 d\rho$

$$dW \equiv \frac{dp}{\rho} \Rightarrow \Omega = \Omega(r)$$

- Характерное время “вязкой” эволюции

$$t_\nu \sim \frac{r_d^2}{\nu}$$

$$\nu \sim \langle l_p \rangle \langle v_p \rangle = \frac{c_s}{n\sigma}$$

$$\frac{c_s}{U_\varphi} \sim \frac{h}{r}$$

$$n = \frac{\rho}{m_p} \sim \frac{\Sigma}{m_p h} \sim \frac{M_d}{m_p h r_d^2}$$

Протопланетные диски (на 1 а.е.):

$$\begin{aligned} h/r \sim 10^{-2}, U_\varphi \sim 30 \text{ км/с}, \Sigma \sim 10^3 \text{ г} &\implies c_s \sim 10^5 \text{ см/с}, n \sim 10^{16} \text{ см}^{-3} \\ \nu \sim 10^5 \text{ см}^2/\text{с} &\implies t_\nu \sim (10^{13})^2 / 10^5 \text{ с} = 10^{21} \text{ с} \end{aligned}$$

- Число Рейнольдса в астрофизических условиях

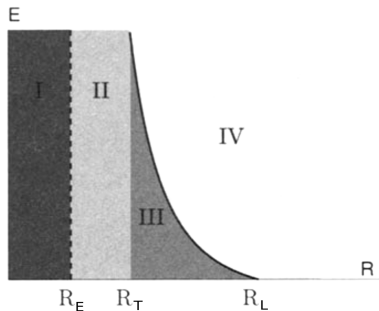
$$R \equiv \frac{L \Delta_L U_\varphi}{\nu} \bigg|_{L \sim h} \sim \frac{10^{11} \text{ см } 10^5 \text{ см/с}}{10^5 \text{ см}^2/\text{с}} \sim 10^{11}$$

Энергетическая теория устойчивости решений уравнений Навье-Стокса

по монографии Joseph (1980)

Существуют $R_E < R_T < R_L$, такие, что:

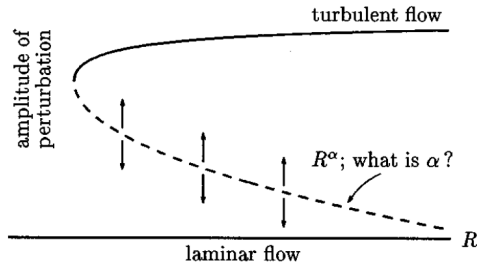
- При $R < R_E$: $dE/dt < 0 \quad \forall t > 0$
- При $R_E < R < R_T$: $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t)/E(0) \rightarrow 0$
- При $R_T < R < R_L$: $\exists \delta > 0$, такое, что если $E(0) < \delta$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t)/E(0) \rightarrow 0$
- При $R > R_L$: $\delta \rightarrow 0$



Монография Schmid & Henningson (2001)

Сдвиговое течение	R_E	R_T	R_L
Пуазейля в трубе	82	2000	∞
Пуазейля плоское	50	1000	5772
Куэтта плоское	21	360	∞
*Задача Беннара, $Ra =$	1700	1700	1700

Схема докритической бифуркации в турбулентность



Baggett & Trefethen (1997)

Накладываем эйлеровы возмущения:

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad W' = W + w(\mathbf{r}, t) \quad \rho' = \rho + \rho_1(\mathbf{r}, t), \quad \rho_1 = \frac{\rho}{c_s^2} w$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - 2\Omega u_\varphi + (\mathbf{u} \nabla) u_r - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial w}{\partial r} + N_r,$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) u_r + (\mathbf{u} \nabla) u_\varphi + \frac{u_r u_\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + N_\varphi,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + (\mathbf{u} \nabla) u_z = -\frac{\partial w}{\partial z} + N_z,$$

$$\frac{1}{c_s^2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \Omega \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{c_s^2} (\mathbf{u} \bar{\nabla}) W + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{c_s^2} w \mathbf{u} \right) = 0$$

$$\text{где } (\mathbf{u} \nabla) \equiv u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\mathbf{u} \bar{\nabla}) \equiv u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Вихревые возмущения отделяются динамически в пределе:

$$\lambda_r \ll h \quad (r d\Omega/dr \sim \Omega), \quad u \ll c_s \text{ и } \lambda_r / t_{\text{ev}} \ll c_s$$

