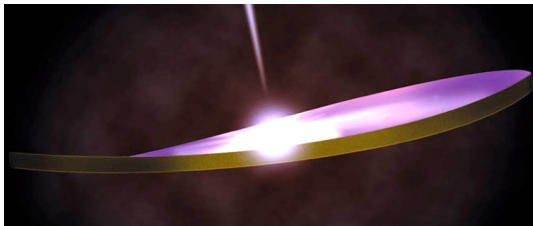


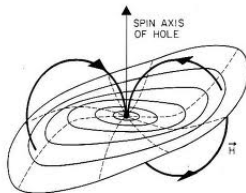
Теория изгибающей дисковой аккреции в окрестности вращающейся черной дыры

21 декабря 2021 г.



James Gitlin (Space Telescope Science Institute)

Bardeen & Petterson (1975) — Первая количественная модель, движение колец диска под воздействием гравитомагнитной силы и трения между собой. Эффект “укладки” диска в экваториальную плоскость черной дыры.



Petterson (1977,1978)

Hatchett, Begelman & Sarazin (1981) — Первое решение ньютоновских уравнений гидродинамики, введение “изгибающей” системы координат. Нарушение закона сохранения момента импульса.

Paraloizou & Pringle (1983) — Первое корректное решение гидродинамической задачи в рамках ньютоновской механики. Показано, что внутри колец изгибающего диска всегда нарушена и осевая, и зеркальная симметрия: существует возмущение скорости движения вещества и возмущение распределения плотности внутри них.

Papaloizou & Lin (1995) — Изгибные волны в ньютоновском диске малой вязкости.

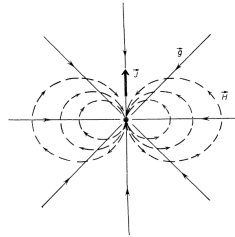
Ivanov & Illarionov (1997) — Стационарный изгибный диск малой вязкости с учетом релятивистских поправок к динамике вблизи черной дыры. Радиальные осцилляции угла наклона колец диска вместо эффекта Бардина-Петтерсона.

Zhuravlev & Ivanov (2011) — Релятивистский изгибный аккреционный диск вокруг медленно вращающейся черной дыры.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}]$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/(c^2 r)}} \frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{H} = 2a \frac{G^2 M^2}{c^3} \frac{\mathbf{j} - 3(\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r}{r^3}$$



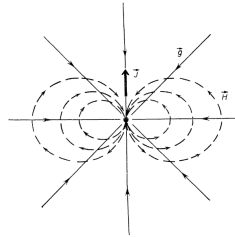
Торн, Прайс, Макдональд (1988)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}]$$

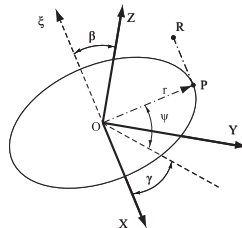
$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/(c^2 r)}} \frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{H} = 2a \frac{G^2 M^2}{c^3} \frac{\mathbf{j} - 3(\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r}{r^3}$$

$$f_\xi \approx 4a \frac{G^2 M^2}{c^3} \frac{U_\psi}{r^3} \beta \sin \psi$$



Торн, Прайс, Макдональд (1988)



$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}]$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/(c^2 r)}} \frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r$$

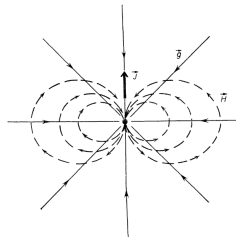
$$\mathbf{H} = 2a \frac{G^2 M^2}{c^3} \frac{\mathbf{j} - 3(\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r}{r^3}$$

$$f_\xi \approx 4a \frac{G^2 M^2}{c^3} \frac{U_\psi}{r^3} \beta \sin \psi$$

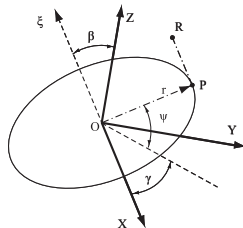
Свободная прецессия кольца
с частотой

$$\Omega_{LT} \approx \frac{G^2 M^2}{c^3} \frac{2a}{r^3} \ll \Omega = \left(\frac{GM}{r^3} \right)^{1/2}$$

