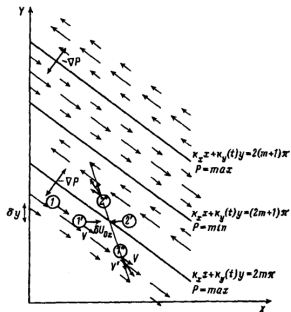
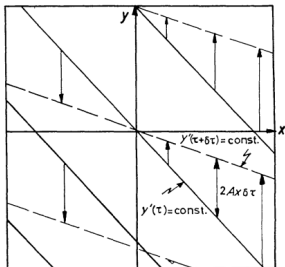


Локальная задача: аналитические методы

16 июля 2025 г.



Goldreich &
Lynden-Bell
(1965)

Чагелишвили и
др. (1996)

Shearing sheet approximation

Goldreich & Lynden-Bell (1965)

Umurhan & Regev (2004), Latter & Papaloizou (2017)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_x - 2\Omega_0 u_y + (\mathbf{u}\nabla)u_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_y + (2 - q)\Omega_0 u_x + (\mathbf{u}\nabla)u_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_z + (\mathbf{u}\nabla)u_z &= -\frac{\partial w}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

$$(\mathbf{u}\nabla) \equiv u_r \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

При переходе к безразмерным величинам $\nu \rightarrow R^{-1} \equiv \nu/(\lambda^2 \Omega_0)$

Динамика линейных возмущений

Сопутствующие фону координаты:

$$x' = x/\lambda,$$

$$y' = (y + q\Omega_0 x t)/\lambda,$$

$$z' = z/\lambda,$$

$$t' = \Omega_0 t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \Omega_0 \frac{\partial}{\partial t'} + q\Omega_0 \frac{x}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x'} + q\Omega_0 \frac{t}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z'}$$

Пространственная фурье-гармоника: $f = \hat{f}(k_x, k_y, k_z, t') \exp(ik_x x' + ik_y y' + ik_z z')$

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = 2\hat{u}_y - i\tilde{k}_x \hat{w} - \frac{k^2}{R} \hat{u}_x,$$

$$\frac{d\hat{u}_y}{dt} = -(2 - q)\hat{u}_x - ik_y \hat{w} - \frac{k^2}{R} \hat{u}_y,$$

$$\frac{d\hat{u}_z}{dt} = -ik_z \hat{w} - \frac{k^2}{R} \hat{u}_z,$$

$$\tilde{k}_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z = 0$$

$$\tilde{k}_x \equiv k_x + qk_y t$$

$$k^2 \equiv \tilde{k}_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$R \equiv \frac{\Omega_0 \lambda^2}{\nu}$$

Поиск оптимальных сдвиговых вихрей

По норме $|\hat{u}_x|^2 + |\hat{u}_y|^2 + |\hat{u}_z|^2$ в пределе ($R \rightarrow \infty$)

Основные уравнения (действие $\mathbf{Z}$)

Сопряженные уравнения (действие $\mathbf{Z}^\dagger$)

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = -\frac{2(qk_y^2 + k_z^2)\tilde{k}_x}{k_y k^2} \hat{u}_x - \frac{2k_z(k_y^2 + k_z^2)}{k_y k^2} \hat{u}_z$$

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = -\frac{(2-q)k_z^2 \tilde{k}_x}{k_y k^2} \hat{u}_x - \frac{(2-q)k_z(k_y^2 + k_z^2)}{k_y k^2} \hat{u}_z$$

$$\frac{d\hat{u}_z}{dt} = \frac{2k_z(\tilde{k}_x^2 + k_y^2 - qk_y^2)}{k_y k^2} \hat{u}_x + \frac{2k_z^2 \tilde{k}_x}{k_y k^2} \hat{u}_z$$

$$\frac{d\hat{u}_z}{dt} = \frac{(2-q)k_z(\tilde{k}_x^2 + k_y^2)}{k_y k^2} \hat{u}_x + \frac{(2-q)k_z^2 \tilde{k}_x}{k_y k^2} \hat{u}_z$$

- Идентичность в пределе $q \rightarrow 0$
- Вырожденность в пределе $k_z \rightarrow 0$

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = 2\hat{u}_y - ik_x \hat{w},$$

$$\frac{d\hat{u}_y}{dt} = -(2 - q)\hat{u}_x,$$

$$\frac{d\hat{u}_z}{dt} = -ik_z \hat{w},$$

$$k_x \hat{u}_x + k_z \hat{u}_z = 0$$

$$i\hat{w} = \frac{2k_x}{k^2}$$

$$\frac{d^2 \hat{u}_x}{dt^2} + \sigma^2 \hat{u}_x = 0$$

$$\sigma^2 \equiv 2(2 - q) \frac{k_z^2}{k^2} = \tilde{\kappa}^2 \frac{k_z^2}{k^2}$$