Для вихревых возмущений:

$$\nabla_i u_i = 0$$

Тогда:

$$u_i \nabla_i w = \nabla_i (w u_i), \quad u_i \Omega \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(U_\varphi \frac{u^2}{2} \right)$$

$$u_j (u_i \nabla_i) u_j = \frac{1}{2} \nabla_i (u^2 u_i)$$

Для любых пространственно локализованных возмущений:

$$\frac{dE}{dt} = - \int r \frac{d\Omega}{dr} u_r u_\varphi dV - D_\nu,$$

$$\text{где } E \equiv \frac{1}{2} \int (u_r^2 + u_\varphi^2 + u_z^2) dV$$

($\dot{E}/E$) диктуется (линейной) динамикой малых возмущений

Henningson & Reddy (1994)

Переход к фурье-гармоникам:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} e^{-i(\omega t - m\varphi - k_z z)}, \quad \mathbf{w} = \hat{w} e^{-i(\omega t - m\varphi - k_z z)}$$

В случае идеальной жидкости система

$$\begin{aligned} -i(\omega - m\Omega)\hat{u}_r - 2\Omega\hat{u}_\varphi &= -\frac{d\hat{w}}{dr}, \\ -i(\omega - m\Omega)\hat{u}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\Omega r^2)\hat{u}_r &= -\frac{im}{r}\hat{w}, \\ -i(\omega - m\Omega)\hat{u}_z &= -ik_z\hat{w}, \\ \frac{1}{r}\frac{d(r\hat{u}_r)}{dr} + \frac{im}{r}\hat{u}_\varphi + ik_z\hat{u}_z &= 0 \end{aligned}$$

приводит к уравнению:

$$(\omega - m\Omega)\frac{d}{dr}\left(\frac{s}{r}\frac{d\hat{\psi}}{dr}\right) + \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{ms}{r^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\Omega r^2)\right) + \frac{2\Omega k_z^2}{\omega - m\Omega}\frac{s}{r}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\Omega r^2) + \frac{m\Omega - \omega}{r}\right]\hat{\psi} = 0,$$

$$\text{где } \hat{\psi} = \frac{r\hat{u}_r}{im} \quad \text{и} \quad s = \frac{r^2}{m^2 + r^2 k_z^2}$$

монография Drazin & Reid

Отсутствие общего критерия неустойчивости потока Howard & Gupta (1962)

Спектральная задача: локальный предел

$$(\omega - m\Omega) \frac{d}{dr} \left(\frac{s}{r} \frac{d\hat{\psi}}{dr} \right) + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{ms}{r^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) \right) + \frac{2\Omega k_z^2}{\omega - m\Omega} \frac{s}{r} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) + \frac{m\Omega - \omega}{r} \right] \hat{\psi} = 0,$$

$$\text{где } \hat{\psi} = \frac{r \hat{u}_r}{im} \quad \text{и} \quad s = \frac{r^2}{m^2 + r^2 k_z^2}.$$

$$\lambda_r, \lambda_\varphi \ll r \quad \implies \quad \frac{d}{dr} \rightarrow ik_r, \quad \frac{m}{r} \rightarrow k_\varphi$$

$$(\omega - k_\varphi U_\varphi)^2 = \frac{\kappa^2 k_z^2}{k_r^2 + k_\varphi^2 + k_z^2} \quad - \text{инерционные волны}$$

Ландау & Лифшиц т.6
Обзор Balbus (2003)

$$\kappa^2 \equiv \frac{2\Omega}{r} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) \quad \text{кв-т эпициклической частоты (иначе: дискриминант Рэлея)}$$