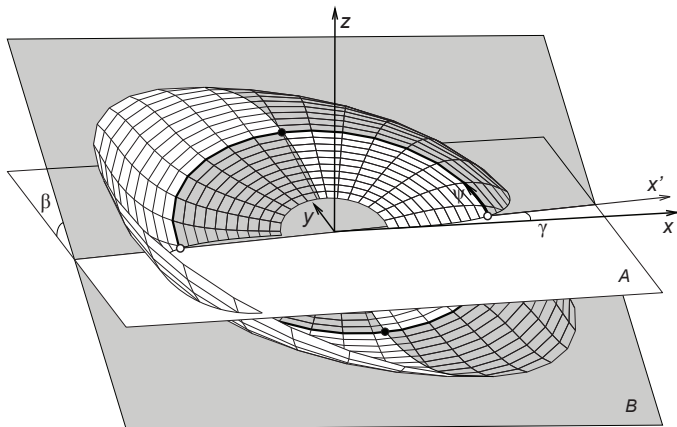
Thirring-Lense (1918)



Торн, Прайс, Макдональд (1988)



Дифференциальная прецессия Лензе-Тирринга

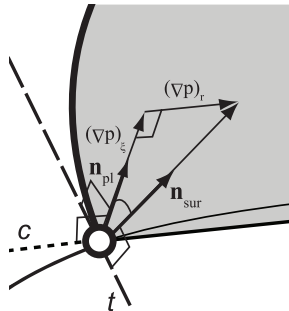


$$\beta = \text{const}$$

Радиальная проекция градиента давления

$\beta = \text{const}$:

$$\frac{\partial_r p}{\partial_\xi p} \approx r \beta \gamma' \cos \psi$$

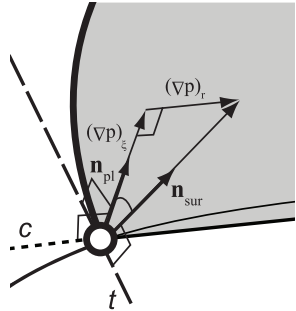


$\beta = \text{const}$:

$$\frac{\partial_r p}{\partial_\xi p} \approx r \beta \gamma' \cos \psi$$

В общем случае:

$$\frac{\partial_r p}{\partial_\xi p} \approx r \beta \gamma' \cos \psi - r \beta' \sin \psi$$

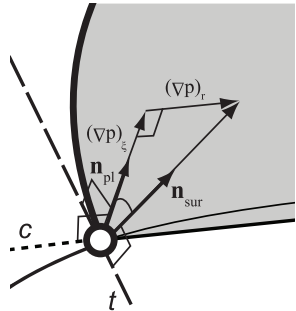


$$\beta = \text{const:}$$

$$\frac{\partial_r p}{\partial_\xi p} \approx r\beta\gamma' \cos\psi$$

В общем случае:

$$\frac{\partial_r p}{\partial_\xi p} \approx r\beta\gamma' \cos\psi - r\beta' \sin\psi$$

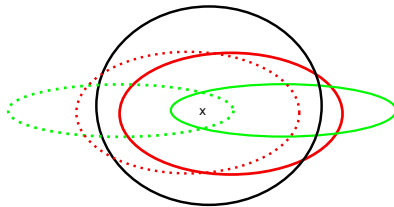


Уравнение гидростатического равновесия:

$$\frac{\partial_\xi p}{\rho} \approx -\Omega^2 \xi$$

$\partial_r p$ является драйвером возмущений внутри наклоненного кольца

Интенсивность эпициклического движения растёт $\propto \xi$:

