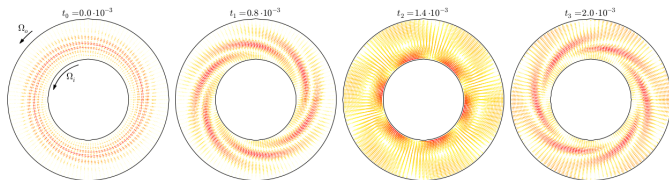


Динамика возмущений во вращательном течении: обобщенный подход

16 июля 2025 г.



Maretzke et al.
(2014)

Обобщенный анализ динамики малых возмущений: немодальный подход

По обзорам: Farrell & Ioannou (1996) Schmid (2007)
Razdoburdin & Zhuravlev (2015)

Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues

Lloyd N. Trefethen, Anne E. Trefethen, Satish C. Reddy, Tobin A. Driscoll

(in Science, 1993)

Из теории линейных операторов

- Норма оператора:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Z} \mathbf{x}(0) \quad ||\mathbf{Z}|| = \max \frac{||\mathbf{Z}\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}$$

- Спектральное разложение оператора:

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{P} \implies \mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{X}^{-1} \implies ||\mathbf{Z}|| \leq ||\mathbf{X}|| ||\mathbf{P}|| ||\mathbf{X}^{-1}||$$

- Для нормального оператора:

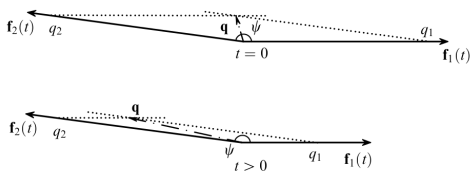
$$\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{I} \implies ||\mathbf{X}|| = 1 \implies ||\mathbf{Z}|| \leq ||\mathbf{P}|| = e^{\Im[\omega_{max}] t}$$

- Для ненормального оператора - требуется знание о $\mathbf{X}$

Обобщенный анализ динамики малых возмущений: немодальный подход

Эффект неортогональности собственных векторов на простом геометрическом примере

- $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$
- $|\mathbf{f}_1| = f e^{-\gamma_1 t}$
 $|\mathbf{f}_2| = f e^{-\gamma_2 t}$
- Пусть $\cos \psi \approx -1 + \epsilon$,
 $\epsilon \ll 1$, $\gamma_1 \gg \gamma_2$



Фактор роста через $\Delta t \simeq \gamma_1^{-1}$

$$g = \frac{q(t)^2}{q(0)^2} = \frac{e^{-2\gamma_1 t} + e^{-2\gamma_2 t} + 2e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t} \cos \psi}{2(1 + \cos \psi)} \approx \frac{e^{-2\gamma_2 t}}{2\epsilon} \gg 1$$

Обобщенный анализ динамики малых возмущений: немодальный подход

Сингулярные числа и векторы

$$\mathbf{Z}\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}$$

$$\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{Z}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{y})$$

$\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ - левый и правый сингулярные вектора с единичной нормой
 σ - их сингулярное число

Свойства операторов $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ и $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$

- Самосопряженность:

$$(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger)^\dagger = (\mathbf{Z}^\dagger)^\dagger\mathbf{Z}^\dagger = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger \quad \text{и} \quad (\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z})^\dagger = \mathbf{Z}^\dagger(\mathbf{Z}^\dagger)^\dagger = \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$$

- Положительно определенность:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}) = (\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}) > 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}\mathbf{f}) = (\mathbf{Z}\mathbf{f}, \mathbf{Z}\mathbf{f}) > 0$$

- Вещественность σ :

$$\mathbf{Z}^\dagger(\mathbf{Z}\mathbf{v}) = \mathbf{Z}^\dagger(\sigma\mathbf{u}) = \sigma\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u} = \sigma^2\mathbf{v}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u}) = \mathbf{Z}(\sigma\mathbf{v}) = \sigma\mathbf{Z}\mathbf{v} = \sigma^2\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{Z}\| = \max \sigma = \sigma_1$$

Обобщенный анализ динамики малых возмущений: немодальный подход

Поиск сингулярных чисел и векторов: матричный метод

- Есть система собственных векторов и значений $\mathbf{Z}$:

$$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_N\} \quad \text{и} \quad \{e^{-i\omega_1 t}, e^{-i\omega_2 t} \dots e^{-i\omega_N t}\}$$