Стоячие инерционные волны
(интерференция мод $\pm\omega$)

$$\hat{u}_x = A \sin(\sigma t + \varphi)$$

$$\hat{u}_y = A(2 - q)\sigma^{-1} \cos(\sigma t + \varphi)$$

$$\hat{u}_z = -A \frac{k_x}{k_z} \sin(\sigma t + \varphi)$$

Роллы: $\hat{u}_y(0) = 0, \hat{u}_x^2(0) + \hat{u}_z^2(0) = 1$

$$g = \frac{2 - q}{2} \sin^2 \sigma t + \cos^2 \sigma t$$

Прожилки: $\hat{u}_x(0) = \hat{u}_z(0) = 0, \hat{u}_y^2(0) = 1$

$$g = \frac{2}{2 - q} \sin^2 \sigma t + \cos^2 \sigma t$$

- $\partial_z = 0, u_z = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y$
- $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u} = \omega_z \mathbf{e}_z$
- $\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \Rightarrow \boldsymbol{\psi} = \psi_z \mathbf{e}_z, \omega_z = \nabla^2 \psi_z$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega_z + (\mathbf{u} \nabla) \omega_z = \nu \nabla^2 \omega_z$$

Эквивалентность с
плоско-параллельным потоком

Зная ω_z , находим поле скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \omega_z, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Свинг сдвиговых вихрей: линейная динамика

$$\tilde{k}_x \hat{u}_y - k_y \hat{u}_x = -i \hat{\omega}_z$$

$$\tilde{k}_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y = 0$$

$$\hat{u}_y = -i \frac{\tilde{k}_x}{k^2} \hat{\omega}_z$$

$$\hat{u}_x = i \frac{k_y}{k^2} \hat{\omega}_z$$

$$||\mathbf{u}||^2 \equiv E_{2D} = \oint \left(\Re[u_x]^2 + \Re[u_y]^2 \right) dV = |\hat{u}_x|^2 + |\hat{u}_y|^2$$

$$\text{Нормировка: } E_{2D}(0) = 1 \Rightarrow \hat{\omega}_z = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} = k(0) \Rightarrow g_{2D} = E_{2D}(t) = \frac{k(0)^2}{k(t)^2}$$

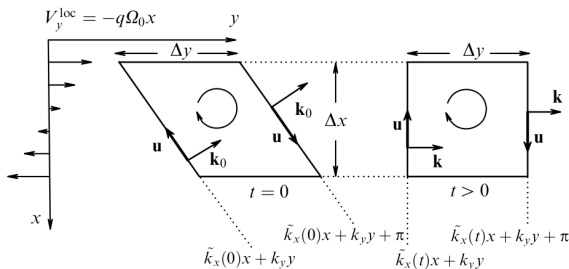
$$\tilde{k}_x(t = t_{sw}) = 0 \Rightarrow t_{sw} = -\frac{k_x}{qk_y}$$

$$G \equiv \max g_{2D} = E_{2D}(t = t_{sw}) \rightarrow \frac{k_x^2}{k_y^2} \text{ при } |k_x| \gg |k_y| \quad (\text{симметрия по } \pm |q|)$$

Свинг сдвиговых вихрей: о механизме усиления

Chagelishvili et al. (1996)

Razdoburdin & Zhuravlev (2015)



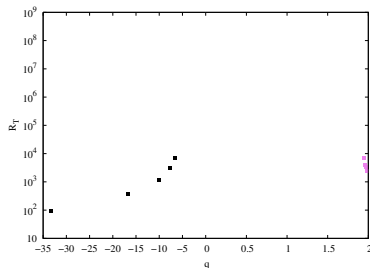
$$\left. \begin{aligned} C|_{t=0} &= 2\Delta x \frac{k}{k_y} |\mathbf{u}(0)| \\ C|_{t=t_s} &= 2\Delta x |\mathbf{u}(t_s)| \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = \frac{|\mathbf{u}(t_s)|^2}{|\mathbf{u}(0)|^2} = \frac{k^2}{k_y^2}$$

Аналогия: $E_{\text{rot}} = I\omega^2/2 \sim I^{-1}$, если $J_{\text{rot}} = I\omega = \text{const}$