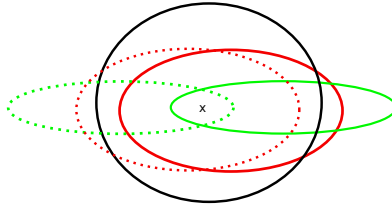


Эйлеровы возмущения скорости движения газа:

$$v_r \propto \xi,$$

$$v_\psi \propto \xi$$

Интенсивность эпициклического движения растёт $\propto \xi$:



Эйлеровы возмущения скорости движения газа:

$$v_r \propto \xi,$$

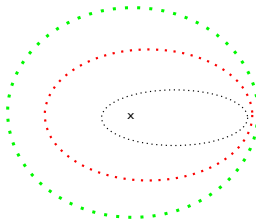
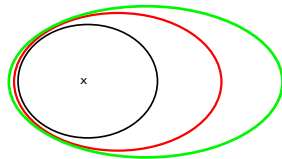
$$v_\psi \propto \xi$$

Приводят к возникновению специфической вязкой силы

Интенсивность эпициклического движения меняется с r :

Эйлерово возмущение плотности:

$$\rho_1 \propto \xi$$

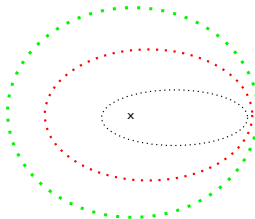
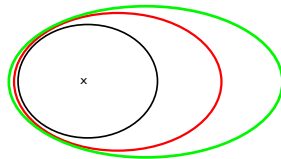


Интенсивность эпициклического движения меняется с r :

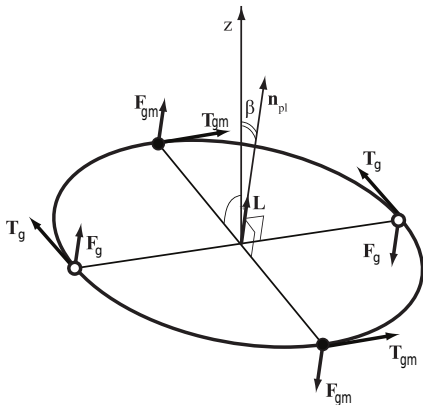
Эйлерово возмущение плотности:

$$\rho_1 \propto \xi$$

Приводит к возникновению
специфической гравитационной
силы

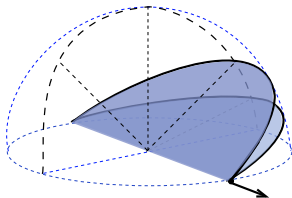


В изгибном диске с $\beta = \text{const}$:



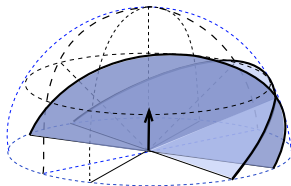
$\mathbf{F}_{gm}$ и $\mathbf{T}_{gm}$ - гравитомагнитная сила и ее момент.
 $\mathbf{F}_g$ и $\mathbf{T}_g$ - центральная гравитационная сила и ее момент.

Вариация β



$$-2U_{\psi}\dot{\beta}\cos\psi$$

Вариация γ



$$-2U_{\psi}\beta\dot{\gamma}\sin\psi$$

$$\dot{v}_r + \Omega \partial_\psi v_r - 2\Omega v_\psi = rW \frac{\partial_\xi p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_r)$$

$$\dot{v}_\psi + \Omega \partial_\psi v_\psi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r = \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_\psi)$$

$$\dot{v}_r + \Omega \partial_\psi v_r - 2\Omega v_\psi = rW \frac{\partial_\xi \rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_r)$$

$$\dot{v}_\psi + \Omega \partial_\psi v_\psi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r = \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_\psi)$$

$$\Omega \partial_\psi \rho_1 + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v_r) + \frac{\rho}{r} \partial_\psi v_\psi = 0$$

$$\dot{v}_r + \Omega \partial_\psi v_r - 2\Omega v_\psi = rW \frac{\partial_\xi \rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_r)$$

$$\dot{v}_\psi + \Omega \partial_\psi v_\psi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r = \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_\psi)$$