Устойчивость/неустойчивость при $\kappa^2 > 0$ ($\kappa^2 < 0$): критерий Рэлея

В длинноволновом пределе $\lambda_r^{-1}, k_z, m \rightarrow 0$ (инерционное движение):

$$\begin{aligned} -i\omega\hat{u}_r - 2\Omega\hat{u}_\varphi &= 0, \\ -i\omega\hat{u}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\Omega r^2)\hat{u}_r &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega^2 &= \kappa^2 \\ \text{эпициклические} \\ \text{осцилляции} \end{aligned}$$

Устойчивость/неустойчивость при $\kappa^2 > 0$ ($\kappa^2 < 0$): критерий Рэля

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\hat{\psi}}{dr} \right) - k_z^2 \hat{\psi} + \frac{k_z^2}{\omega^2} \kappa^2 \hat{\psi} = 0, \quad (*)$$

+ граничные условия по r

- Идентичность спектральной задаче на вихревые возмущения стратифицированной жидкости, покоящейся в поле силы тяжести (Rayleigh 1916): $\kappa^2 \iff -g_z(\partial_z \rho / \rho) \equiv N^2$
- Идентичность задаче Штурма-Лиувилля на отрезке для широкого класса граничных условий: $\kappa^2 > 0 \implies \omega_k^2 > 0$ (Synge 1933). Справедливость вывода с учетом вязкости (Synge 1938)
- Простая проверка: $\int (*) \times \hat{\psi}^* dr$ с условием $\hat{\psi} \rightarrow 0$ на границах

- В осесимметричном возмущенном течении:

$$\frac{dU'_\varphi}{dt} \equiv \frac{\partial U'_\varphi}{\partial t} + U'_r \frac{\partial U'_\varphi}{\partial r} + U'_z \frac{\partial U'_\varphi}{\partial z} + \frac{U'_\varphi U'_r}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(rU'_\varphi)}{dt} = 0$$

- $H \equiv rU'_\varphi$

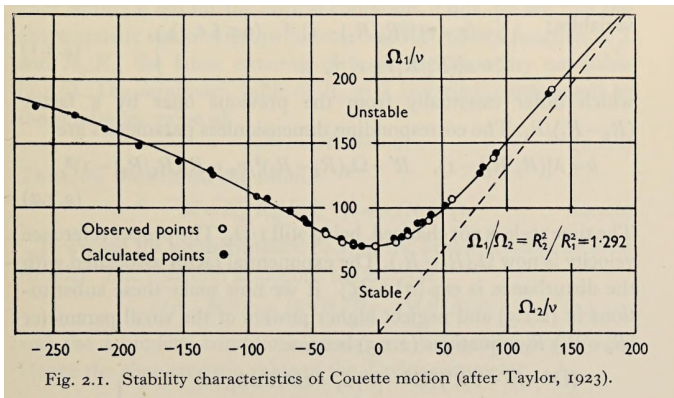
- В стационарном потоке $f_c(r) \equiv \frac{U_\varphi^2}{r} = \frac{H(r)^2}{r^3}$

- Возмущение: $r \rightarrow r' > r$: $f'_c(r') = \frac{H(r)^2}{r'^3} < f_c(r') = \frac{H(r')^2}{r'^3}$, если $H(r') > H(r)$ (Rayleigh 1916)

Спектр осесимметричных возмущений с учетом вязкости: нейтральная линия

Течение Тэйлора-Куэтта: задача Тейлора (1923)

Учет вязкости в случае малого зазора между цилиндрами



Из монографии С.С. Lin (1955)

Неосесимметричные двумерные возмущения. Теорема Рэля

Уравнение Рэля

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{\psi}}{dr} \right) + \left[\frac{m}{\omega - m\Omega} r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) \right) - m^2 \right] \hat{\psi} = 0 \quad *$$

$\hat{\psi}$ - теперь фурье-амплитуда возмущения функции тока,
 $\mathbf{u} \equiv \nabla \times \boldsymbol{\psi} \Leftrightarrow u_r = \partial_\varphi \psi / r$ и $u_\varphi = -\partial_r \psi$

Описывает “взаимодействие” возмущений с исходным потоком
в критическом слое $\omega = m\Omega(r_c)$