Сдвиг скорости	Линейная динамика	Турбулентность	Механизм
$q = 0$	Нет роста	Не существует	—————
$2 < q < +\infty$	Центробежная неустойчивость по критерию Рэлея	Сверхкритическая	Вихри Тэйлора
$q = \pm\infty$	Эффект lift-up: транзитный рост роллы $\rightarrow$ стрейки	Докритическая $R_T \sim 350$	SSP
$q = 2$	Эффект anti-lift-up: транзитный рост стрейки $\rightarrow$ роллы	Докритическая $R_T \sim 2000$	?
$-\infty < q < 0$	Усиление свингом сдвиговых вихрей (2D)	Докритическая (для $ q \gg 1$)	?
$0 < q < 2$	Усиление свингом сдвиговых вихрей (2D)	?	?

Численный эксперимент в центробежно устойчивых потоках $-\infty < q < 2$

- Anti-lift-up $\Rightarrow g \approx 2/(2 - q)$,
что дает $g(q = 1.94) \approx 33$
- Lift-up $\Rightarrow g \approx (2 - q)/2$,
что дает $g(q = -6) \approx 4$
(но: для $q = -\infty$ и $R_T = 350$
имеем $g \approx 100$)
- Усиление свингом $\Rightarrow g \approx (|q|R_T)^{2/3}$,
что дает вариацию с фактором ~ 7
вдоль черных точек



Lesur & Longaretti (2005)

Фурье-код для вихревой динамики 64^3

Существует ли какой-либо иной механизм транзитного роста,
дающий $g \approx \text{const} \gg 1$ вдоль черных точек?

$$-i \frac{d\hat{\omega}_z}{dt} = (2 - q)k_z \hat{u}_z$$

$$-i \frac{d\hat{\omega}_x}{dt} = (2 - q)k_z \hat{u}_x$$

$$\hat{u}_x = \frac{k_z \tilde{k}_x}{k_y k^2} i \hat{\omega}_x + \frac{k_y^2 + k_z^2}{k_y k^2} i \hat{\omega}_z$$

$$\hat{u}_z = -\frac{k_z \tilde{k}_x}{k_y k^2} i \hat{\omega}_z - \frac{\tilde{k}_x^2 + k_y^2}{k_y k^2} i \hat{\omega}_x$$

 $\Rightarrow$

+ сопряженные уравнения
по норме $\|u\|^2 = E$: поиск
транзистентных возмущений

 $\Leftarrow$

$$\tilde{k}_x \hat{u}_y - k_y \hat{u}_x = -i \hat{\omega}_z$$

$$k_y \hat{u}_z - k_z \hat{u}_y = -i \hat{\omega}_x$$

$$\tilde{k}_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z = 0$$

Zhuravlev & Razdoburdin (2018):
приближение $|k_z| \ll |k_y|$

$$\hat{u}_x \approx \frac{i k_y}{\tilde{k}_x^2 + k_y^2} \hat{\omega}_z$$

$$\hat{\omega}_x \approx (2 - q) i k_z \int \hat{u}_x dt$$

$$\hat{u}_z(0) = 0 \text{ и } E_{2D}(0) = 1 \Rightarrow$$

$$|k_x| \gg |k_y|, |\tilde{k}_x| \gg |k_y|$$

$$\hat{u}_z \approx \text{sgn}(q) \frac{2 - q}{q} \pi \frac{k_z}{k_y^2} i |k_x| + \frac{2}{q} \left(\frac{1}{k_x} - \frac{1}{\tilde{k}_x} \right) \frac{k_z}{k_y} i |k_x|$$

*Далее перенормировка: $\lambda^{-1} = k_y \implies k_y = 1$

3D поправка к свингу

$$\hat{u}_x = \hat{u}_x^0 + k_z^2 \hat{u}_x'$$

В пределе тугой закрутки $|\tilde{k}_x| \gg 1$:

$$\epsilon \equiv \frac{k_z^2 |\hat{u}_x'|}{|\hat{u}_x^0|} \approx k_z^2 \frac{2\pi(2-q)}{q^2} |\tilde{k}_x| \quad \text{Zhuravlev \& Razdoburdin (2018)}$$

Критерий справедливости использованного приближения:

$$\epsilon(\tilde{k}_{x \max}) \lesssim 1$$

$\tilde{k}_{x \max}$ соответствует такой обратной закрутке вихря, когда вертикальные движения подавляются вязкостью.