$$\Omega \partial_\psi \rho_1 + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v_r) + \frac{\rho}{r} \partial_\psi v_\psi = 0$$

$$2\rho U_\psi \partial_\psi U = -\rho_1 \partial_\xi \Phi + \rho f_\xi$$

$$\dot{v}_r + \Omega \partial_\psi v_r - 2\Omega v_\psi = rW \frac{\partial_\xi \rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_r)$$

$$\dot{v}_\psi + \Omega \partial_\psi v_\psi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r = \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_\psi)$$

$$\Omega \partial_\psi \rho_1 + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v_r) + \frac{\rho}{r} \partial_\psi v_\psi = 0$$

$$2\rho U_\psi \partial_\psi U = -\rho_1 \partial_\xi \Phi + \rho f_\xi$$

$$W \equiv \beta' \sin \psi - \beta \gamma' \cos \psi$$

$$U \equiv \dot{\beta} \sin \psi - \beta \dot{\gamma} \cos \psi$$

$$\dot{v}_r + \Omega \partial_\psi v_r - 2\Omega v_\psi = rW \frac{\partial_\xi p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_r)$$

$$\dot{v}_\psi + \Omega \partial_\psi v_\psi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r = \frac{1}{\rho} \partial_\xi (\eta \partial_\xi v_\psi)$$

$$\Omega \partial_\psi \rho_1 + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v_r) + \frac{\rho}{r} \partial_\psi v_\psi = 0$$

$$2\rho U_\psi \partial_\psi U = -\rho_1 \partial_\xi \Phi + \rho f_\xi$$

$$W \equiv \beta' \sin \psi - \beta \gamma' \cos \psi$$

$$U \equiv \dot{\beta} \sin \psi - \beta \dot{\gamma} \cos \psi$$

$$\frac{\partial_\xi p}{\rho} = -\partial_\xi \Phi = -\Omega^2 \xi \quad \eta \equiv \rho \nu, \quad \text{где} \quad \nu \equiv \alpha c_s^2 \Omega^{-1}$$

1) Подстановка $\psi = \varphi - \gamma$:

$$Z \equiv \Psi_1 \sin \varphi - \Psi_2 \cos \varphi$$

$$\Psi_1 \equiv \beta \cos \gamma = -I_y \quad \Psi_2 \equiv \beta \sin \gamma = I_x$$

$\mathbf{l}$ - единичный вектор ориентации кольца диска

$$\underline{W \equiv \Psi_1 + i\Psi_2 = \beta e^{i\gamma}}$$

$$U = \dot{Z} \quad W = Z'$$

2) Частный случай изотермического по вертикали диска:

$$\rho = \rho_c e^{-\xi^2/2h^2}$$

1) Подстановка $\psi = \varphi - \gamma$:

$$Z \equiv \Psi_1 \sin \varphi - \Psi_2 \cos \varphi$$

$$\Psi_1 \equiv \beta \cos \gamma = -I_y \quad \Psi_2 \equiv \beta \sin \gamma = I_x$$

$\mathbf{l}$ - единичный вектор ориентации кольца диска

$$\underline{W \equiv \Psi_1 + i\Psi_2 = \beta e^{i\gamma}}$$

$$U = \dot{Z} \quad W = Z'$$

2) Частный случай изотермического по вертикали диска:

$$\rho = \rho_c e^{-\xi^2/2h^2}$$

$$v_r = \xi B_1 \sin \varphi + \xi B_2 \cos \varphi$$

$$v_\psi = \xi A_1 \sin \varphi + \xi A_2 \cos \varphi$$

$$\rho_1 = \xi \rho C_1 \sin \varphi + \xi \rho C_2 \cos \varphi$$

$$\dot{\mathbf{B}} - (i - \alpha)\Omega\mathbf{B} - 2\Omega\mathbf{A} = -i\Omega^2 r\mathbf{W}'$$

$$\dot{\mathbf{A}} - (i - \alpha)\Omega\mathbf{A} + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{A} \equiv A_2 + iA_1 \quad \mathbf{B} \equiv B_2 + iB_1$$

$$\dot{\mathbf{B}} - (i - \alpha)\Omega\mathbf{B} - 2\Omega\mathbf{A} = -i\Omega^2 r\mathbf{W}'$$

$$\dot{\mathbf{A}} - (i - \alpha)\Omega\mathbf{A} + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{A} \equiv A_2 + iA_1 \quad \mathbf{B} \equiv B_2 + iB_1$$