- Рассматривается рост вектора

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^N \kappa^i \mathbf{f}_i \quad \text{при известном} \quad ||\mathbf{q}||^2 = \sum_{i,j=1}^N \kappa^i \kappa^j M_{ij}, \quad \text{где} \quad M_{ij} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j)$$

- Из определения:

$$\mathbf{ZV} = \mathbf{U}\Sigma, \quad \text{где} \quad \mathbf{Z} = \text{diag}\{e^{-i\omega_1 t}, e^{-i\omega_2 t} \dots e^{-i\omega_N t}\}, \quad \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_N\}$$

- Разложение Холецкого:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}$$

$$\mathbf{V}^\dagger \mathbf{F}^\dagger \mathbf{FV} = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{FV})^\dagger (\mathbf{FV}) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{F}^\dagger \mathbf{FU} = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{FU})^\dagger (\mathbf{FU}) = \mathbf{I}$$

- SVD-разложение:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{FU}\Sigma\mathbf{V}^\dagger\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \mathbf{FZF}^{-1} = (\mathbf{FU})\Sigma(\mathbf{FV})^\dagger$$

Обобщенный анализ динамики малых возмущений: немодальный подход

Поиск сингулярных чисел и векторов: метод прямых итераций

- Пусть $\mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \mathbf{v}_k$, где $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{v}_k = \sigma_k^2 \mathbf{v}_k$

- Поскольку $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 q_k \mathbf{v}_k$,

$$\mathbf{q}_{n+1}(0) = \frac{\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}_n(0)}{\|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}_n(0)\|} \rightarrow \mathbf{v}_1 \quad \text{и} \quad \|\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}_n(0)\| \rightarrow \sigma_1^2 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Действие $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{q}(0)$ есть интегрирование

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{q} \quad \text{вперед до времени } t$$

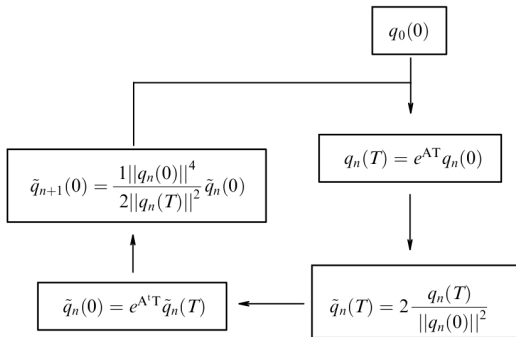
Действие $\mathbf{Z}^\dagger$ на $\mathbf{q}(t)$ есть интегрирование

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{A}^\dagger \mathbf{q} \quad \text{назад до времени } 0$$

Обобщенный анализ динамики малых возмущений: немодалый подход

Вариационная задача на транзиентные возмущения

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - \int_0^t (\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}) d\tau$$



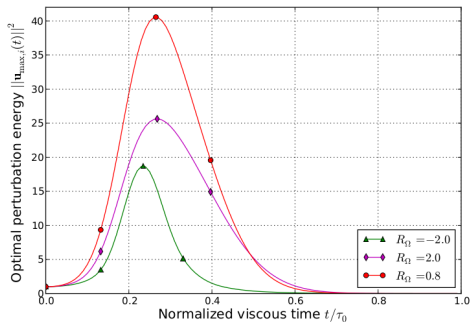
Обобщенный анализ динамики малых возмущений: немодальный подход

Пример: транзитный рост линейных возмущений в течении Тэйлора-Куэтта

- Комбинация собственных векторов спектральной задачи

$$\propto \exp(im\varphi + ik_z z)$$

- $R \equiv |\Omega_2 - \Omega_1| d^2 / \nu = 8000$
- Оптимизация по $\forall t, m, k_z$
- **Квази-двумерные** решения
- $g_{\max} \propto R^{2/3}$