Анализ ограничения величины k_z в контексте 2D TP: Balbus & Hawley (2006)

Фактор роста вертикальных движений с учетом вязкости

$$t_{sw}(k_{x \max}) \simeq t_\nu(k_{x \max}) \Rightarrow k_{x \max}$$

$$t_{gr}|_{\tilde{k}_{x \max}} = \frac{\hat{u}_z}{d\hat{u}_z/dt}\bigg|_{\tilde{k}_{x \max}} \simeq t_\nu(\tilde{k}_{x \max}) \Rightarrow k_{z \max}$$

$$\begin{cases} \Omega_0 t_\nu(k_x) = \Omega_0 \frac{\lambda_x^2}{\nu} = \frac{R}{k_x^2} \\ \Omega_0 t_{sw} = \frac{k_x}{q} \end{cases} \Rightarrow k_{x \max} = (qR)^{1/3}$$

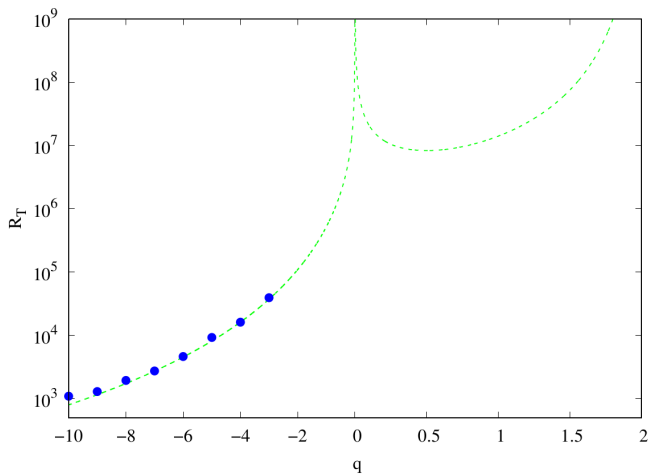
$$\begin{cases} \Omega_0 t_\nu(\tilde{k}_x) = \frac{R}{\tilde{k}_x^2} \\ \Omega_0 t_{gr} = \frac{(2-q)}{|q|} \pi \left(\frac{2}{q} \tilde{k}_x^{-2} q \right)^{-1} \end{cases} \Rightarrow \tilde{k}_{x \max} = \operatorname{sgn}(q) \left(\frac{2|q|R}{(2-q)\pi} \right)^{1/4}$$

$$k_{z \max} = \left(\frac{|q|^7}{2^5 \pi^3 (2-q)^3 R} \right)^{1/8} \epsilon^{1/2}$$

Потеря устойчивости центробежно-устойчивым потоком

$$g_{z \max} \equiv u_z^2(k_{x \max}, k_{z \max}) = \epsilon f(q, R)$$

гипотеза Журавлева-Раздобурдина



$$g_{z \max} / \epsilon \approx 150$$

V. V. Zhuravlev and D. N. Razdoburdin: Cross-rolls in rotating shear flow

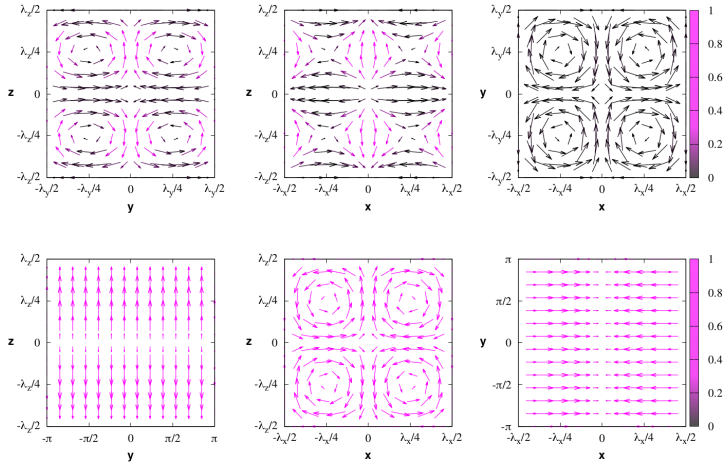
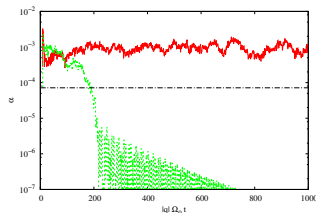
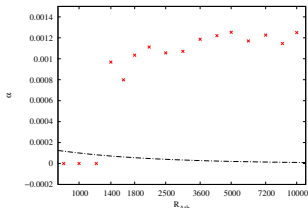