Поскольку $r \gg r_g$, $\delta \ll 1 \Rightarrow t_{ev} \gg \Omega^{-1}$, а также $\alpha \ll 1$:

$$\mathbf{A} \approx -\frac{i}{2}\mathbf{B}$$

Тогда получаем для $\mathbf{C} \equiv C_2 + iC_1$:

$$i\mathbf{C} = \frac{1}{\Omega\rho r^{1/2}} \left(\rho r^{1/2} \mathbf{B} \right)'$$

$$\dot{\mathbf{B}} - (i - \alpha)\Omega\mathbf{B} - 2\Omega\mathbf{A} = -i\Omega^2 r\mathbf{W}'$$

$$\dot{\mathbf{A}} - (i - \alpha)\Omega\mathbf{A} + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{A} \equiv A_2 + iA_1 \quad \mathbf{B} \equiv B_2 + iB_1$$

Поскольку $r \gg r_g$, $\delta \ll 1 \Rightarrow t_{ev} \gg \Omega^{-1}$, а также $\alpha \ll 1$:

$$\mathbf{A} \approx -\frac{i}{2}\mathbf{B}$$

Тогда получаем для $\mathbf{C} \equiv C_2 + iC_1$:

$$i\mathbf{C} = \frac{1}{\Omega\rho r^{1/2}} \left(\rho r^{1/2} \mathbf{B} \right)'$$

$$\dot{\mathbf{W}} - i\Omega_{LT}\mathbf{W} = -\frac{\mathbf{C}}{2} \frac{\xi^2 \Omega}{r}$$

*баланс интегральных моментов в проекции на экваториальную плоскость черной дыры

Вдали от внутренней границы:

$$\Sigma\nu = \frac{\dot{M}}{3\pi} = \textit{const}$$

Тогда твистовое уравнение имеет вид:

$$\dot{\mathbf{W}} - i\Omega_{LT}\mathbf{W} = \frac{\delta^2}{2r}(r^2 i\mathbf{B})'$$

$$\dot{\mathbf{B}} - (\mathrm{i} - \alpha)\Omega\mathbf{B} - 2\Omega\mathbf{A} = -\mathrm{i}\Omega^2 r\mathbf{W}'$$

$$\dot{\mathbf{A}} - (\mathrm{i} - \alpha)\Omega\mathbf{A} + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\mathbf{B} = 0$$

$$\dot{\mathbf{W}} - \mathrm{i}\Omega_{LT}\mathbf{W} = \frac{\delta^2}{2r}(r^2\mathrm{i}\mathbf{B})'$$

Замена:

$$x \equiv \left(\frac{GM}{r c^2} \right)^{1/2} \ll 1$$

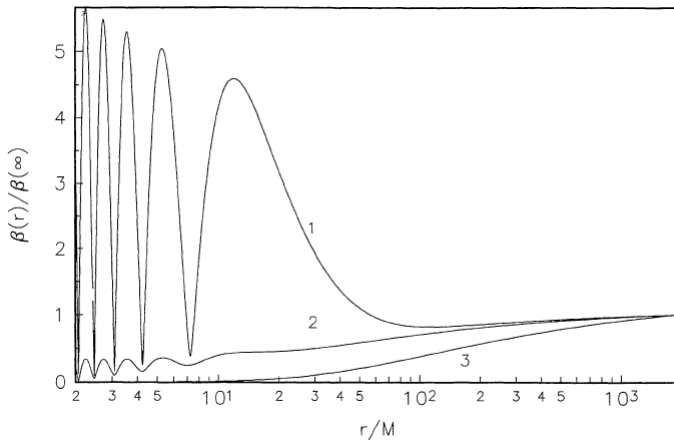
Учет эйнштейновской прецессии:

$$\frac{\kappa^2}{\Omega^2} \approx 1 - 6x^2$$

Уравнение Иванова-Илларионова (1997):