Зеленая и пурпурная кривые:
квази-кеплеровский и циклонический
режимы

Maretzke et al. (2014)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - 2\Omega u_\varphi + (\mathbf{u} \nabla) u_r - \frac{u_\varphi^2}{r} &= -\frac{\partial w}{\partial r} + N_r, \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\Omega r^2) u_r + (\mathbf{u} \nabla) u_\varphi + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + N_\varphi, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + (\mathbf{u} \nabla) u_z &= -\frac{\partial w}{\partial z} + N_z, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

$$\lambda_r \sim x \equiv r - r_0 \ll r_0$$

$$\lambda_\varphi \sim y \equiv r_0(\varphi - \Omega_0 t) \ll r_0$$

$$\lambda_z \sim z \equiv z - z_0 \ll h$$

$$\Omega = \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_{r_0} x = -q\Omega_0 \frac{x}{r_0} \ll \Omega_0, \quad \Omega(x=0) = 0$$

$$q \equiv -(r/\Omega)(d\Omega/dr)|_{r=r_0}$$

$$\text{Вращение с } \Omega_0 \equiv \Omega(r_0)$$

$\sim x/\lambda$ оставляем, $\sim x/r_0$ и выше - опускаем

$$-\frac{\kappa^2}{2\Omega} = -2\Omega - r \frac{d\Omega}{dr} = 2q\Omega_0 \frac{x}{r_0} + (r_0 + x) \frac{q\Omega_0}{r_0} = 3q\Omega_0 \frac{x}{r_0} + q\Omega_0$$

$$\text{Вводим силу Кориолиса: } -2\Omega_0 u_y \mathbf{e}_x + 2\Omega_0 u_x \mathbf{e}_y$$

Goldreich & Lynden-Bell (1965)

Umurhan & Regev (2004), Latter & Papaloizou (2017)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_x - 2\Omega_0 u_y + (\mathbf{u}\nabla)u_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_y + (2 - q)\Omega_0 u_x + (\mathbf{u}\nabla)u_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_z + (\mathbf{u}\nabla)u_z &= -\frac{\partial w}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

$$(\mathbf{u}\nabla) \equiv u_r \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

При переходе к безразмерным величинам $\nu \rightarrow R^{-1} \equiv \nu/(\lambda^2 \Omega_0)$

Остановим вращение, но оставим сдвиг скорости: $\Omega_0 \rightarrow 0$, $|q| \rightarrow \infty$

Возмущения, не зависящие от потоковой координаты, $\partial_y = 0$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{dU_y}{dx} u_x = 0,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Для вектора смещений:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla w$$

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = 0$$

В неограниченной области: $\nabla^2 w = 0 \Rightarrow w = \text{const} \Rightarrow u_x = \text{const}$

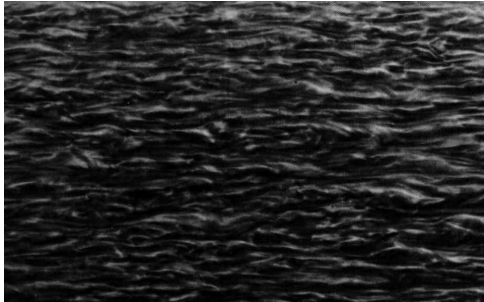
Lift-up effect: генерация роллами прожилок

$$u_y = u_y|_{t=0} - \frac{dU_y}{dx} u_x t$$

Ellingsen & Palm (1975)

С учетом вязкости фактор роста $\sim R^2$
Butler & Farrell (1992) Trefethen et al. (1993)

Лабораторные наблюдения прожилок



Пример: турбулентный пограничный слой

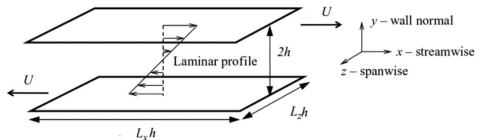
Cantwell et al. (1978)