Fig. 9. *Left, middle, and right panels:* cross-sections of shearing spiral velocity pattern, respectively, in (y, z) -, (x, z) -, and (x, y) -planes, which contain the point $x = y = z = 0$. The colour represents the velocity absolute value normalised by its maximum value separately for the *top and bottom panels*. *Top panels:* $k_x = -141$, $k_z = 0.1$, $\tilde{k}_x = 43$, and $q = 1.5$. The wavelengths are $\lambda_x = 2\pi/k_x$, $\lambda_y = 2\pi$, $\lambda_z = 2\pi/k_z$. *Bottom panels:* $k_x = -141$, $k_z = 0.1$, and $t = \pi/(2\sigma)$, where σ is defined in Sect. 5.1; the shear rate is $q = 1.99$. The wavelengths are $\lambda_x = 2\pi/k_x$, $\lambda_y = \infty$, $\lambda_z = 2\pi/k_z$. The extraction of the shearing spiral velocity pattern is described in detail in Appendix A.

Определение докритического перехода к турбулентности

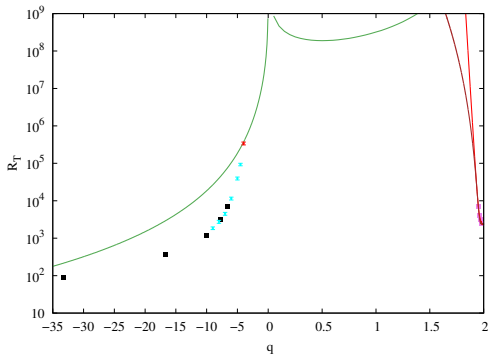
- $q = -10$
- Кубическая счетная область $L_x = L_y = L_z = c_s/(|q|\Omega_0)$ и $R_{ATH} \equiv \Omega_0 L_y^2/\nu$
- Зеленая кривая $R = 1200$; красная кривая $R = 1400$ ($\sim +20\%$) $\Rightarrow$ оценка $R_T = 1300$



- 1) Произведено кодом ATHENA на кластере “Ломоносов” в МГУ
- 2) Разрешение 128^3
- 3) Постановка расчета аналогично Lesur & Longaretti (2005)
- 4) α - эффективное вязкое напряжение в единицах давления
- 5) Штрих-пунктирная линия соответствует $\alpha = \nu r \Omega' / c_s^2$

Потеря устойчивости центробежно-устойчивым потоком

Сравнение с линейным аналитическим решением: **кубическая** счетная область



- Голубые точки - численный эксперимент
- Зеленая кривая - постоянный фактор роста кросс-роллов $g = \text{const}$, фитированный по экспериментальной точке $R_T = 370000$ для $q = -4$

Плохое соответствие

Потеря устойчивости центробежно-устойчивым потоком

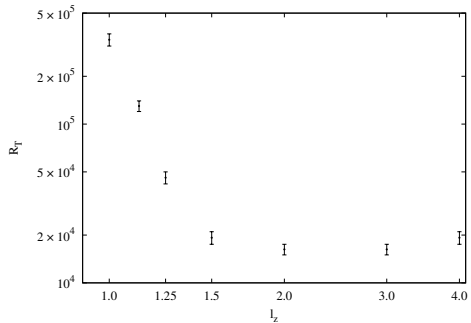
Вытягиваем счетную область вдоль оси вращения

1) $q = -4$.

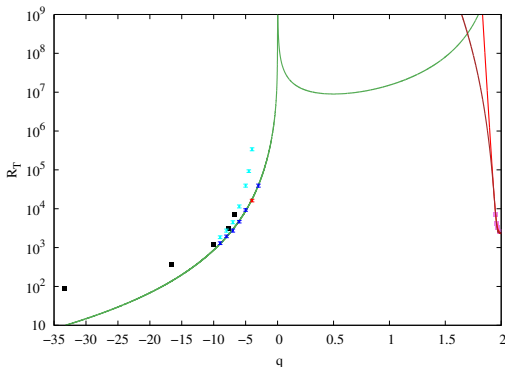
2) $l_z \equiv L_z/L_y, L_x = L_y$.

3) $R_T(l_z = 1) = 370000$

4) $R_T(l_z = 2) = 15000$



Сравнение с линейным аналитическим решением: **вытянутая** счетная область



- Синие точки - численный эксперимент
- Зеленая кривая - постоянный фактор роста кросс-роллов $g = \text{const}$, фитированный по экспериментальной точке $R_T = 15000$ для $q = -4$ в вытянутом ящике

Хорошее соответствие