$I \equiv \int (*) \times \hat{\psi}^* dr$ с условием $\hat{\psi} \rightarrow 0$ на границах дает: *N.B.: правило Лия

$$\Im[I] = -\omega_i \int \frac{m}{|\omega - m\Omega|^2} \frac{d\varpi}{dr} |\psi|^2 dr = 0$$

$$\text{Если } \omega_i > 0 \implies \frac{d\varpi}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\Omega r^2) \right) \text{ меняет знак}$$

Неосесимметричные двумерные возмущения. Теорема Рэля

Уточнение Фьёртофта (1950)

$$\Im[\mathcal{I}] = -\omega_i \int \frac{m}{|\omega - m\Omega|^2} \frac{d\varpi}{dr} |\psi|^2 dr = 0$$

$$\Re[\mathcal{I}] = \int \frac{(\omega_r - m\Omega)}{|\omega - m\Omega|^2} m \frac{d\varpi}{dr} |\psi|^2 dr - \int \left| \frac{d\psi}{dr} \right|^2 r dr - m^2 \int |\psi|^2 \frac{dr}{r} = 0$$

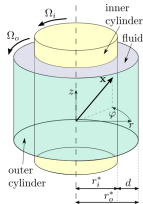
$$\text{Если } \omega_i > 0 : \quad (m\Omega_s - \omega_r) \int \frac{m}{|\omega - m\Omega|^2} \frac{d\varpi}{dr} |\psi|^2 dr = 0,$$

$$\text{где } \Omega = \Omega_s \quad \text{взято в точке} \quad \frac{d\varpi}{dr} = 0$$

$$\text{Учитывая } \Re[\mathcal{I}] \implies \int \frac{\Omega - \Omega_s}{|\omega - m\Omega|^2} \frac{d\varpi}{dr} |\psi|^2 dr < 0$$

$$\frac{d\Omega}{dr} > 0 (< 0) : S - \text{ максимум (минимум) завихренности}$$

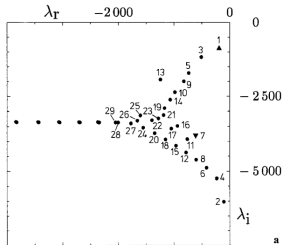
Линейная устойчивость центрально-устойчивого потока Неосесимметричные трехмерные возмущения



$$\propto \exp(\lambda t)$$

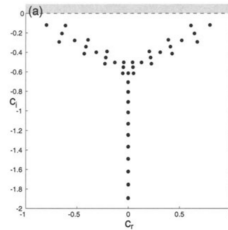
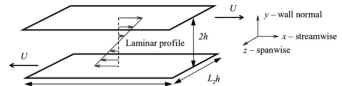
$$\Omega_1 = 0$$

$$\Omega_2 r_o d / \nu = 5000$$



Gebhardt & Grossman (1993)

К сравнению: плоское течение Куэтта



$$\propto \exp(-ict)$$

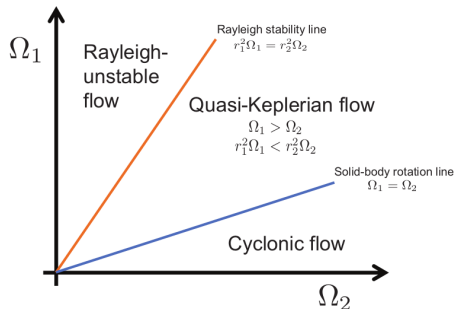
Из монографии Schmid & Henningson (2001)

- Квази-кеплеровский режим
(всевозможные газовые диски)

$$\frac{d(\Omega r^2)}{dr} > 0, \quad \frac{d\Omega}{dr} < 0$$

- Циклонический режим
(пограничные слои вокруг звезд)

$$\frac{d(\Omega r^2)}{dr} > 0, \quad \frac{d\Omega}{dr} > 0$$



Ji & Goodman (2023)

Обзоры о лабораторных и численных экспериментах по исследованию/поиску нелинейной неустойчивости в этих режимах:

Grossman et al. (2016)
Ji & Goodman (2023)

Fromang & Lesur (2017)
Feldmann et al. (2023)