Сценарий генерации турбулентности

Пример: плоское
течение Куэтта

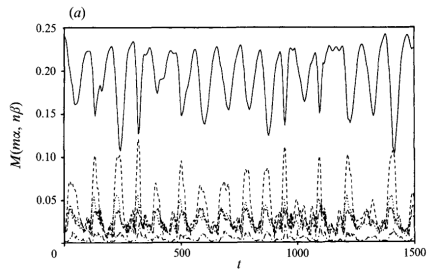
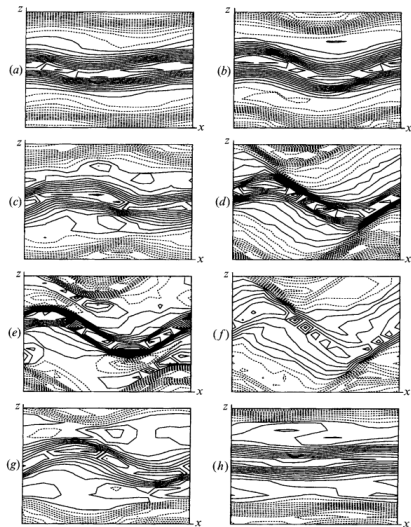
Численный
эксперимент

Hamilton et al. (1995)



- Случайные начальные условия, высокое $R > R_T$
- Последующее одновременное уменьшение R , L_x , L_y
- Выход на квазипериодический цикл регенерации прожилок (streaks)
 $R \equiv Uh/\nu = 400$, $L_x = 1.75\pi h$, $L_y = 2h$, $L_z = 1.2\pi h$
- Период цикла $T_{reg} \sim 100h/U$
- Прожилки соответствуют оптимальным возмущениям для времени роста $\sim T_{reg}$ (Butler & Farrell 1992)

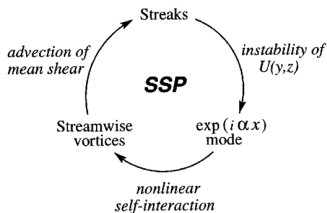
Сценарий генерации турбулентности



Hamilton et al. (1995)

Сценарий генерации турбулентности

Waleffe (1997)



Подтверждающий анализ в нелинейных моделях малой размерности
Baggett & Trefethen (1997)

Rincon et al. (2008) $\Rightarrow$

$$R_{\Omega} \equiv -\frac{2}{q}$$

Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity

Fabian Waleffe

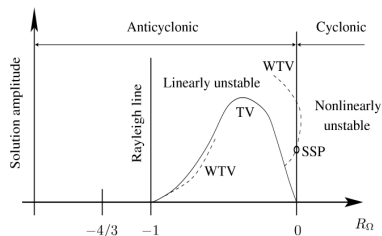
Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139

(Received 24 April 1995; accepted 29 August 1995)

A critique is presented of recent works promoting the concept of non-normal operators and transient growth as the key to understanding transition to turbulence in shear flows. The focus is in particular on a simple model [Baggett *et al.*, *Phys. Fluids* **7**, 883 (1995)] illustrating that view. It is argued that the question of transition is really a question of existence and basin of attraction of nonlinear self-sustaining solutions that have little contact with the non-normal linear problem. An alternative nonlinear point of view [Hamilton *et al.*, *J. Fluid Mech.* **287**, 317 (1995)] that seeks to isolate a self-sustaining nonlinear process, and the critical Reynolds number below which it ceases to exist, is discussed and illustrated by a simple model. Connections with the Navier–Stokes equations and observations are highlighted throughout. © 1995 American Institute of Physics.

Дискуссия о роли линейных и нелинейных механизмов

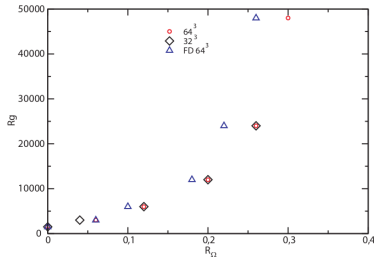
N.B.: для включения SSP TP необходим, причем с $g_{max} \gg 1$



Плоско-параллельный поток: стабилизация вращением

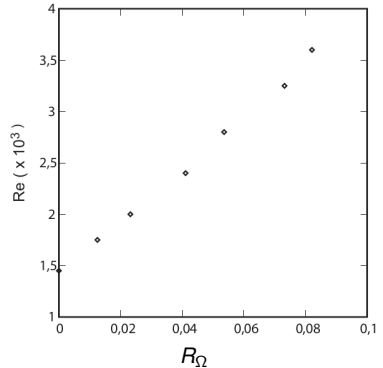
Локальный аналог циклонического потока

Численный эксперимент в shearing sheet approximation с периодическими граничными условиями



Lesur & Longaretti (2005)