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left(1 - \frac{3ix^2}{\alpha} \right)^{-1} \frac{d\mathbf{W}}{dx} \right\} + \frac{32i\alpha ax}{\delta^2} \mathbf{W} = 0$$

Иванов-Илларионов (1997)



$\delta = 0.1, a = 1.0$

Кривые 1, 2 и 3: $\alpha = 0.01, 0.1, 1.0$

- 1) Аналитическое решение для $\alpha \gg \delta$ дает радиус укладки диска в экваториальную плоскость черной дыры:

$$r_{alg} \approx 4 \frac{GM}{c^2} \alpha^{2/3} a^{2/3} \delta^{-4/3}$$

- 2) Аналитическое решение для $\alpha \ll \delta$ дает радиус области осциллирующий угла наклона диска:

$$r_{osc} \approx 3 \frac{GM}{c^2} a^{2/5} \delta^{-4/5}$$

- 3) Условие перехода между двумя режимами, $r_{osc} \gtrsim r_{alg}$:

$$\alpha \lesssim a^{-2/5} \delta^{4/5}$$

- 4) *Поведение диска в релятивистских режимах $r_{alg}, r_{osc} \sim GM/c^2$:

Журавлев-Иванов (2011)

Решение в виде изгибных мод $\propto \exp(-i\omega t + ikr)$
при уже известных условиях: $\omega \ll \Omega$, $\alpha \ll 1$,
а также дополнительных новых: $kr \gg 1$, но $kh \ll 1$.

Дисперсионное уравнение:

$$(\omega + i\alpha\Omega + \Omega_p)(\omega + \Omega_{LT}) = \frac{k^2 h^2 \Omega^2}{4}$$

Частота эйнштейновской прецессии:

$$\Omega_p \equiv \frac{3}{c^2} \left(\frac{GM}{r^5} \right)^{1/2} \ll \Omega$$

Papaloizou-Lin (1995)

Строго ньютоновская динамика: $\Omega_{LT} = 0$, $\Omega_p = 0$.

В предельном случае

$$\alpha \ll kh$$

$$\omega = -i\frac{\Omega}{2} \pm \frac{1}{2}kh\Omega$$

Papaloizou-Pringle (1983)

Строго ньютоновская динамика: $\Omega_{LT} = 0$, $\Omega_p = 0$.

В предельном случае

$$\alpha \gg kh$$

$$\omega = -iDk^2$$

$$D \equiv \frac{\hbar^2 \Omega}{4\alpha}$$

Paraloizou-Pringle (1983)

Строго ньютоновская динамика: $\Omega_{LT} = 0, \Omega_p = 0$.

В предельном случае

$$\alpha \gg kh$$

$$\omega = -iDk^2$$

$$D \equiv \frac{h^2 \Omega}{4\alpha}$$

*коэффициент турбулентной диффузии $\sim \nu = \alpha h^2 \Omega \ll D$

Paraloizou-Pringle (1983)

Строго ньютоновская динамика: $\Omega_{LT} = 0$, $\Omega_p = 0$.

В предельном случае

$$\alpha \gg kh$$

$$\omega = -iDk^2$$

$$D \equiv \frac{\hbar^2 \Omega}{4\alpha}$$

*коэффициент турбулентной диффузии $\sim \nu = \alpha \hbar^2 \Omega \ll D$

Радиус укладки диска в экваториальную плоскость черной дыры

$$r_{alg} \approx 4 \frac{GM}{c^2} \alpha^{2/3} a^{2/3} \delta^{-4/3}$$

соответствует условию: $t_D = t_{LT}$