Лабораторный эксперимент с вращением кюветы



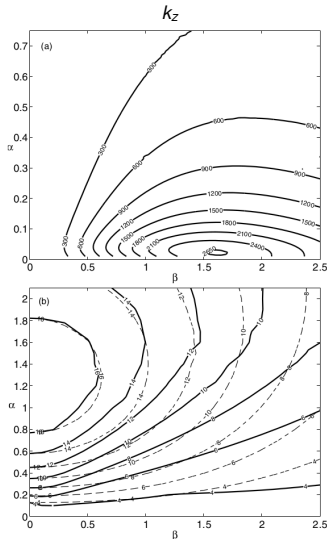
Tillmark & Alfredsson (1996)
in "Advances in Turbulence VI"

Пример: транзитный рост линейных возмущений в плоско-параллельном потоке с вращением

$$R_\Omega = 0$$

$$k_y \Rightarrow$$

$$R_\Omega = -4/3$$



Yecko (2004)

- Комбинация собственных векторов спектральной задачи

$$\propto \exp(ik_y y + ik_z z)$$

- $R \equiv Uh/\nu = 1500$
- Оптимизация по $\forall t$
- Рис. (a): $g_{\max} \propto R^2$
Рис. (b): $g_{\max} \propto R^{2/3}$
- **Оптимальное $k_z \rightarrow 0$**
в кеплеровском потоке

Численные и лабораторные эксперименты с течением Тэйлора-Куэтта

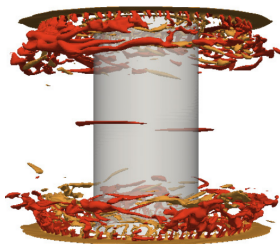
Table 1. Experiments and modeling of hydrodynamic TC flow in quasi-keplerian regimes.

Year	Author(s)	Main results in the quasi-keplerian regime	Method
1933	Wendt [13]	Limited measurements of velocity profile and torque. No turbulence reported.	Exp
2001	Richard [8]	Measured velocity profile affected by endcaps; turbulence identified by flow visualization.	Exp
2002	Beckley [24]	Measured torque consistent with theoretical predictions for laminar Ekman circulation	Exp
2004	Kageyama et al. [25]	Measured velocity profile and spin-down time consistent with laminar Ekman circulation	Exp and modeling
2006	Ji et al. [26,27]	No signs of turbulence at $Re = 2 \times 10^6$ with differentially rotating segmented endcaps	Exp
2008	Obabko et al. [28]	Confirmed reduction of Ekman cells via segmented endcaps.	Modeling
2011	Paoletti et al. [29,30]	Measured enhancement of torque over laminar flow; endcaps attached to outer cylinder	Exp
2012	Avila [31]	Up to $Re \approx 6.4 \times 10^3$; bulk flow turbulence driven by segmented endcap rings	Modeling
2014	Edlund & Ji [32]	No turbulence despite active perturbations; one endcap ring and two radial rims	Exp
2015	Nordsiek et al. [33]	Enhanced torque due to axial transport of angular momentum to endcaps	Exp
2015	Edlund & Ji [34]	Confirmed Re self-similarity of the quiescent flow when Ekman circulation is minimized	Exp
2017	Lopez & Avila [35]	Up to $Re \approx 5 \times 10^4$; turbulence confined near endcaps, bulk flow laminar	Modeling

Ji & Goodman (2023)

Lopez & Avila (2017)

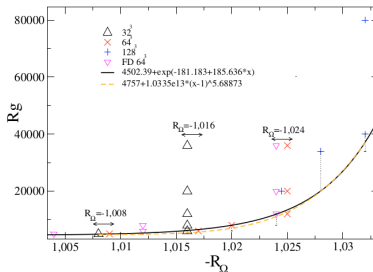
Вторичная циркуляция
Экмана



$$R_s = 32180$$

Lesur & Longaretti (2005)

Численный эксперимент в shearing sheet approximation с периодическими граничными условиями



Balbus (2017)

Fluid dynamicists, note there is a grand challenge problem here. All indicators seem to imply that large Reynolds number qK flow is truly nonlinearly stable. Can this be proven analytically? What valuable insights might emerge by even a partially successful attempt to do so?